Decimoséptima Reunión Latinoamericana Matemática Educativa
RELME17
CHILE

Acta Latinoamericana de Matemática Educativa

Volumen 17 - año 2004

Clame

ACTA LATINOAMERICANA

DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

VOLUMEN 17, AÑO 2004

Clame
Comité Latinoamericano
de Matemática Educativa

ACTA LATINOAMERICANA DE MATEMÁTICA EDUCATIVA
VOLUMEN 17, AÑO 2004. VARIOS AUTORES.

EDITORA
LEONORA DÍAZ MORENO

COORDINACIÓN TÉCNICA
JORGE ÁVILA CONTRERAS, EDUARDO CARRASCO HENRÍQUEZ,
OLDA NADINNE COVIÁN CHÁVEZ, MARTHA MALDONADO ROSALES,
AVENILDE ROMO VÁZQUEZ, G. LETICIA SÁNCHEZ GARCÍA

DISEÑO DE PORTADA
CARLOS OYARZÚN

FORMATO DIGITAL
JUAN GABRIEL MOLINA ZAVALETA
CÉSAR OCTAVIO PÉREZ CARRIZALES

ISBN: 970-9971-02-6

Impreso en México/ Junio de 2004.

Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

PRESENTACIÓN

Este Volumen 17 del Acta Latinoamericana de Matemática Educativa responde a la preocupación del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa - Clame por promover semilleros de investigadores en la disciplina, favoreciendo la investigación, la sistematización de esas experiencias de investigación, así como la innovación de ese quehacer indagativo.

Si hablamos de investigación en educación, es inevitable pensar en personas y procesos. Desde la disciplina de la matemática educativa, entendemos que el conocimiento se construye en una red de conversaciones en las que participan los distintos actores comprometidos para incidir benéficamente en la calidad de los aprendizajes matemáticos. Por su parte, en la investigación académica tradicional suele predominar una cultura competitiva y orientada hacia la obtención de productos -resultados de investigaciones- en detrimento de una valoración de los diversos estadios por los que transitan los profesionales de la investigación, quienes necesariamente comienzan siendo novicios y se orientan a la experticia en su trayectoria. La comunidad de matemática educativa procura integrar procesos y productos, convocando a cada una de tales elaboraciones, la del profesional experto y la de aquel que por el momento solamente puede entregarnos sus primeras exploraciones, en las que cristaliza intuiciones y nuevas miradas. Mismas que nos traen a la mano nuestros complejos heterogéneos y entusiasmantes desafíos a la investigación en y desde Latinoamérica.

En orden a reconocernos en ese ir haciéndonos investigadores, concurren a este diálogo escrito investigadores en formación, novicios, profesionales y expertos, renovando a la comunidad y renovándose desde ella. Por lo mismo, este volumen del Acta consigna las secciones de *los expertos* a la luz de lo que llamamos *Visión de conjunto sobre aspectos relevantes de la investigación*. Al mismo tiempo y como un modo de distinguir los diversos momentos del ejercicio indagativo que dan cuenta de las distintas fases y tipos de investigación que se llevan a cabo en la disciplina, por una parte, la sección de *Reportes de investigaciones terminadas y en curso,* y las secciones de *Sistematizaciones de experiencias educativas; Propuestas de enfoques y métodos de enseñanza;* y, *Reflexiones, marcos de antecedentes e ilustraciones,* toda vez que el levantamiento de problemas de estudio se encuentra precedido de intuiciones, de prácticas específicas exitosas, de episodios críticos, entre otros incidentes que pueden dar pie a una investigación. Se informan en el índice del texto los campos de trabajo en matemática educativa a que responden los artículos presentados, a saber: Construcción de Aprendizajes, Epistemología y Estudios Socioculturales, Formación de Profesores, Gráfica y Funciones, Matemáticas en el Contexto de las Ciencias, Medición y Evaluación, Modelos Matemáticos, Pensamiento Algebraico, Pensamiento Estocástico, Pensamiento Geométrico, Pensamiento Matemático Avanzado, Pensamiento Numérico, Pensamiento Variacional, Razonamiento Matemático, Resolución de Problemas, Tic´s en la Enseñanza y los Aprendizajes de Matemáticas.

Esta publicación se deriva de los trabajos de las diversas actividades presentadas en Relme 17, que fueron sometidas a la evaluación acostumbrada en la comunidad Clame (revisión de tres árbitros de nacionalidad e institución distintas a las del autor) y se constituye como "un estado del arte" en nuestra América Latina. Es por ello que de manera natural hemos de referirnos a nuestra Relme 17, Decimoséptima Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, convocada por Clame y realizada la semana del 21 al 25 de Julio de 2003 en la ciudad de Santiago de Chile. Empero, aclaramos que no son las memorias del evento pues, por ejemplo, tuvimos más de 450 trabajos consignados en los Resúmenes de Relme 17, aquí se presentan aproximadamente una cuarta parte de ellos.

De nueva cuenta agradecemos a cada uno de los participantes y ponentes de Relme 17, quienes hicieron posible el evento y sin duda colaboraron a *fortalecer el encuentro entre el saber de aula y el saber de investigación así como potenciar redes de apoyo entre profesores, estudiantes de pre y pos-grado e investigadores* (Resúmenes, pág. 3). Asimismo agradecemos a quienes hacen hoy posible, con sus extensos, la materialización de esta Acta.

Agradecemos la colaboración y orientación ofrecida por los representantes de Clame y del Comité Internacional del Programa. Por su incondicional y fraternal apoyo, vaya nuestro especial reconocimiento para Eréndira Valdez, Eduardo Lacués, Javier Lezama, Marcela Ferrari, Apolo Castañeda y Leticia Sánchez.

Agradecimiento especial merecen los colegas Jorge Ávila, Eduardo Carrasco y Milenka Covarrubias, sin cuyo trabajo, tanto el evento como la edición de esta publicación no hubiesen sido posibles. Nuestro particular agradecimiento al grupo de estudiantes de pregrado de UCSH, el que representamos en los estudiantes Darío González y Pablo Paredero, y, estudiantes de posgrado de Magíster UMCE, que acompañaron la preparación y desarrollo de Relme 17, con su entusiasmo y trabajo perseverante. Agradecemos también a aquellos colegas de nuestro país que en distintos momentos y de diversas maneras nos animaron en su preparación y realización.

Nuestro agradecimiento al trabajo de cada uno de los árbitros que colaboraron con su evaluación a una mejor edición de los artículos de esta publicación. Merecen nuestra especial mención los académicos Carmen Batanero, Antonia Candela, Bruno D'Amore, Ed Dubinsky, Juan D. Godino, Luisa Ruiz Higueras y Carlos Vasco.

Leonora Díaz Moreno
En Santiago de Chile, Otoño de 2004

Comité científico de evaluación

INDICE TOMO I

REPORTES DE INVESTIGACIONES EN CURSO

REPORTES DE INVESTIGACIÓNES EN CURSO

INDICE TOMO II

PROPUESTAS DE ENFOQUES Y METODOS DE ENSEÑANZA

VISIÓN DE CONJUNTO SOBRE ASPECTOS RELEVANTES DE LA INVESTIGACIÓN

Se presentan algunas de las conferencias en matemática educativa realizadas en el marco de la Decimoséptima Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, RELME 17, dictadas por investigadores invitados.

DESARROLLO DEL PENSAMIENTO Y LENGUAJE VARIACIONAL, UNA MIRADA SOCIOEPISTEMOLÓGICA

Ricardo Cantoral Uriza
Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav del IPN, México
rcantor@mail.cinvestav.mx
Pensamiento Variacional

Resumen

La ciencia y su educación están ligadas a prácticas sociales y culturales específicas, sin embargo, las matemáticas, como es bien sabido, se han desarrollado bajo la premisa de que ellas tratan con objetos abstractos, anteriores por tanto a la praxis social y en consecuencia externas al individuo. Esta visión platónica del conocimiento, impregna por igual al quehacer didáctico de nuestros días cuando un profesor "comunica verdades preexistentes" a sus alumnos mediante un discurso; la *forma* entonces, asume esta visión, hará develar más temprano que tarde el significado de los objetos abstractos entre los alumnos. Sostenemos que el conocimiento matemático, aun aquel que consideramos avanzado, tiene un origen y una función social asociados a un conjunto de prácticas humanas socialmente establecidas. Esto no habrá de entenderse en el sentido de que todo conocimiento obedece a una necesidad de naturaleza práctica, puesto que los historiadores y filósofos de la ciencia han documentado suficientemente que algunas nociones matemáticas no provienen de sucesivas abstracciones y generalizaciones de la empiria. Más bien, nuestra tesis tiene una orientación socioepistemológica, puesto que establece una filiación entre la naturaleza del conocimiento que los humanos producen con las actividades mediante las cuales y en razón de las cuales dichos conocimientos son producidos. En este sentido, cabe decir que la premisa inicial que sustenta la orientación de investigación de nuestro grupo de trabajo consiste en asumir que la enseñanza y el aprendizaje constituyen tanto una práctica humana como social, y que el compromiso de la disciplina, la Matemática Educativa, con la práctica educativa de referencia es lo que provee de sentido a su desarrollo. Es así que asumimos que el nombre mismo de *Matemática Educativa* da a nuestra disciplina una ubicación geográfica y conceptual; en el mundo anglosajón, el nombre han dado a dicha práctica es el de *Mathematics Education*, mientras que en la Europa continental le llaman *Didactique des Mathématiques* o *Didaktik der Mathematik*.

En esta ocasión, presentaremos una serie de ejemplos sobre cómo desarrollamos estrategias que favorecen al pensamiento y lenguaje variacional bajo un enfoque socioepistemológico. Este *pensamiento y lenguaje variacional* estudia fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos de la variación y el cambio en el sistema educativo y en el medio social que le da cabida, pone particular atención en el estudio de los diferentes procesos cognitivos y culturales con que las personas asignan y comparten sentidos y significados utilizando para ello diferentes estructuras y lenguajes variacionales. Es a la vez que una ruta de desarrollo, una línea de investigación que posee una orientación múltiple. Pues por un lado se ocupa de estructuras variacionales específicas desde un punto de vista matemático y fenomenológico, en segundo término, estudia las funciones cognitivas que las personas desarrollan mediante el uso de conceptos y propiedades del cambio, en tercer lugar, tiene en cuenta los problemas y situaciones que se abordan y resuelven en el terreno de lo social mediante las estructuras variacionales consideradas en la escuela y el laboratorio.

Presentación

La *socioepistemología*, o epistemología de las prácticas sociales relativas al saber, es una aproximación teórica de naturaleza sistémica que permite tratar con los fenómenos de producción y difusión del saber desde una perspectiva múltiple, pues articula en una misma unidad de análisis a las interacciones entre la epistemología del conocimiento, su dimensión sociocultural, los procesos cognitivos que le son asociados y los mecanismos de su institucionalización vía la enseñanza. Este enfoque, propuesto explícitamente por vez primera en el seminario de investigación en matemática educativa del Área de Educación Superior del Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav IPN en la ciudad de México (conocido ampliamente como *seminario de los jueves*), y en una de las conferencia plenarias de la Research Conference in Collegiate Mathematics Education dictada en la Central Michigan University de EUA, ambas por el autor en el año de 1997, y que ha sido desarrollado, sistemática y ampliamente, en forma cooperativa por una comunidad académica en el curso de la década pasada y se sintetiza en (Cantoral & Farfán, 2003). Con este enfoque socioepistemológico se plantea, desde su inicio, una tesis que aun hoy consideramos *revolucionaria*, pues produjo en la comunidad de matemáticos educativos de esos años, una verdadera ruptura al plantearse una descentración del objeto de estudio como prerrequisito de la acción teórica, se exigió por así decirlo, de un cambio de perspectiva respecto de los enfoques clásicos de la investigación, enfoques entonces dominantes, relativo al problema del conocimiento y a sus vínculos sociales con los factores del aprendizaje y con las circunstancias de su enseñanza institucionalizada.

Al inicio de la década de los ochentas, el artículo de Tall y Vinner (1981) trató el problema del aprendizaje sobre la base de una inteligente metáfora del conocimiento humano, que en cierto sentido explicaba los aprendizajes, o en su caso, las causas de los escasos aprendizajes por parte de los estudiantes universitarios, ante nociones matemáticas como número real, límite, continuidad, series infinitas, función, derivada o integral, explicación basada en la dualidad «*concept image*» y «*concept definition*». Esta centración en las relaciones sujeto - objeto, a la luz de la imagen que se forma el individuo y a la imagen a la que se aspira alcanzar con la instrucción, no cuestionaba en modo alguno la naturaleza del saber matemático puesto en juego, ni su función y origen social, o su relación con otras prácticas de referencia como aquellas del saber cultural, saber instrumental, saber escolar, saber tecnológico o saber artesanal, que antes que conocimiento, son sin duda alguna una organización de prácticas sociales. Nos preguntamos, si las causas de los resultados expuestos por Tall y Vinner y replicados por una gran cantidad de estudios locales, podrían encontrarse en otras razones que atendieran a la naturaleza misma del saber matemático en juego, o a los niveles de su funcionamiento en la vida escolar (Brousseau, 1986), o a las restricciones impuestas por los particularidades del saber matemático en los sistemas de enseñanza y, ahí nacía nuestra tesis fundamental respecto de la naturaleza de las prácticas de referencia y del papel que estas juegan en la construcción y difusión institucional del saber matemático. Saber que no conocimiento, fue un factor propiamente de orden «socio» que fue sistemáticamente ignorado por la literatura especializada, literatura que insistía en suponer que el saber matemático escolar, y sobre todo el universitario, obedece a leyes internas de la matemática per se...

Una reciente referencia hecha sobre nuestra aproximación socioepistemológica se cita en un capítulo escrito por Aline Robert y Natasha Speer, del libro *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level*. En él se dice:

> *The history of calculus has also been looked at from a socioepistemological perspective by other research groups, for instance the research group on advanced mathematics at Cinvestav in Mexico. This group starts with the assumption that the present structure of theoretical mathematical discourse in analysis obscures the essential emprirical sources of the development of the field. Thus, looking at historical development provides alternative ways to introduce and develop knowledge in the field. This is especially necessary if one has in mind not the training of future mathematicians but the training of scientific students and engineers. Such a perspective has been used by Cinvestav in order to study the*

> *learning and teaching of variation, from high school to studies in advanced analysis engineering. They have coordinated mathematical and historical analyses, the socio analysis of the waty variation is dealt with in different professional and social contexts, the cognitive analyisis of learning processes, and didactic engineering designs* (see e.g., Cantoral and Farfán, 1998; Cordero, 1994; Farfán, 1997; Ortega, 2000). A. Robert, p. 285, en (Holton, 2001).

De este modo, el enfoque socioepistemológico inicia con una mirada crítica de las tradiciones formalistas y de los enfoques clásicamente constructivistas de aquellos años. Señala que ni el primero, el formalista, con su habitual centración en el problema del conocimiento desde el punto de vista de los fundamentos o de la estructura lógico formal, ni tampoco el segundo, el constructivista, que si bien relativisa el asunto de la lógica de la demostración y se coloca al nivel de las heurísticas o lógicas del descubrimiento, no abandonan, ninguno de ellos, su predilección por tomar como centro de sus metáforas teóricas al conocimiento matemático en sí. Una especie de cogno-centrismo matemático. De este modo, los formalistas se ocuparon de estudiar a profundidad las relaciones asociadas con la afirmación $p \to q$ en la que p y q podrían ser propiamente la hipótesis y la tesis de una implicación lógica, aunque también podría representar los papeles respectivos de antecedentes y consecuentes en una secuenciación temática de estudios. En ambos casos, su preocupación mayor se ubicaría en el carácter de las implicaciones válidas. El análisis minucioso que llevara a cabo el programa formalista, ubicó en consecuencia al nivel de las inferencias lógicas al conocimiento y se ocupó en detalle de la cuestión de los fundamentos. Por ejemplo, tanto sus programas educativos como sus libros de texto y sus sistemas de evaluación del aprendizaje, en tanto formas culturales de difusión del saber, usan verbos en los que reflejan con cierta claridad la visión que los acoge: verbos como *demostrar*, *aplicar*, *calcular*, *deducir*, *verificar*,... De modo que difunden una noción de la matemática escolar centrada en su carácter lógico y estructural, desde el punto de vista de la axiomática.

Veamos una escena hipotética, típica de este enfoque, que discute una presentación de la ecuación de la línea recta en una clase de matemáticas. Imaginemos por ejemplo que se trata de la clase de geometría analítica o de precálculo en el bachillerato.

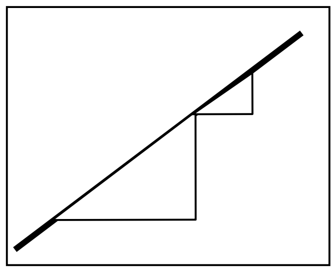
Profesor: Vamos a encontrar la ecuación de la línea recta que pasa por los puntos A, de coordenadas (0, 1) y B, de coordenadas (2, 3). [El profesor dibuja sobre el pizarrón una línea recta en el plano cartesiano pasando efectivamente por A y B, coloca enseguida dos etiquetas: A(0, 1) y B(2, 3)]

Alumnos: ... murmullos... [Los alumnos trazan en sus cuadernos el dibujo de la recta AB y copian las etiquetas que hizo su maestro... levantan la mirada para no perder la siguiente acción física de su profesor]

Profesor: Ahora tomemos un punto arbitrario P sobre la recta que tendrá coordenadas (x, y) [elige P sobre la recta AB, de suerte que quede a la derecha y más arriba que B]

Alumnos: ... murmullos... [quizá su duda esté puesta en el carácter arbitrario de P, o en sus coordenadas, empero los alumnos copian en su cuaderno sobre la recta AB al punto P y colocan su etiqueta ... levantan la mirada para detectar nuevamente cuál es el siguiente movimiento... En este momento él dibuja un par de triángulos rectángulos como se exhibe a continuación y sobre los que reconocerá la proporcionalidad de los lados]

Profesor: Ahora, por el teorema de Thales, se tiene que los triángulos rectángulos semejantes tiene entre sus lados razones de igualdad, esto es: $\frac{y-3}{3-1}=\frac{x-2}{2-0}$, de donde se sigue por, álgebra elemental, que $y=x+1$. [Los alumnos saben a este momento que lo verdaderamente importante es la fórmula obtenida y no la deducción, ya que la fórmula será usada en la resolución de los problemas, en las tareas para la casa, en los exámenes; mientras que la deducción sirvió sólo al profesor al momento de explicar a los alumnos]



Reproducción exacta del pizarrón

En este episodio el profesor supuso que la proporcionalidad, derivada de la semejanza, es una propiedad bajo el control del estudiante y supuso además, si bien inconscientemente, que la noción de pendiente, como una propiedad invariante de la recta está estabilizada en la mente de sus estudiantes. Estudios recientes, muestran lo inexacto de este punto de vista, pues si preguntamos a los estudiantes si es cierto o falso que $\frac{CA}{AB}=\frac{DE}{EB}$, si el triángulo ABC, tiene al segmento DE paralelo a CA como se muestra a continuación, es decir con DE puesto aproximadamente al centro del lado AB: Entonces la mayoría de los alumnos recuerdan el teorema de Thales, lo reconocen y dicen que sí, en efecto se cumple la proporción referida $\frac{CA}{AB}=\frac{DE}{EB}$, pero (y aquí está la primera gran sorpresa) si se pinta el segmento DE mucho más pequeño y cerca al vértice B, la proporción de respuestas correctas baja, pues algunos estudiantes dudan que se siga cumpliendo la igualdad anterior y prefieren decir más bien que ahora se cumple $\frac{CA}{AB}>\frac{DE}{EB}$ o bien $\frac{CA}{AB}<\frac{DE}{EB}$ dependiendo de si centran su atención sólo en el tamaño de uno de los segmentos, DE (muy pequeño) o EB (muy pequeño) y en el rol respectivo que juega en el cociente anterior.

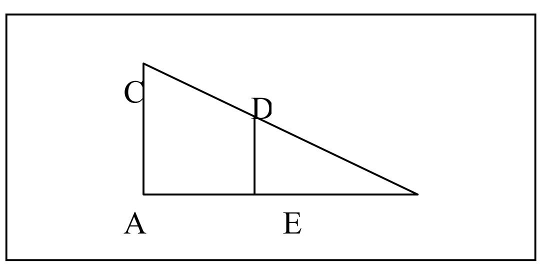


Diagrama típico de Thales

Este enfoque suele dejar bajo la responsabilidad del profesor, la elección de los ejemplos, las herramientas, los argumentos, las estrategias de acción y de explicación, los ejemplos, los tiempos de "enseñanza" así como la elaboración o selección de las actividades complementarias, sin sentir la necesidad de valorar los estilos y tiempos de aprendizaje de sus alumnos, y sin tomar en cuenta si ya las nociones de pendiente, invariante representativa de la y la proporcionalidad son estables entre los alumnos.

Bajo este enfoque, no se discute la importancia de preparar a los estudiantes para entender mejor las matemáticas, ni como usarlas para comunicarse con ella a lo largo de su vida. Aunque dicha labor es muy difícil, se elaboran sin embargo la currícula de los conceptos fundamentales produciendo nuevos materiales didácticos y diseñando nuevas unidades de enseñanza basadas en una especie de "sentido común matemático" o más propiamente en la lógica deductiva, empero no logrado una mejor comprensión de las matemáticas por parte de la mayoría de los estudiantes. La falla de estos esfuerzos hizo que se elaboraran preguntas sugiriendo que lo que ha faltado establecer a esas propuestas, diseños y producciones es un mayor conocimiento del fenómeno del aprendizaje y de la enseñanza de las matemáticas dado que este es un acto social, cultural, política, y económicamente establecido y justificado por instituciones educativas.

Esta situación abonó el camino para que emergieran los programas en matemática educativa de corte constructivistas y socioepistemológico. Pues por cuanto toca a los enfoques constructivistas, ellos negaron de entrada la tesis central del programa anterior, pues si bien no se planteaban de inicio la cuestión implicativa de $p \rightarrow q$, si lo hacían de término, al final de sus acciones. Su estrategia, basada en el programa del empirismo lógico y de la falsación como método, planteaba como centro de la reflexión un deslizamiento de la pregunta anterior, una especie de heurística, una conjetura, ¿ será $p \rightarrow q$?, aceptan otra posibilidad, estudian la cuestión plausible ¿ $p \rightarrow \sim q$? o quizá aceptan que ni q ni $\sim q$. ¡Viva la conjetura! Este programa planteó la incorporación de la visión del alumno con mayor fuerza tanto al nivel de las propuestas escolares como al de la visión del quehacer matemático en sí. Pues serían las acciones constructivas del estudiante las guías de la actividad didáctica. Se pasó del profesor al facilitador, de currícula rígida a flexible...

Por su parte, el enfoque socioepistemológico inicia con una mirada crítica, a la vez que busca una ampliación en la mira de los enfoques constructivistas. Señaló entonces que el constructivista, que suaviza los asuntos lógicos en la demostración y se coloca en el plano de las heurísticas, no abandona su predilección por centrarse en las metáforas teóricas del conocimiento matemático en sí. Pues ahora se tendría una especie de heuri-centrismo matemático. Es así que mientras los constructivistas se ocuparon de estudiar a profundidad las relaciones asociadas con la falsación de la afirmación $p \rightarrow q$ en la que p y q serían la hipótesis y la tesis de una implicación lógica, o de significar por ejemplo los papeles de antecedentes y consecuentes en los ordenamientos temáticos de un curso. Su preocupación se situó en el carácter de plausibilidad de las conjeturas. El análisis minucioso en consecuencia, se ubica al nivel de las inferencias plausibles y en la cuestión de los razonamientos factibles. Tanto sus programas educativos y sus libros de texto, en tanto formas de difusión del saber, usan verbos en los que reflejan con cierta claridad la visión que los acoge: verbos como *conjeturar*, *establecer*, *hipotetizar*, *estimar*, *desestimar, verificar*, *bosquejar*, *representar, modelar* ... De esto modo, difunden una noción de la matemática escolar que se centra en su carácter heurístico y funcional.

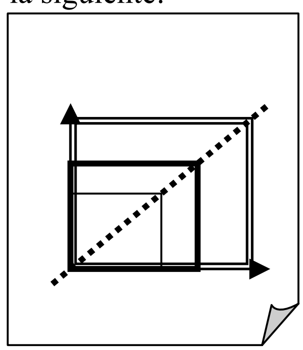
Veamos una escena hipotética, típica de este enfoque que va discutir una presentación de la ecuación de la línea recta en una clase usual de matemáticas. Imaginemos por ejemplo que se trata de la clase de geometría analítica o precálculo en el bachillerato.

Profesor: Consideren la siguiente situación... se colocan un papel cuadriculado con un par de semi rectas perpendiculares [los alumnos reciben el papel, dos escuadras y varias plumas para realizar las acciones indicadas]

Alumnos: Platican entre ellos, preguntan al profesor y esperan más información para decidir cuáles serán las acciones usando las herramientas...

Profesor: Construyan varios cuadrados con vértice en el cruce de las semirrectas, pero que dos de sus lados queden sobre ellas [los alumnos discuten cómo hacerlo y comunican sus ideas entre sí, plantean sus dudas al equipo y resuelven el dilema...]

El profesor espera que entre sus conjeturas aparezca el que la razón entre los lados de los cuadrados es constante para indicar en algún momento que eso se llamará la pendiente de una recta y... Al momento de esta escena, el profesor espera que "vean una regularidad" entre los lados de los cuadrados, que tienen a la misma diagonal, así que ellos habrán hecho construcciones como la siguiente:



Réplica de la hoja tamaño carta

Se supone que la noción de razón entre los lados emerge de sus diálogos, el maestro entonces nombra a ese número como la pendiente de la recta diagonal... Naturalmente estamos sobre simplificando la situación con la intención de señalar dos aspectos: el carácter situado de las experiencias matemáticas que se emplean en la situación y su nula o escasa vinculación con otras prácticas de referencia.

Por su parte, el enfoque socioepistemológico, siguiendo con la escena de implicaciones, no se ocupan de estudiar en profundidad las relaciones asociadas con las afirmaciones $p \rightarrow q$ o $p\rightarrow \sim q$ en las que p y q podrían ser propiamente la hipótesis y la tesis de una implicación lógica o también representar papeles de antecedentes y consecuentes en una secuenciación temática de estudios o de acciones del alumno. Sino se ocupa de problematizar el saber, se pregunta ¿ p ? ¿será p el punto de partida? ¿de dónde proviene p? En este caso, se ocupan en *desnaturalizar* o *desmatematizar* el saber matemático al aceptar que antes que hablar de p, habrá que hacerlo sobre un complejo de prácticas, de naturaleza social, que den sentido y significado al saber matemático escolar, se acepta en esta visión que tales prácticas puedan ser propiamente externas a la matemática. La noción de práctica que se emplea es cercana a la noción de hegemonía, coerción, consenso, y en tal sentido nociones como uso y costumbre adquieren un papel central. El análisis minucioso se lleva a cabo bajo el programa socioepistemológico al nivel de las prácticas de referencia y sobre el paso del conocimiento al saber. Por ello sus primeros intentos de organización educativa tanto al nivel de sus texto como de sus programas de formación de profesores, en tanto formas culturales de socialización del saber, usa verbos en los que reflejan su visión: *predecir, argumentar*, *gestuar o actuar*, *anticipar*, *compartir*, *difundir*, *consensar, estabilizar*, *acumular, promediar*,... De modo que difunden una noción de la matemática escolar centrada en el uso social y la funcionalidad asociada.

Puede plantearse cuestiones del tipo, cuáles son las prácticas que permiten a los seres humanos percibir y socializar las variaciones de orden superior, ¿una, dos y tres? Veamos la siguiente tabla:

CÁLCULO	FÍSICA	GEOMETRÍA	COTIDIANO
$f(x)$	Posición	Ordenada	Estatura: Pequeño, mediano, grande
$f'(x)$	Velocidad	Pendiente	Noción de crecimiento
$f''(x)$	Aceleración	Concavidad	Cantidad de crecimiento
$f'''(x)$	¿?	¿?	¿?

Relación de correspondencias funcionales, ¿y la tercera?

Diseñamos por ejemplo para este fin, una estrategia didáctica. Les proponemos una colección de gráficas idénticas, como la gráfica que produce una función polinomial de grado seis con tres puntos extremos. Les pedimos utilizarla para cada inciso, al marcar sobre la porción que cumpla una de las siguientes opciones: $f(x) > 0$, $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$, y finalmente $f'''(x) > 0$. Se espera que sus respuestas indiquen qué estrategias variacionales utilizan y las formas cómo argumentan su elección frente a sus compañeros. Comprobamos, que la pregunta más compleja resulta ser la última, pues es ahí donde se exige el uso de estrategias variacionales como única posibilidad de solución al problema.

Problema 1. Marca sobre la gráfica de la función descrita arriba, la porción que consideres cumple con la condición $f(x) > 0$

En este caso, los estudiantes recuerdan, basados en su enseñanza previa, que la ubicación en los cuadrantes I, II, III y IV determina el signo de la imagen de la función; de modo que las ordenadas positivas estarán en los dos primeros cuadrantes, mientras que las negativas en los restantes. De ahí que contesten esta cuestión con relativa facilidad.

Problema 2. Marca sobre la gráfica de la función descrita arriba la porción que consideres cumple con la condición $f'(x) > 0$. En este caso, los estudiantes, en esta oportunidad, confunden con frecuencia el signo de la derivada con el de la función, o en otro caso, recuerdan que las pendientes de las tangentes a la curva determinan el signo de la derivada, de modo que se tendrá para pendientes positivas correspondientes derivadas positivas. Este cambio de registro, la pregunta planteada en el contexto simbólico con apoyo visual, y la respuesta construida en el contexto visual, resulta mucho más complicado para los estudiantes y ello se expresa en dos sentidos, por un lado la proporción de respuestas acertadas es baja y por otro las explicaciones que utilizan son escasas y evidentemente escuetas.

Problema 3. Marca sobre la gráfica de la función descrita arriba la porción que consideres cumple con la condición $f''(x) > 0$. Como podíamos prever, ahora la situación resultaría más compleja. Pues exige de niveles progresivos de abstracción. El recurso dominante en las respuestas de los alumnos, resulta ser la memoria. Puesto que ellos suelen recordar que la segunda derivada positiva se corresponde con la concavidad hacia arriba, en tanto que la concavidad hacia abajo está asociada con la segunda derivada negativa. Aún que no dispongan de explicación alguna para confirmar su razonamiento, pueden contestar a la pregunta. A juzgar por el análisis que hemos hecho de sus respuestas no se desprende la existencia de algún otro argumento que permita enfrentar la situación planteada. De hecho, es usual entre los alumnos disponer de un método mnemotécnico para establecer estas correspondencias, "es cóncava hacia arriba entonces retienen mas agua, si lo es hacia abajo retendrá menos agua, de hecho tirará el agua". Este símil con una cubeta llena de agua puede aparecer como una estrategia para refrescar la memoria. Naturalmente ello no parece implicar estrategias propiamente variacionales. La última de las cuestiones ponía en evidencia este hallazgo, pues se trata de una situación en la cual no es posible recordar algún conocimiento previo, pues el tema no ha sido tratado en su enseñanza convencional.

Problema 4. Marca sobre la gráfica de la función descrita arriba la porción que consideres cumple con la condición $f'''(x) > 0$. Esta pregunta suele plantear un reto especial, tanto a los estudiantes como a los profesores, pues aunque entienden efectivamente el enunciado del problema, no pueden construir una respuesta que les parezca convincente. Esta dificultad se agudiza si en la pregunta elevamos el orden de la derivada involucrada, dado que se carece de elementos cognitivos y didácticos que les permitan construir una respuesta adecuada. Consideramos que es hasta este momento en que ellos se encuentran en situación de aprendizaje, ya que la serie de tareas anteriores les permiten, aunque fuese sólo con recursos mnemotécnicos, dar una respuesta a las preguntas planteadas. Empero la cuarta cuestión plantea una problemática no prevista por ellos, el éxito en la pregunta radica en poder descifrar los códigos variacionales y articularlos en signos variacionales, pues la respuesta habrá de ser construida. En este momento, los estudiantes y los profesores suelen entrar en una situación de aprendizaje muy rica. Sólo quienes han dominado algunas de las estrategias del pensamiento y el lenguaje variacional pueden abordarla eficazmente. Hemos concluido, en este sentido, que el manejo simultáneo y coordinado de las derivadas sucesivas parece ser una condición sin la cual la formación de la idea de derivada y en consecuencia de la noción de predicción deviene inevitablemente frágil. Para ello es que hemos propuesto y explorado un tratamiento didáctico (ver en Cantoral y Montiel, 2001).

Conclusión

En síntesis, consideramos que el saber matemático se ha constituido socialmente en ámbitos no escolares y su introducción al sistema de enseñanza le obliga a una serie de modificaciones que afectan directamente su estructura y su funcionamiento. Requiere de la formación de *consensos*, de la *persuasión*, de la búsqueda de *legitimidad* y *validez* del *discurso*, en síntesis de una *ideología*. El pensamiento y lenguaje variacional, desde la perspectiva socioepistemológica, estudia fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos propios de la variación y el cambio en el sistema educativo y en el medio social. Pone atención en el estudio de los procesos cognitivos, culturales, históricos e institucionales con que las personas asignan y comparten sentidos y significados utilizando diferentes estructuras y lenguajes variacionales, investigación que posee una orientación múltiple. Se ocupa de estructuras variacionales específicas desde un punto de vista fenomenológico, estudia funciones cognitivas que se desarrollan mediante el uso de conceptos y propiedades matemáticos del cambio, y tiene en cuenta los problemas y situaciones que se abordan en el terreno de lo social mediante estructuras variacionales consideradas en la escuela y el laboratorio.

Bibliografía

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 7(2): 33 – 112.

Cantoral, R. et Farfán, R. (2004). Sur la sensibilité a le contradiction en mathématiques; l'origine de l'analyse complexe. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 24(2): texto por aparecer.

Cantoral, R. & Farfán, R. (2003). Mathematics Education: A vison of its evolution. *Educational Studies in Mathematics*. 53(3): 255 – 270.

Cantoral, R. y Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Epsilon*, No. 42, 353 – 369.

Cantoral, R. y Montiel, G. (2001). *Funciones: Visualización y pensamiento matemático.* México: Prentice Hall.

Holton, D. (Ed.). (2001). *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level*. An ICMI Study. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics* 12: 151 – 169..

CONSTRUYENDO RELACIONES BENÉFICAS ENTRE IMAGINARIOS CULTURALES Y APRENDIZAJES MATEMÁTICOS

Leonora Díaz Moreno
Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación, Chile
leonorad@entelchile.net

Resumen
El desafío de democratizar los saberes de la modernidad, en particular, de lograr entendimientos matemáticos significativos en orden a empoderar a la mayoría de nuestros ciudadanos, resta inconcluso de cara a las demandas que plantea el proceso globalizador en marcha en las sociedades de nuestra América Latina, cuyos cimientos se constituyen sobre mixturas de premodernidad y modernidad. Vemos por ejemplo que la extensión de la educación formal en varios de los países latinoamericanos ha reducido a niveles mínimos las estadísticas de analfabetismo básico, no obstante en esos mismos países ha aparecido un "analfabetismo matemático" que se expresa en que una gran mayoría de ciudadanos en la región no puede resolver problemas sencillos de matemática tales como: leer gráficos que ilustran situaciones de delincuencia, tendencias económicas, intereses de créditos, descuentos porcentuales de sueldos, costos de planes de salud o elección de fondos previsionales, a pesar de la certificación de los procesos de enseñanza llevados a cabo, en poblaciones que ostentan hasta diez y más años de escolaridad en promedio. Lo educativo refiere a procesos de largo aliento, a un sistema educativo que aprende, a una sociedad que aprende, a docentes e investigadores que aprendemos y entonces ¡a estudiantes que entienden matemáticas! El corazón de nuestra tarea como profesionales de la matemática educativa, es elaborar lo propio y apropiado al mundo de nuestros estudiantes, mundo complejo y abigarrado que demanda a nuestros entendimientos. Compartimos la afirmación que distingue la matemática misma de la matemática educativa y de la matemática escolar. Añadimos a esos saberes, los saberes culturales, los cuales constituyen cuerpos de conocimientos con una naturaleza propia y que ingresan al aula más o menos invisibles para sus protagonistas, favoreciendo u obstaculizando los entendimientos de los saberes matemáticos escolares.
¿Cómo dar visibilidad a estos saberes? ¿Cómo construir relaciones benéficas con aquellos del aula? Procuramos responder a estas preguntas desde una racionalidad alternativa de aquella racionalidad analítica que opera por la división del campo en subcampos menores, que pueden ser más fácilmente abarcados y, así, entendidos y representados. La metáfora del rizoma (tallo horizontal y subterráneo como el del lirio común) nos hace pensable una multiplicidad de cuerpos de conocimientos ni compartimentados ni necesariamente jerárquicos, a diferencia de los esquemas de mapas conceptuales y redes cognitivas usados en la enseñanza para favorecer la construcción de esquemas mentales en los que se cristalizan nuevos entendimientos. En esta presentación se ilustran primeros resultados en la búsqueda de filiaciones y rupturas entre imaginarios culturales y nociones escolares de variación, así como primeras aproximaciones a las estructuras de esas representaciones. Noción relevante toda vez que ella se encuentra a la base del desarrollo científico tecnológico de la modernidad, esto es, cuantificar variaciones en los procesos para predecir y controlar.

Antecedentes
Los bajos logros de los aprendizajes matemáticos, que persisten en los estudiantes y en las estudiantes, mantienen viva en nuestra agenda la tarea – que se vuelve más urgente con la necesidad de cada país de incorporarse a los procesos de globalización con identidad y autonomía – de profundizar en la indagación de aspectos que afectan las posibilidades de logro de tales aprendizajes. Dados los resultados de la investigación didáctica, que señalan a la enseñanza y los aprendizajes de nociones matemáticas como procesos de largo aliento –algunos del orden de tres años en tanto que otros bordean los diez años- se requiere indagar en las representaciones de nociones matemáticas escolares según ellas se van manifestando, ya desde una década anterior a la formación profesional.
El Programa de Investigación de las Ideas Previas se planteó en sus inicios el propósito de que los profesores conocieran qué ideas, qué esquemas tienen los estudiantes de las nociones científicas para que los docentes las sustituyesen por las nociones del currículo

escolar. Así, no obstante que el propósito del Programa fue aportar con los resultados de las indagaciones al esfuerzo docente por el cambio de conceptos, transcurridos quince años de investigación, que revelan la robustez de las ideas previas del estudiantado, perdurando estas más allá de su formación profesional, el Programa reflexiona y dice: *No, no se trata de un reemplazo. Más bien intentemos un diálogo.* Pero ¿quiénes van a dialogar? Las maneras de entender la matemática en la vida cotidiana con las maneras de entenderla en la escuela, en la asignatura de la matemática escolar. Y ¿Cómo vamos a hacer dialogar aquello que el profesor de matemática sabe de los modelos de matemática que él va a enseñar, si desconoce cómo es que pensamos cotidianamente de la matemática fuera del aula en nuestra vida diaria y, en particular, cómo es que sus estudiantes la visualizan? La inquietud nuestra es indagar cuál es la estructura de las representaciones, cuáles son los modos de pensar cotidianamente distintas nociones con mayor o menor relación a las nociones matemáticas escolares.

Por su parte el Programa Latinoamericano de Pensamiento y Lenguaje Variacional se ocupa de la variación[1] (Cantoral y Farfán, 1998). ¿Qué significa esto? Estudia para hacer enseñables las matemáticas que tengan que ver con la variación ¿Para qué queremos manejar la variación? Galileo lo hace. Newton lo hace ¿Por qué? En ciertas situaciones necesitamos conocer el valor que tomará una magnitud con el paso del tiempo. Se requiere determinar entonces el valor que tomará la variable dependiente antes de que la variable independiente pase del estado uno al estado dos. Pero a causa de nuestra imposibilidad de adelantar el tiempo a voluntad debemos predecir. En tal caso, no disponemos de razones para creer que el verdadero valor buscado esté distante de las expectativas que nos generan los valores en un inicio, de la forma en que ellos cambian y cambian sus cambios, y así sucesivamente. Nuestro interés es que se aborden en el aula modelos matemáticos de variación, los cuales, según muestra la investigación, requieren ser estudiados por largos períodos de tiempo. Por ende su aprendizaje se favorece trabajando esos modelos matemáticos hilvanados, entretejidos a lo largo de su vida escolar. Buscamos conocer las voces cotidianas de la variación para ponerlas en diálogo con las voces matemáticas y ver en qué medida nos pueden ayudar a sintonizar aquellas coherencias del contenido matemático con las coherencias cognitivas de las personas de modo que se favorezcan los entendimientos y sea una experiencia grata abordar el estudio y apropiación significativa de las matemáticas que operan con los fenómenos de variación.

¿Cómo miramos los saberes cotidianos y los saberes escolares en la investigación?

La actividad matemática como una actividad humana se aborda desde un conjunto de creencias portadas por las comunidades de investigadores según señalan sociólogos, historiadores y filósofos del conocimiento. Asimismo a la actividad del aula se incorporan profesores y estudiantes con sus creencias, parte de las cuales se vinculan a sus saberes prácticos y su desenvolvimiento en la cotidianidad. Hay unas creencias de los profesores que tienen que ver con su quehacer profesional, indagadas por el "Programa de Pensamiento del Profesorado". Para el diseño y el trabajo en el aula, el profesorado necesita saber lo que se ha venido construyendo sobre saberes matemático educativos, es

[1] Este programa se ocupa de estudiar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática de la variación y el cambio en los sistemas didácticos que le dan cabida, atendiendo a una aproximación sistémica que permita incorporar las cuatro componentes fundamentales en la construcción del conocimiento: su naturaleza epistemológica, su dimensión sociocultural, los planos cognitivos y los modos de transmisión vía la enseñanza

decir, esos saberes que procuran llevar al aula de manera entendible unas matemáticas que no fueron hechas para ser enseñadas ni fueron hechas para ser aprendidas sino que primero buscaron resolver problemas. ¿Qué relación pueden tener esas matemáticas con nuestros modos de entender? La disciplina de la matemática educativa se preocupa de hacer entendibles esas matemáticas, construyendo las mediaciones sobre la base de un currículo explícito -los objetivos fundamentales y contenidos mínimos de nuestro país por ejemplo- así como estudiando los currícula vividos en las aulas y aquel curriculum implícito en las prácticas con las matemáticas escolares.

Además de un adecuado conocimiento de tres tipos de saberes: matemático, matemático educativo y matemático escolar, nosotros creemos que también tenemos que manejar los saberes culturales, esos saberes que van emergiendo en los diversos espacios a los que van concurriendo en su *irse haciendo* las personas. ¿Cómo estamos entendiendo los saberes culturales? Los entendemos como cuerpos de conocimientos que tienen naturaleza propia, que ingresan al aula sin conciencia de los protagonistas y que manifiestan gran resistencia a su modificación. Buscamos dar visibilidad a estos saberes culturales para proponer relaciones benéficas alternativas, desde una mirada que nosotros llamamos cualitativa. Para organizar y comunicar representaciones del conocimiento los docentes e investigadores disponemos de diversidad de técnicas, entre ellas mapas conceptuales y redes cognitivas. Tales esquemas no son neutros, encierran potencialidades diferentes. En efecto, el esquema mapa conceptual cristaliza de modo preferente *cómo el saber científico se ordena en este tema, hoy día*. Según lo presentaran Novak y Gowin[2], se trata de diagramas conformados por rectángulos y conectores unidireccionados, con niveles de lo más general a lo particular, y, son jerárquicos. Tales esquemas comunican un saber ya formalizado. Por su parte, la técnica de la red cognitiva favorece un desplazamiento en el foco de interés didáctico. El diagrama esta vez se compone de óvalos, ya no son rectángulos de aristas en punta, sino óvalos de formas suaves. Los conectores entran y salen y se pueden cruzar entre sí. No hay niveles desde un más a un menos importante, y, entonces, podemos decir que una red conceptual es un mejor instrumento para dar cuenta del entendimiento que la persona está teniendo de ese tema y no de lo que la Ciencia, por una cantidad relevante de años de ciencia normal, considerará que es el saber válido en un ámbito específico. Así por ejemplo, respecto de la energía ($E = mc^2$) su mapa conceptual va a ser muy parecido en Polonia, en Chile y en la India, pues es un dato externo a la persona. En tanto, una red conceptual tratará de expresar qué está entendiendo la persona, qué conexiones hace cada estudiante de un aula, en ese tema.

Hoy en día, para comunicar saberes en Ciencias Humanas y difundir modos de generar saber en las comunidades de investigadores, aparece pertinente la metáfora del rizoma. ¿Qué es un rizoma? Un tallo horizontal y subterráneo como el del lirio común. No dice mucho todavía, pero veamos, qué pasa con este tallo que es subterráneo. Cada tallo genera nódulos y de esos nódulos salen raíces y esas raíces se entretejen con raíces aledañas, tal y como fueron aprovechadas por los aztecas, quienes construyeron su ciudad sobre un lago. Esta acción fue tan exitosa, que en la actualidad en Ciudad de Méjico viven 25 millones de personas[3]. Entre otros elementos aprovecharon tallos subterráneos del tipo de los llamados

[2] Novak, J.D. y Gowin, B.(1988): Aprendiendo a Aprender, Martínez Roca, Barcelona.

[3] Con el correr de los siglos la población de Ciudad de México obtiene sus terrenos de asentamiento de dos modos principalmente. Por una parte, por la construcción de chinampas, sembradío artificial sobre el agua. Los Xochimilcas, pobladores dedicados a la agricultura, formaban del mismo cieno de la laguna sementeras andantes para sus sembradíos.

"rizomas" y aprovecharon el entrelazamiento que estos tallos hacen entre ellos subterráneamente, colocando otras materias y generando tierra, pero desde un lago. Esta metáfora sirve para mostrar que lo que se puede construir sobre un tejido con esa trama, puede ser muy sólido. Es parecido al entrecruzamiento de múltiples saberes: científicos, cotidianos, saberes profesionales, saberes de las distintas culturas.

Y es la metáfora misma la que cobra fuerza de herramienta específica para el análisis de textos y discursos en manos de los científicos sociales. Al decir de Lizcano (1999) "*el estudio sistemático de las metáforas puede emplearse como un potente analizador social*". O en términos de los autores del libro "¿De dónde vienen las matemáticas?" (Lakoff y Núñez, 2000): "*Lo esencial es que en la base de las ideas y de la construcción conceptual se encuentran las experiencias corporales, tales como experiencias térmicas (ella es una persona fría), dinámicas (el dólar subió varios puntos), kinestésicas (me llenó la cabeza con ideas estúpidas), olfativas (esta situación me huele mal), entre otras. Todo sistema conceptual, incluso los más abstractos, como aquellos que constituyen las matemáticas, se crean y se realizan gracias a mecanismos cognitivos elementales, entre ellos las metáforas conceptuales*". Abunda Lizcano (op. cit., 1999) "*la lógica a que obedecen las metáforas – y por lo tanto, la de los conceptos científicos que ellas animan – es una lógica social (...) una actividad en la que se trasluce el contexto y la experiencia del sujeto de la enunciación (...) sujeto concreto –histórica y socialmente situado, que se dirige a un oyente concreto (...) quien para construir sus conceptos y articular sus discursos, selecciona unas metáforas y desecha otras en función de factores sociales –presupuestos culturales, intereses o aspiraciones de grupo o clase, alianzas o exclusiones, características de los destinatarios, prestigio social de los discursos que son fuentes de los préstamos metafóricos...* " .

Es desde esta mirada epistemológica de la complejidad que buscamos entender el saber cotidiano respecto de la variación, entretejido con saberes escolares, socioculturales y de las matemáticas, indagando desde y para intervenir en aquella complejidad, en orden a lograr profundizar los aprendizajes en el campo del pensamiento y lenguaje variacional.

Investigaciones cualitativas muestran cómo ciertas nociones cotidianas están jugándose inconscientemente en el entendimiento de los estudiantes, constituyéndose en obstáculos socioculturales para los aprendizajes (Díaz, 1999). El problema que se propuso uno de los estudios (Díaz, op. cit.) fue determinar concepciones y esquemas de acción, con las que los estudiantes abordan el aprendizaje del concepto de límite, a propósito de su enseñanza por parte del profesor, en un contexto de clase masiva de introducción al cálculo universitario. De este modo, entre sus objetivos específicos se planteó el de identificar con qué concepciones abordan los alumnos de carreras de ingeniería los procesos de enseñanza y de aprendizaje del concepto matemático de límite. En el marco de un análisis estructural y sobre la base de las voces estudiantiles para la noción de límite, se determinaron los ejes categoriales de *Evolución versus Restricción* y *Dentro de las normas versus Fuera de las normas*. El cruce de ejes generó cuatro imágenes posibles de mundo a visualizar por los jóvenes, a saber, un primer mundo de *VIDA SEGURA,* un segundo mundo de *VIDA MARGINAL,*

Se plantaba el árbol Ahuéxotl o Ahuejote a la orilla de la Chinampa para afianzarla o dividirla aprovechando sus tramas de raíces en forma de rizomas. Por su forma del ramaje, los rayos del Sol penetraban perfectamente sobre el terreno sembrado. Al cabo de cinco o seis años, la chinampa se asentaba sobre el fondo de la ciénega. Por otra parte, a partir del siglo XVII, comenzaron a construirse obras de drenaje de tamaño y complejidad crecientes, con el objeto de librar a la ciudad del riesgo de inundaciones y de secar el lodoso subsuelo del fondo del lago.

un tercer mundo *de ATLETAS*, y, un cuarto mundo *de PROFETAS*. ¿Dónde se ubicaron las textualidades de los estudiantes? Mayoritariamente se representaron en el primer mundo, *VIDA SEGURA*, evitando a toda costa el segundo, *VIDA MARGINAL,* y, aceptando que algunos (los menos) accedan al tercer mundo, de *ATLETAS,* en tanto que aquellos con talante de apóstoles aceptarán su ubicación en el cuarto mundo, de *PROFETAS*. Cabe reflexionar por los obstáculos de orden socio-culturales que emergen desde estas acepciones. ¿Se alcanza el límite? ¡No, si el costo atañe a la vida misma o su calidad! Desde la microsubjetividad de los estudiantes se visibilizó otra fuente de obstáculos a los aprendizajes que viene a añadirse a los referidos por la literatura – a saber, obstáculos didácticos, cognitivos y epistemológicos - y que pudiésemos llamar obstáculos de orden cultural. Ellos están impactando en los magros logros de apropiación que se exhiben en los aprendizajes relativos al concepto de límite de la matemática superior.
En la línea de objetivar este tipo de saberes -invisibles por ahora a nuestros ojos- es que se busca respuesta a la pregunta ¿Cuáles son los modos de pensar y las maneras de operar con la variación en la cultura cotidiana del estudiantado? Un estudio en marcha[4] se plantea determinar la estructura y contrastar las representaciones de la variación tanto cotidianas como aquellas de las que se apropian los estudiantes y las estudiantes en la escuela. Aborda la pregunta por aquellas facetas tanto congruentes como contradictorias de las representaciones cotidianas de variación y de las representaciones de variación de las matemáticas escolares, que favorecen u obstaculizan los aprendizajes tendientes a la formación de un pensamiento variacional en los estudiantes y las estudiantes. A partir de ese conocimiento se propone validar secuencias didácticas las cuales contemplen a la variación como una temática transversal que pueda imbricar distintos contenidos escolares de ciencia experimental y de matemática.

Resultados iniciales.
Representaciones cotidianas de la variación en estudiantes de secundaria. Con grupos de estudiantes de los niveles de octavo y décimo año de escolaridad se buscó responder a la pregunta *¿Con qué representaciones abordan los alumnos y las alumnas de los cursos de octavo año y décimo año de escolaridad, los procesos de enseñanza y de aprendizaje de nociones variacionales comprometidas en conceptos de matemática?* usando las técnicas de encuesta -por medio de un cuestionario- y grupo de discusión. Cada vez que se preguntó a los estudiantes por variación, respondían mayoritariamente usando en su lugar la palabra cambio. Es decir, los investigadores hablamos de variación y los estudiantes hablan de cambios. Ilustramos con dos textualidades esta asociación:

En la vida donde esté, variación siempre va a ser cambio, eso ya está establecido, un cambio.
Cambio y sin igualdad.

Los sinónimos de variación a que aluden los estudiantes se agrupan en acepciones. Las más frecuentes en el octavo año son las de {cantidad, agrupación, harto, varias cosas, muchos estilos}, {diversidad, alternativas, elegir, escoger} y {diferencia, distinto: dual, discreto}. En el décimo año se enuncian preferentemente las acepciones de {irregular, inconstante, inestabilidad} y {transformación, cambio, cambiar, variable}. En el conjunto de las acepciones se presentan dos tipos de "naturalezas" principales, una de carácter más

[4] *LAS REPRESENTACIONES SOBRE LA VARIACIÓN Y SU IMPACTO EN LOS APRENDIZAJES DE CONCEPTOS MATEMÁTICOS.* PROYECTO FONDECYT 1030413, período 2003-2005 y DIUMCE 10102, período 2002-2003. Investigadora principal Dra. Leonora Díaz, coinvestigadores Dra. Isabel Soto, Mr. Eulalia Gutiérrez y Mr. Alexis Labarca

bien estático y discreto y la otra dinámica y más bien continua. Reconocemos en ello dos tipos de epistemes en las cuales entra en juego la noción de variación según niveles de abstracción crecientes y consecutivos por su aparición temporal: el primero concreto-estático y el segundo abstracto-dinámico.

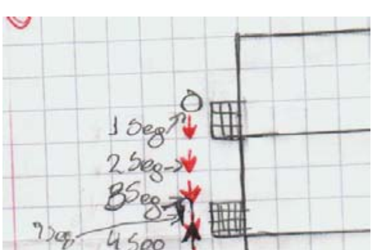
En la faceta estática se trae a colación pocas opciones discretas como partes de un todo estático. En la faceta dinámica hay textualidades que refieren a un evento de tipo causal: "Si A entonces B, bajo C". El actuante sabe como producir un cambio, esto es, controla la ocurrencia de ese cambio, que se desenvuelve temporalmente. Hay ejemplos que refieren cambios más bien impredecibles para el hablante, de ocurrencia también temporal. Un tercer grupo de cambios referidos es de tipo cíclico y por ende predecible por lo que potencialmente controlable en el sentido de manipular sus efectos.

Los dipolos presentes en las facetas estáticas de la acepción de cambio refieren a *Pocos*/diferente, distinto: dual, discreto/ vs *Muchos*/cantidad, agrupación, harto, varios, muchos estilos/ y *Homogéneo*/repetitivo, semejante/ vs *Heterogéneo*/diferencia, distinto, alternativas, elegir, escoger. Asimismo hay ilustraciones de cambios no cuantificables, que podemos llamar cualitativos – las variaciones de las mentalidades de las personas - así como los cuantificables. Estos últimos a su vez pueden diferenciarse entre los discretos – precio del dólar observado, cantidad de personas- y los continuos –temperaturas. En suma, el estudio de las textualidades reveló en este análisis que el Pensamiento y Lenguaje Variacional del estudiantado remite a cosmovisiones cíclicas y lineales (en el sentido de una sola dirección), a ilustraciones de modos de pensar tanto dinámicos como estáticos. Los primeros favorecerán tanto a la visualización de covariaciones como a manejar cognitivamente la ucronización y la simultaneidad (habilidades necesarias para apropiarse significativamente de saberes del medio social) en tanto los segundos o modos de pensar estáticos coadyuvan al estudiantado al establecimiento de clasificaciones y determinación de estructuras.

Los estudiantes del décimo año privilegian el cambio respecto de la variación –según lo expresan en sus conversaciones. La palabra variación adjetiva, secunda dando las tonalidades del cambio. En tanto que el cambio es una palabra sustantiva, que tiene la fuerza, el impulso que gatilla su realizaciones. Las corporizaciones o ilustraciones del concepto abren las posibilidades de conversar sobre cambios y por el contrario, lo conceptual se agota pronto. Los cambios difieren en intensidad –máximos o mínimos-, varían según sea aquello que cambia, pueden manifestarse en un intervalo de tiempo, resultan de la elección de un curso de acción cotidiano diferente, son la irrupción de una vía alternativa en el vivir cotidiano. Hay quienes no viven la acepción "aburrida" de la monotonía por lo que valoran positivamente esa regularidad al interior de la cual hacen cambios. Hay un uso de la expresión "variación profunda" para intervenir benéficamente el mundo, "variar" aquello que a su juicio está mal y que quieren cambiar para bien. El tránsito Escuela – Liceo es un cambio que viene de afuera, con responsabilidades muy altas y que la mayoría hace notar. El cambio se vive como novedad, se experimenta algo distinto entre un antes y un después. Asimismo, si no hay tiempo no hay variación. El tiempo es connatural al modo de pensar los cambios del estudiantado de segundo medio y tiene que ver con estados distintos acordes a pasos del tiempo, se compara un antes y un después de una misma cosa a la que se le detectan estados diferentes y se describen, dando cuenta del tipo de cambio ocurrido. En la manera de pensar de los jóvenes, la visualización de

cambio responde al dinamismo de la acción que ocurre en el tiempo. Las representaciones estáticas no son naturales en el habla espontánea de este grupo etario de jóvenes. El cambio -que es activo- afecta de modo sustantivo no exento de efectos dramáticos y emociones como dolor, frustración, esperanza, goce, entretención. A contrapelo de la vorágine de cambios en las que se hallan inmersos, como en un huracán, una estudiante se pregunta ¿qué puede cambiar en matemáticas? El grupo no da alternativas de visualización para ella, compartiendo su representación. Se constata como, una disciplina que trabaja con la cuantificación de cambios, ni se avizora en el horizonte de sus representaciones. Se representarían a la matemática como unos contenidos "fósiles" que se traen al aula generación tras generación.
Por su parte, el habla de los jóvenes de octavo básico es pródiga en el uso de la palabra variación. Lo variado es estático. En efecto, hay una colección en donde hay muchos distintos, presentes simultáneamente, que se comparan entre ellos mismos y son distintos por algún atributo, pueden ser de distinta naturaleza -hay variados elementos encima de la mesa: unos lápices, una goma, una radio. Así la voz de variación es pasiva "ahí yacen elementos diversos" a los que se asocian emociones tales como aburrimiento y comodidad. No obstante, los jóvenes la dotan de valoraciones positivas al asociarla con coherencias conductuales respecto en diversidad de contextos. El cambio tiene aspectos que son vitales de considerar, prever sus consecuencias, controlarlas de modo que generen el menor daño posible y en otro dominio, lamentar la pérdida de opciones al interior de un conjunto disponible de ellas. A las consecuencias del cambio se asocian valoraciones buenas y malas. Puede darse una relación recíproca de valores y valoraciones: dos índices bajar, uno de ellos con valoración positiva y el otro con valoración negativa, dependiendo del contexto. Las conductas personales responden en coherencia contextual, la variación conductual es gatillada por el cambio de los ambientes sociales en los que se desplaza la vida de la persona. En su construir la propia identidad – única, original - les contrarían las imitaciones. Según estos jóvenes "*la ley de la vida es cambiar, es inevitable*". Las variaciones inevitables e inabordables pueden ser gatilladas desde lo social como desde lo interno personal. En conjunto, los jóvenes de este grupo etario se visualizan más a merced de los cambios y variaciones, que como actores de ellos, a diferencia de lo que ocurrirá dos años más tarde, según refieren las textualidades de jóvenes del décimo año de escolaridad.

La apropiación de nociones de variación del discurso curricular. Ilustraciones Graficando.
Sobre la base de las producciones de los estudiantes se relevaron en esta primera fase, obstáculos a la visualización. En efecto, las producciones de los estudiantes revelan grandes dificultades para expresar variaciones en una gráfica distancia – tiempo.



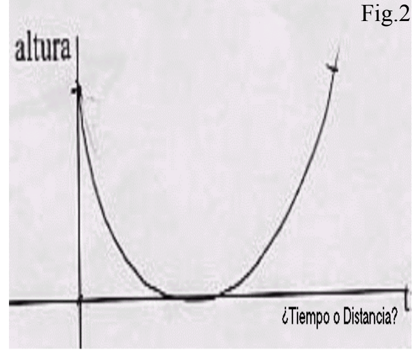


Fig.2

La figura 1 ilustra la competencia que se gatilla en el papel a la hora de adjudicar un eje al tiempo y un eje al desplazamiento. Se trata del dibujo de un estudiante del décimo año, sin preparación previa en gráficas a quien se le ha pedido que dibuje la trayectoria “a través del tiempo” de una pelota desde un tercer piso. Y es que se debe resolver para una variable que no está “a la vista” como lo es el tiempo (Carrasco, 2003). Cuando hablamos del tiempo asociamos un “adelante” para el futuro y un “atrás” para el pasado. Metáfora que refiere a un eje de longitud unidimensional (una recta). Atendiendo a los desarrollos de Núñez y Lakoff (2003) de que “e*l tiempo es metafóricamente conceptualizado (por los matemáticos) en términos de distancia*”entonces ocurre que al dibujar el avance del tiempo en un gráfico distancia/tiempo la representación del tiempo entra a competir – para su representación - con la dimensión espacial propia del desplazamiento (figura 2). Dos dimensiones que refieren a distancia, no pueden ocupar el mismo eje, entonces el estudiante de la figura 1 reserva el eje para el desplazamiento y hace marcas sobrepuestas para el paso del tiempo.
Entre las evidencias recogidas en esta fase del estudio se identifican tres tipos de obstáculos para elaborar gráficas de fenómenos tiempo/distancia por el estudiantado: epistemológicos (deriva de Oresme a Descartes, pasando por Tartaglia), cognitivo-culturales (el tiempo sustentado sobre una metáfora espacial compite con el desplazamiento a la hora de graficarlos juntos) y didácticos (opción curricular que reemplaza el paradigma geométrico de Newton y Liebnitz por el aritmético de Dedekind y Weierstrass).

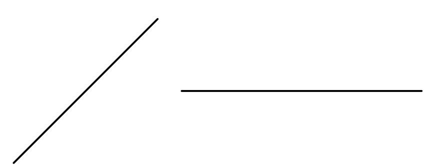
Estudiando la variación proporcional inversa. Consultados los estudiantes sobre sus entendimientos en esta materia muestran como las prácticas operatorias mecanicistas les dejan con un sinnúmero de preguntas en un registro algebraico carente de significado para la variación proporcional inversa, como lo muestran las siguientes textualidades:

> *“¿Por qué había que* ***dar vuelta*** *una parte del sistema inverso?”*
> *“¿****Cuando se invierten las incógnitas*** *en las ecuaciones de 3x3 indirectas?”*
> *“¿Por qué* ***dar vuelta*** *una parte de la ecuación en la variable inversa?”*
> *“Me quedó una duda respecto a un problema 3x3 inverso el cual* ***el inverso de 2c, es 2/c*** *según nuestro compañero, lo que creo que está bien,* ***pero también podría ser 1/2c****.”*

¿Cómo dotar de razonabilidad a las prácticas operatorias que pone en escena el aula para la variación proporcional inversa? Se pesquisó en los modos de operar a propósito de tres casos ilustrativos, a saber, el análisis de tablas babilónicas, el modo de reflexionar la proporción entre surcos y semillas del campesino de la edad media y el desastre ecológico de la sobre-explotación del sembradío actual, por una parte, y, por la otra, se indagó en los avances en el campo del lenguaje, las neurociencias y la sociología del conocimiento para entender los procesos de construcción de saberes y de aquellos en particular. Se relevaron las nociones de las metáforas corporales y las metáforas conceptuales como herramientas útiles para el análisis de las prácticas sociales vinculadas a la elaboración de saberes, en el marco socio-epistemológico de la investigación (op. cit., 2000). Asimismo, se elaboró una primera aproximación a una "metáfora didáctica" a incorporar al discurso curricular sobre la variación proporcional inversa, dotando de significado a este saber matemático entre los estudiantes. Tal metáfora "corporiza" el modo de operar de la proporcionalidad inversa: busca la manera de interpretar cualidades propias de "dimensiones o variables" que se relacionan de forma polar, aceptándose y reconociéndose mutuamente, de acuerdo a un mismo referente, con comportamientos de variación "inversa". Se trata de cambios de comportamientos al interior un todo de naturaleza dual. Esta "imagen" reflejaría el tipo de "corporalidad" implícita tanto en culturas de época remota expresadas en las "tablas de los recíprocos" de los babilonios como en los cálculos del campesino medioeval y el ecologista contemporáneo. Sería plausible - a la luz de estos hallazgos - dar sentido de un modo "natural", a un encuentro de un concepto de "inverso", con el significado cultural de "reciprocidad" en las representaciones estudiantiles. No es un modo de operar "inverso" de otro modo de operar - de una "proporción directa" desde la perspectiva formalista de la matemática - sino que refiere a un modo de operar con un sentido en sí mismo.

Conjeturando visualizaciones presentes en entendimientos de ideas variacionales sobre la base de la reflexión de los propias procesos de estudio de la variación. Damos un ejemplo de esta estrategia a partir de la textualidad de una estudiante:

> *"Cuando el dibujo que se muestra en la gráfica es una recta su razón de cambio es constante, cuando en el dibujo se ve una recta que no tiene movimiento, o sea no varía. Su razón de cambio es cero."*
> [Extracto bitácora 3]



La estudiante se representa la variación por medio del dipolo "*...no tiene movimiento, osea no varía*" implicando una cadena asociativa del tipo *no tiene movimiento* → *no varía* → *su razón de cambio es cero.* La estudiante, basada en su enseñanza previa, asocia que sin movimiento se corresponde con razón de cambio cero, subyaciendo a su vez la noción cultural del cero como la nada detrás. Dicha cadena asociativa la refiere a la variación de la gráfica en sí misma, dando una mirada global con ausencia de visibilidad de lo local: lo que se mueve o no se mueve es la recta. Pareciera que lo que varía o no varía ha de ser visto. Y "*se ve una recta que no tiene movimiento*" versus otra que si lo tiene, a pesar de estar ambas están estáticas en el plano. ¿Qué puede llevarle a afirmar sobre la recta en una suerte de *Gestalt* que invisibiliza lo local? ¿Qué metáforas – icónicas, gráficas, visuales - subyacen? Dado el desarrollo e impacto de la comunicación visual hoy día, culturalmente podemos inferir asociando la horizontal con el ícono de una cama o más aún, con una persona acostada - descansa o duerme- por lo que no se desplaza. Lo que varía o no varía es un algo corpóreo que se desplaza o no en un espacio y su transferencia al registro visual se expresa en logos altamente estilizados y minimales en su expresión. La recta oblicua podría ser esa persona levantándose, por lo mismo, moviéndose. En su argumentación entonces presenta una concepción de "complejo pseudo concepto" generalizando el decir de Vygotsky: el complejo formado por las cadenas asociativas gráfico-visual y aquella cadena que recuerda del aula.

Conclusiones

Lo educativo refiere a procesos de largo aliento y que demandan aprendizajes a cada uno de sus actores. El corazón de la matemática educativa, es elaborar lo propio y apropiado al mundo de nuestros estudiantes, mundo complejo y abigarrado que demanda a nuestros entendimientos. Distinguimos la matemática misma de la matemática educativa y de la matemática escolar. Añadimos los saberes culturales, los cuales constituyen cuerpos de conocimientos con una naturaleza propia y que ingresan al aula más o menos invisibles para sus protagonistas, favoreciendo u obstaculizando los entendimientos de los saberes matemáticos escolares. Resultados iniciales en estudiantes de secundaria muestran que sus representaciones cotidianas de la variación poseen tanto naturaleza estática y discreta como dinámica y continua, constituyendo epistemes en las cuales entra en juego la noción de variación según niveles de abstracción crecientes y consecutivos por su aparición temporal: el primero concreto-estático y el segundo abstracto-dinámico. El pensamiento y lenguaje variacional del estudiantado remite a cosmovisiones cíclicas y lineales (en el sentido de una sola dirección), a ilustraciones de modos de pensar tanto dinámicos como estáticos. Los estudiantes del décimo año de escolaridad privilegian el cambio respecto de la variación, siendo el cambio una palabra sustantiva, que tiene la fuerza, el impulso que gatilla su realizaciones. El tiempo es connatural al modo de pensar los cambios del estudiantado del décimo año y tiene que ver con estados distintos acordes a pasos del tiempo, se compara un antes y un después de una misma cosa a la que se le detectan estados diferentes y se describen, dando cuenta del tipo de cambio ocurrido. El estudiantado de octavo año utiliza mucho la palabra variación con un sesgo pasivo de aburrimiento y comodidad. No obstante la dotan de valoraciones positivas al asociarla con coherencias conductuales en diversidad de contextos.

Explorando nociones de variación del discurso curricular, las producciones de los estudiantes revelan dificultades para expresar variaciones en una gráfica distancia – tiempo. En ellas la metáfora matemática que concibe a la dimensión de tiempo como una distancia, compite - a la hora de graficarlos juntos - con la dimensión propia del desplazamiento. Por su parte, en procesos de estudio de la variación proporcional inversa, las operatorias mecanicistas dejan un sinnúmero de preguntas en un registro algebraico carente de significado. Sería plausible dar sentido de un modo "natural" al encuentro de un concepto de "inverso" con el significado cultural de "reciprocidad" en las representaciones estudiantiles, sobre la base de la imagen que refleja el tipo de corporalidad implícita en distintos momentos culturales. Un tercer estudio muestra una concepción de "complejo pseudo concepto" - generalizando el decir de Vygotsky - un complejo formado por una cadena asociativa gráfico-visual y otra cadena que se aprendió en el aula. Estos resultados preliminares muestran representaciones estudiantiles que demandan diseños propios y apropiados para favorecer aprendizajes pendientes en la región.

Bibliografía

Ávila, J. (2003). *Representaciones estudiantiles de variación. Un estudio desde mediaciones pedagógicas.* Proyecto de Tesis. De Maestría, Cicata-IPN, México.

Cantoral, R. y Farfán, R. (1998). *Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis*. Revista Epsilon, Núm. 42. España.

Cantoral, R. (1997). *Matemática Educativa*. Serie Antologías, N° 1, Área de Educación Superior. Departamento de Matemática Educativa. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN, México.

Carrasco, E. (2003).*Visualizando lo que varía*. Proyecto de Tesis de Maestría, Cicata-IPN, México.

Cordero, F. (2001). *La incidencia de la socioepistemología en la red de investigadores en matemática educativa. Una experiencia*. Serie Antologías, N° 1, Clame, Red de Cimates, México.

Díaz, L. (2002). *Las representaciones sobre la variación y su impacto en los aprendizajes de conceptos Matemáticos.* Dirección de Investigación, UMCE 2002-2003 y Proyecto Fondecyt 2003-2005. Santiago de Chile.

Díaz, L. (1999). *Concepciones en el aprendizaje del concepto de límite. Un estudio de casos*. Memoria doctoral. Facultad de Educación. PUCCH. 1999. Santiago de Chile.

Echeverría, R. (1986*). El búho de Minerva*. Proyecto Interdisciplinario de Investigación en Educación. Santiago de Chile.

Lakoff, y Núñez, R. (2000). *Where Mathematics Comes From.*. Ed. Basic Books. New York.

Ledesma, F. (2003). *Significatividad de la proporcionalidad inversa en estudiantes del décimo año de escolaridad.* Proyecto de Tesis de Magíster, UMCE, Santiago de Chile

Lizcano, E. (1999). La metáfora como analizador social. Artículo en www.uned.es

A PROPÓSITO DE LOS CONOCIMIENTOS NECESARIOS PERO NO ENSEÑADOS EXPLICITAMENTE

Corine Castela
Equipo DIDIREM Paris 7 y IUFM de l'Académie de Rouen

Resumen
El conjunto de mis trabajos concierne a lo que se designa con el termino de **curriculum oculto**, es decir los aprendizajes que no aparecen como objetivos explícitos de la enseñanza y que sin embargo un alumno tiene que realizar para tener éxito en el sistema escolar. Como lo comprobarán, mi punto de vista sobre este problema se transformó mucho desde el inicio de mi trabajo hasta mis reflexiones mas recientes. Por lo tanto, esta conferencia incluye tres partes: en la primera, presentaré mi opción inicial; en la segunda, definiré mi punto de vista actual, es decir propondré un marco teórico para analizar el problema de los aprendizajes ocultos. En la última parte, formularé hipótesis sobre los mecanismos de las disfunciones del curriculum oculto.

Primera opción: hacer surgir en el curriculum oficial una parte del curriculum oculto

El origen de las reflexiones sobre las cuales me propongo establecer un balance está sobre la base de mi trabajo en calidad de profesora de matemáticas en el Instituto de Formación de Profesores. Me ocupo de los primeros años en el Instituto de la preparación al CAPES, concurso de contratación de los profesores de matemáticas para los colegios y para los liceos (sexto hasta doceavo año de escolaridad).

Empezaré con algunos detalles sobre esta prueba (CAPES). Los estudiantes tienen una licencia universitaria en matemáticas que corresponde a tres años de estudios superiores. El concurso prevé dos pruebas escritas de cinco horas que tienen un programa muy amplio. Cada prueba está constituida generalmente por un problema centrado sobre un único tema que no está necesariamente ligado a un sector del programa. La cantidad de teoremas en juego es reducida, pero, a la vez, el estudiante tiene la responsabilidad de movilizar estos conocimientos: sin ninguna indicación del enunciado, tiene que ser capaz de utilizar un teorema para resolver un problema que no está necesariamente una situación típica que requiere su empleo. Al fin, los teoremas utilizados no son inmediatamente eficaces, requieren tomar algunas iniciativas para crear las condiciones más adaptadas a su utilización.

Mi participación en la formación concierne a la geometría elemental, es decir los saberes geométricos que figuran en el programa de Enseñanza Secundaria y que pueden intervenir en la prueba escrita. Entonces, la elaboración de mi enseñanza me plantea la siguiente pregunta: ¿Cómo ayudar los estudiantes, en un lapso tan corto, a mejorar sus capacidades para utilizar estos conocimientos elementales en las condiciones de la prueba escrita, cuando ellos han dejado de practicar este dominio desde su entrada a la universidad? A esta pregunta, le doy la siguiente respuesta: abro en mi enseñanza un espacio explícito a una categoría de conocimientos que me parecen favorecer el empleo del saber matemático en las condiciones de autonomía del escrito, lo que he designado como los conocimientos sobre el funcionamiento matemático (Castela 2000, 2004).

Para favorecer la comprensión de mi planteamiento haré algunos ejemplos sobre estos conocimientos:

Tipos de problemas y técnicas asociadas: Para demostrar que tres rectas son concurrentes, podemos introducir el punto de intersección de dos de ellas y mostrar que pertenece a la tercera (ver las alturas), introducir un punto y mostrar que pertenece a las tres rectas...

Función de herramienta para un concepto dado: La homotecia permite establecer una alineación por conservación de la alineación (cuadrilátero completo), y también porque el centro, un punto y su imagen están alineados (trapezoide completo) o porque, si una homotecia está compuesta por dos otras, los tres centros están alineados (Menelaüs).
Espero que estos ejemplos expliquen la siguiente definición: los conocimientos sobre el funcionamiento matemático consideran las formas de intervención de los elementos del saber sabio matemático, conceptos y teoremas, en las soluciones de los problemas ya resueltos. Se trata de conocimientos funcionales, orientados hacia la resolución de problemas. Viven bajo el régimen de la eficacia y no de la verdad, del "más o menos" y no del "siempre/jamás". Así es que la mayoría de las técnicas no son algoritmos, no permiten automáticamente resolver todos los problemas de un tipo, pero sí contribuyen por una parte, necesaria pero insuficiente, a la resolución de algunos de ellos. Finalmente, los conocimientos se pueden percibir de manera descontextualizada o a través de ejemplos paradigmáticos.
Los conocimientos sobre el funcionamiento matemático me parecen jugar un papel fundamental en la resolución de problemas a partir del momento que ellos exigen una cierta autonomía como es el caso de las pruebas escritas del CAPES. En general, estos conocimientos no aparecen en los programas como objetivos explícitos de enseñanza, ellos están directamente conectados con el curriculum oculto. En calidad de profesora para los estudiantes de CAPES, mi opción es otorgar un lugar oficial a algunos de estos conocimientos de tal manera que sean reconocidos en su calidad de saberes.
Esa fue mi primera elección para hacer frente a la dificultad, incluso la incapacidad, de numerosos alumnos en realizar los aprendizajes relativos al curriculum oculto. Considero que esta elección se podría plantear a otros niveles, por ejemplo a nivel de "lycée". Sin embargo, mis investigaciones ulteriores me llevan actualmente a tomar en cuenta soluciones menos radicales. Es sobre ellas que hablaré en la segunda parte de esta ponencia.

La organización institucional de la enseñanza, posible motor de los aprendizajes no inscritos en los programas oficiales

A continuación, optaré por un punto de vista radicalmente opuesto a lo que expuse anteriormente, considerando que la existencia de necesidades ocultas del aprendizaje conlleva un fenómeno presente en todas partes de la sociedad, lo que implica el interés de estudiar como dichos aprendizajes se realizan o no bajo estas condiciones.
Situándome en el marco de la teoría antropológica de Yves Chevallard, propondré el análisis siguiente. En una institución I, toda actividad A está sometida a un sistema de coacciones y de expectativas específicas provenientes de la institución. Según la definición de la noción de Institución, estas regulaciones se ejercen de manera relativamente duradera e invariable sobre las personas que, como sujetos de I, practican la actividad A y tienen que inscribir su acción en el marco predefinido, so pena de fracasar en la institución I. Esta estabilidad permite que se construya socialmente, en el conjunto de los sujetos involucrados, una forma eficaz de desarrollo de la actividad A en la institución que nombraré el género de la actividad A en la institución I. La noción de género se encontró por la primera vez, en la obra del lingüista ruso M. Bakthine; el sicólogo del trabajo francés Yves Clot (2002) la generalizó a todas las formas de actividades sociales, me refiero a él.

El género es una respuesta eficaz, históricamente y socialmente construida, a las coacciones generales y a las coacciones específicas de la institución que pesan sobre la actividad. El género es una forma de la memoria colectiva. Es un sistema de conocimientos producto de la colectividad cuyos sujetos son los depositarios en un momento dado. Es posible que ningún sujeto posea por si solo la totalidad de los conocimientos que integran el género. Ellos pueden ser parcialmente explícitos al interior del grupo social, pero, sea lo que sea, la institución I no avala la mayoría de estos conocimientos.

Cuando una persona actúa al interior de una institución, tiene interés a inscribir su actividad en el género puesto que eso habilita en la institución. Pues su éxito depende de la adquisición de conocimientos acumulados en el género que en general la institución considerada no reconoce. Entonces ellos no pueden aparecer ni como objetivos didácticos (lo que supondría una intención institucional de organizar el aprendizaje) ni siquiera como objetivos explícitos de aprendizaje. Estos conocimientos se adquieren actuando en la institución, entre los pares depositarios del género. En este marco de análisis, los aprendizajes ocultos aparecen presentes en todas partes del trabajo social. Este punto de vista implica tratar la problemática del curriculum oculto estudiando sus falencias de funcionamiento. La existencia de un curriculum oculto no es anormal. ¿Por que razones, en un cierto momento, bajo ciertas condiciones, los aprendizajes necesarios no se realizan para la mayoría de los sujetos?

Para mostrar la problemática presentada, me referiré en esta segunda parte a una investigación centrada sobre la comparación de formas de trabajos personales de los alumnos en dos instituciones francesas de enseñanza superior (Castela, 2004). El trabajo surgió a partir de la siguiente observación: los estudiantes que preparan el CAPES de matemáticas han realizado su primer año de estudios superiores en dos tipos de instituciones fundamentalmente distintas, por una parte la universidad, por otra parte las clases preparatorias a unas escuelas de ingenieros. Ahora bien, generalmente ocurre que los segundos tienen un mejor éxito en el CAPES que los primeros. Esta constatación me ha llevado a buscar las diferencias entre las dos instituciones que podrían explicar la diferencia de éxitos. Tomando en cuenta el análisis presentado en la primera parte de mi ponencia, mi hipótesis plantea que el éxito está relacionado con el aprendizaje de los conocimientos sobre el funcionamiento matemático. Este aprendizaje depende esencialmente del trabajo personal de los estudiantes, dado que en cada una de las instituciones, estos conocimientos no aparecen en los programas oficiales. En consecuencia, comparé las modalidades del trabajo personal de las dos poblaciones estudiantiles; en otras palabras, comparé los géneros de trabajo personal de los estudiantes universitarios y de las clases preparatorias.

La investigación reveló varias modalidades de trabajo, no equivalentes en cuanto a la construcción de los conocimientos sobre el funcionamiento matemático. Estas distintas modalidades no están presentes ni de la misma manera, ni tampoco con la misma eficacia en las dos instituciones. Dentro del marco teórico propuesto, busqué unos factores que explicarían la situación por el lado de las diferencias entre instituciones. Me limitaré aquí a formular una idea de los elementos que participan en la regulación institucional del trabajo personal. En la universidad, el curriculum está dividido en varias unidades semestrales especializadas; cada una es objeto de evaluación, lo que reduce la extensión de los programas de cada prueba. El éxito del estudiante depende de la nota, en consecuencia, la cantidad de estudiantes aceptados está ligada a la dificultad del problema planteado. Además, los profesores responsables de la formación son los autores de las pruebas. En las

clases preparatorias, la organización de la enseñanza es muy diferente; el programa de matemática es anual y abarca diferentes dominios. La evaluación final es una prueba nacional concebida sobre el principio de los concursos, es decir que el logro depende de la clasificación y no de la nota, el número de estudiantes recibidos está determinado a priori. Mi hipótesis es que estos factores permiten que el trabajo universitario centrado sobre la memorización detallada de los ejercicios sea posible y eficaz: la carga cognitiva es razonable por el hecho de la especialización de las pruebas y su composición mas bien previsible. Las condiciones específicas de las clases preparatorias no son favorables a este método de trabajo, desgastaste y ineficaz dada la magnitud de los programas y el carácter imprevisible de las pruebas.
Referente a la problemática de la ponencia, pondré el énfasis sobre el siguiente resultado: las condiciones institucionales vigentes en las clases preparatorias hacen que la adquisición de los conocimientos sobre el funcionamiento matemático sea más necesaria y más promovida que en la universidad. En estas condiciones, para los estudiantes de las clases preparatorias, el CAPES se inscribe en la prolongación del curriculum oculto anterior cuando los universitarios se enfrentan a una discontinuidad. Para tener éxito en el CAPES, necesitan conocimientos que habrían debido construir antes y que les faltan; además, algunos todavía no han adquirido un método de trabajo personal adaptado con la realización de aprendizajes autónomos.

Conclusión: hipótesis sobre los mecanismos de disfunción del curriculum oculto

En el ejemplo que acabamos de ver rápidamente, la causa de las dificultades no depende de la existencia de aprendizajes ocultos, sino de la necesidad de una progresión en el encadenamiento de los aprendizajes mismos; podemos retomar la definición de Vygotsky de "zona de desarrollo próximo": para que una persona se adapte al género de actividad A en I, es mejor, véase necesario, que haya logrado un cierto nivel de desarrollo. En otras palabras, el origen de las dificultades no está en la necesidad que los alumnos realicen aprendizajes institucionalmente ignorados sino en la necesidad de una progresión de estos aprendizajes ocultos, cuyas discontinuidades eventuales sean compatibles con los límites de la "zona de desarrollo próximo" de una cantidad suficiente de sujetos. Por el hecho que la institución no asume esta programación, la formación de un curriculum coherente es necesariamente laboriosa. Muchos procesos pueden encauzar disfunciones del curriculum. El pasaje de una institución de enseñanza a otra puede ser el principio de una discontinuidad patológica en el curriculum. Al interior de una misma institución, dos poblaciones están implicadas en la realización de los aprendizajes ocultos, los profesores y los alumnos. Las disfunciones pueden surgir de ambas poblaciones. Los profesores tienen una gran responsabilidad puesto que los alumnos pueden aprender solamente si enfrentan actividades que crean las condiciones y la necesidad de aprender. Uno de los fenómenos más usuales actualmente es que en unas circunstancias, los profesores consideren que no pueden asignar más los ejercicios de antes o aquellos que proponen a otros cursos, suprimiendo las condiciones de algunos aprendizajes.
En cuanto a los alumnos pueden tener una implicación en las disfunciones del curriculum oculto: cuando los aprendizajes a realizar están fuera de su zona de desarrollo próximo por falta de aprendizajes anteriores, cuando por el tipo de relación que entretejen con la institución escolar, no conciben que hay que aprender a partir del conjunto de las tareas asignadas por el profesor y que tienen una responsabilidad en su propio aprendizaje escolar.

Me parece que para ciertos alumnos, no sea posible la adaptación a partir de su cultura familiar al género de trabajo del alumno sin un seguimiento explícito de la institución.

Para concluir, resumiré mi intervención como sigue. Si una parte del curriculum oculto se puede integrar en el curriculum oficial como saber a enseñar, propongo tres modalidades de intervención para limitar las disfunciones causadas por la existencia de los aprendizajes ocultos: buscar y reducir las discontinuidades debidas a los cambios de instituciones; reconocer en un curriculum complementario al programa oficial unos objetos de aprendizajes que los profesores deberán organizar sin explicitarlos como saber para los alumnos (eso implica exigencias en el ámbito de la formación); insertar en el curriculum complementario algunos elementos relativos al trabajo privado de los alumnos.
Estas perspectivas abren a la didáctica un campo de investigación poco explorado cuya pertinencia sobrepasa el dominio de las matemáticas.

Bibliografía

Castela, C. (2000). Un objet de savoir spécifique en jeu dans la résolution de problèmes : le fonctionnement mathématique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 20(3), 331-380.

Castela, C. (2004). Institutions influencing Mathematics students' private work: A factor of academic achievement. *Educational Studies in Mathematics* (à paraître)

Clot, Y. (2002). De Vygotsky à Léontiev via Bakthine En Y.Clot (ed.), *Avec Vygotski*, (pp.191-211) La Dispute, Paris.

¿DESARROLLO LÓGICO MATEMÁTICO O APRENDIZAJE DE CONCEPTOS MATEMÁTICOS EN EL NIVEL INICIAL?

Santa Daysi Sánchez González
Universidad Autónoma de Santo Domingo, República Dominicana
j.luciano@codetel.net.do

Resumen

El desarrollo intelectual de los niños pre-escolares es un tema de gran interés en el área de la Educación y de la Psicología. Son muchos los científicos que han dedicado su vida a estudiar las transformaciones que va logrando el individuo en sus estructuras mentales, a medida que se desarrolla, así como las influencias que los factores sociales y biológicos ejercen en su formación. Pero, son pocos los educadores conscientes de este desarrollo. Se pone mayor atención en el desarrollo físico que en el intelectual. Se hace más énfasis en la búsqueda de estrategias, recursos y actividades que propicien un ambiente dinámico y activo que en uno que desarrolle las operaciones del pensamiento de nuestros infantes. Para formar ciudadanos que sean capaces de pensar por sí mismos, necesitamos empezar por los niños pre-escolares. Por esta razón analizamos la propuesta de Nivel Inicial de nuestro país y la comparamos con las teorías que la fundamentan.

Formación de conceptos

El proceso mental a través del cual un ser humano adquiere un concepto ha sido estudiado por diferentes intelectuales en distintas oportunidades. Nos cuenta K. Lovell en su libro Desarrollo de los conceptos básicos matemáticos y científicos en los niños, que los estímulos sensoriales recibidos por el hombre, son sometidos a un proceso de filtración o selección que llegan a la corteza cerebral y a las áreas conexas del cerebro medio. En ese momento se experimentan sensaciones, que van a ser reforzadas por experiencias anteriores, ideas, imágenes y actitudes que nos permitirán interpretar las señales recibidas. La interpretación que damos a esas señales son nuestras percepciones. Lo que percibimos va a depender de nuestro modo de pensar, de nuestras actitudes, emociones, deseos, etc. A partir de esta percepción se discrimina y se abstrae hasta llegar a generalizar. Discriminar implica reconocer y apreciar cualidades comunes y distinguir éstas de otras propiedades diferentes. Es abstraer, es sacar las características comunes para poder generalizar.

Para K. Lovell, un concepto "*es una generalización a partir de datos relacionados, y posibilita responder a, o pensar en estímulos específicos o perceptos de una manera determinada*

Un concepto no es estático. A lo largo de nuestra vida lo vamos desarrollando. La forma como se desarrollan los conceptos en los infantes y en el adulto, ha sido un tema de estudio y discusión por mucho tiempo. Veamos algunos protagonistas en este campo y sus aportes.

Vinacke (1952) pretende que tanto la abstracción como la generalización dependen más de la motivación y son más conscientes y controladas en los adultos que en los niños.

Brown (1958) considera que la formación de los conceptos en los niños está más influenciada por la estructura cognoscitiva de los adultos que lo rodean que por sus preferencias intelectuales.

Piaget e Inhelder (1959) descubrieron que en los niños entre 4 y 10 años, la capacidad para clasificar objetos depende de la capacidad para comparar dos juicios simultáneamente, y en la disposición para coordinar operaciones retroactivas y de aplicación. También que es más fácil para el niño clasificar objetos usando la percepción táctil y cinestésica que la visual.

Price-Williams (1962) comparó aptitudes de clasificación en una sociedad primitiva entre niños analfabetos y otros que asistían a la escuela, sin encontrar grandes diferencias.
Bartlett (1958) estableció que la generalización en los adultos en un tipo de pensamiento formal o experimental es distinto a los de la vida diaria. En el primero, la mente tiene que hacer una confrontación activa de todos los puntos de semejanza entre las ideas y los datos ante ella, los casos son estudiados. En la segunda los casos son "saboreados", pero no estudiados.
Lovell (1955) demostró que en adolescentes y adultos jóvenes, la capacidad de clasificar y formar nuevos conceptos, era superior en aquellos con antecedentes más favorables.
Churchill (1958) demostró que los párvulos que tuvieron acceso a ciertos materiales, alcanzaron ciertos conceptos más rápidamente que otros a quienes no se dieron esas oportunidades.
Otra idea presentada por Lovell independiza el desarrollo conceptual del perceptual. Según este criterio todo pensamiento depende de actos, refiriéndose a pensamiento como "*una fluencia conexa de ideas dirigidas hacia cierto fin o propósito*". Uno de los principales exponentes de esta idea es Piaget, quien sostiene además que los conceptos matemáticos tienen su origen en los actos que el niño lleva a cabo con los objetos, y no en los objetos mismos. Expresa que la "reversibilidad", habilidad fundamental que posibilita volver al punto de partida con el pensamiento, es la base de todo conocimiento lógico y matemático. Esta se inicia desde muy temprano con la repetición de acciones que van desarrollando la capacidad de coordinar operaciones de carácter retroactivo y procesos de anticipación. Los niños no pueden aprender sólo por observaciones, necesitan de sus propios actos para construir sistemas de operaciones mentales. De este modo, según Piaget, no existe dependencia directa entre el desarrollo perceptual y el conceptual. Para él, el concepto es la evolución de los esquemas de acción en los que juega una parte la percepción. Primero se forman unos pre-conceptos, el niño disocia objetos de sus propiedades sobre la base de su conducta (por ej. cuchillo de cortar pan y cuchillo de cortar carne). A través de la actividad se va construyendo un pensamiento más móvil y reversible y sobre los siete años de edad desarrolla nuevos y más complicados esquemas de forma progresiva. Otros autores también creen en la acción como base del pensamiento. Sherrington creía que la mente parecía haber surgido en conexión con el acto motor. Meridith (1956) sugiere que el hombre primitivo aprendió a operar manualmente mucho antes de que realizase cualquier clase de operación mental.
En definitiva, llegar a un concepto por la generalización o abstracción de ciertas percepciones sobre los objetos, o por la evolución de ciertos esquemas de acción sobre los objetos, implica que el individuo va a adquirir un nuevo conocimiento que le va a permitir interactuar con su medio. Para nosotros es importante analizar lo que ocurre con los conceptos matemáticos en los niños.

Desarrollo de los conceptos matemáticos en el infante

Los conceptos matemáticos son distintos a los adquiridos en nuestro entorno cotidiano. Para adquirir el concepto "pizarra" necesitamos determinar todas las características comunes a un objeto concreto que podemos percibir a través de nuestros sentidos. Pero el concepto "rectángulo" no existe porque la pizarra tiene forma rectangular, es independiente de ella, es una cualidad que la tienen muchos otros objetos y que debe ser abstraído de otros conceptos. Lo mismo ocurre con otros conceptos matemáticos. Según Lovell*, los* *conceptos matemáticos son generalizaciones sobre relaciones entre ciertas clases de datos.* Además de los conceptos numéricos y los espaciales, las matemáticas estudian las relaciones entre ellos y las operaciones mentales o cálculos a que pueden dar lugar. Si un niño no logra alcanzar plenamente el concepto de los números naturales (1, 2, 3,...), si no llega a existir en su mente independientemente de las cosas, aparatos, acciones o circunstancias, serán muy limitados los cálculos y operaciones mentales que pueda realizar con ellos.

El desarrollo de los conceptos matemáticos y científicos básicos es un proceso lento y complejo. Estos, aparecen al principio como nociones vagas y oscuras, que van ganando en claridad, amplitud y profundidad con la maduración y la experiencia. Antes de que un concepto se muestre consistente se dan ciertas propiedades de uniformidad, reversibilidad, asociatividad e identidad. Para ayudar al niño en la adquisición de estos conceptos, tenemos que enseñarles su lenguaje y sus símbolos.

Desarrollo lógico matemático

Piaget plantea que el desarrollo del conocimiento *es un proceso espontáneo, relacionado con el proceso total de embriogénesis o desarrollo del cuerpo, del sistema nervioso y de las funciones mentales, que termina cuando los niños llegan a la edad adulta y se refiere a todas las estructuras del saber*, diferenciándolo del concepto de aprendizaje, considerando que éste es un proceso subordinado al desarrollo.

El desarrollo del conocimiento está relacionado con las operaciones del pensamiento. Para conocer un objeto no basta con mirarlo y hacer una imagen mental del mismo, es necesario actuar con respecto a él. Conocer quiere decir modificar, transformar y comprender el proceso de esta transformación. Clasificar, ordenar, contar o medir son operaciones. *Una operación es un conjunto de acciones que modifican al objeto y permiten al que posee conocimientos acceder a las estructuras de la transformación.*

Piaget afirma que el dearrollo intelectual del niño pasa por las etapas sensorio-motriz o pre-verbal, pre-operacional o pre-conceptual, de operaciones concretas y de operaciones formales o hipotético-deductivas. Los niños que asisten a las escuelas de Nivel Inicial están generalmente en la etapa pre-operacional. Estas etapas están determinadas por factores que explican el desarrollo de un conjunto de estructuras a otro. Estos factores son la maduración, la experiencia, la transmisión social y el equilibramiento o autorregulación.

Piaget destaca además, dos tipos de experiencia: la física y la lógico-matemática. La física consiste en actuar con respecto a los objetos e inferir algún conocimiento haciendo abstracción de los objetos (la pipa pesa más que el reloj). La experiencia lógico-matemática se deriva de las acciones efectuadas con los objetos, haciendo abstracción de las acciones (descubrir que hay diez guijarros luego de ponerlos en una fila, aunque se cuente en cualquier orden). En este ejemplo se descubre no una propiedad de los guijarros, sino de la acción de ordenar. Este es el punto de partida de la deducción matemática. La deducción subsecuente consiste en interiorizar estas acciones y luego combinarlas sin tener que hacer uso de los guijarros. Esta coordinación de acciones que en principio se apoya en material concreto, conduce a estructuras lógico-matemáticas. Una vez que se han alcanzado las operaciones, las coordinaciones de las acciones pueden tener lugar por sí mismas en forma de deducción y construcción de estructuras abstractas.

El tercer factor es una transmisión social, lingüística o educacional. Para recibir la información el niño debe hallarse en un estado adecuado para entenderla, debe tener una estructura que le permita asimilar la información. El cuarto factor, el equilibramiento, que como compensación activa conduce a la reversibilidad, es un proceso de autorregulación fundamental en la adquisición de conocimiento lógico-matemático. Este proceso adopta la forma de una sucesión de niveles de equilibrio, que tienen una cierta probabilidad secuencial, no establecidas a priori. No es posible alcanzar el segundo nivel a menos que se haya obtenido equilibrio en el primer nivel y así sucesivamente. Cada nivel es determinado como el más probable siempre que se haya alcanzado el nivel precedente.

En cuanto al aprendizaje, Piaget plantea que es posible lograrlo, si se basa la estructura más compleja en estructuras más simples, es decir, cuando hay una relación y desarrollo natural de estructuras y no simplemente un refuerzo externo, rechazando así el proceso de estímulo-respuesta. Plantea que el aprendizaje de estructuras parece obedecer las mismas leyes que el desarrollo natural de estas estructuras y que por tanto el aprendizaje está subordinado al desarrollo y no viceversa.

¿Desarrollo lógico matemático o aprendizaje de conceptos matemáticos?

Al comparar las concepciones planteadas por los científicos acerca de los conceptos matemáticos y del desarrollo lógico matemático, podemos inferir que para ayudar con el desarrollo del conocimiento, el proceso de aprendizaje en la escuela debe tener como objetivo el desarrollar las estructuras mentales que le permitan al niño pensar por sí mismo, propiciando la toma de decisiones adecuadas en cada circunstancia. Hace falta potencializar las habilidades intelectuales de los educandos, enseñarlos a aplicar sus operaciones mentales en cada una de las actividades que realice. Por lo tanto, propiciar el desarrollo lógico-matemático en los infantes no implica necesariamente orientar el aprendizaje de ciertos conceptos matemáticos, sino ayudarles a utilizar el pensamiento para conocer la realidad y operar sobre ella, adquiriendo destrezas mentales para observar, comparar, clasificar, etc.

Los conceptos matemáticos y el desarrollo lógico matemático en la propuesta curricular de nuestro país

El Sistema Educativo Dominicano está dividido en los Niveles Inicial, Básico, Medio y Superior. El nivel inicial se divide a su vez en ciclos: primer ciclo (entre 0 y 2 años), segundo ciclo (entre 2 y 4 años), tercer ciclo (entre 4 y 6 años). Cuando analizamos la propuesta curricular para el nivel inicial, encontramos que está fundamentada en los planteamientos de Jean Piaget. Se describen las características evolutivas del niño y la niña del nivel, ubicándolas de acuerdo con las etapas definidas por él.

El programa consta de 8 bloques de contenidos divididos en el Desarrollo de la Expresión y Comunicación, el Desarrollo Socio-emocional y el Desarrollo Intelectual. El primero se clasifica en Expresión Oral y Escrita, Expresión Artística y Expresión Corporal. Este último se clasifica en Desarrollo del Pensamiento Lógico-Matemático, Exploración y Descubrimiento del Medio Natural y Descubrimiento del Medio Social.

Analicemos los contenidos correspondientes al Desarrollo del Pensamiento Lógico Matemático, en estos cinco bloques.

DESARROLLO DEL PENSAMIENTO LÓGICO MATEMÁTICO				
Bloque 1. Mi persona	Bloque 2. La experiencia familiar en mi vida	Bloque 3. El centro educativo como espacio donde aprendo y me divierto.	Bloque 4. Mi comunidad local y el barrio donde vivo.	Bloque 5. Mi comunidad nacional.
Figuras geométricas: las identifica y utiliza en dibujos y representaciones de su cuerpo y de los otros. Medición antropológica de espacios con partes del cuerpo.	Cuerpos geométricos: esfera, cubo, paralelepípedo, cilindro, pirámide y cono. Líneas: segmentos de recta, vertical, horizontal, poligonal o quebrada, curva, curva abierta o cerrada, circunferencia y trazo de caminos (laberintos). Relaciones de tamaño (grande, mediano, pequeño) y de longitud (corto y largo) en la realidad y en representaciones gráficas. Relaciones de altura (alto, bajo) y de distancia (junto, separado)	Relaciones espaciales: dentro-fuera, cerca-lejos, abierto-cerrado, al borde o en la frontera, entrada-salida. Las tres dimensiones. Largo-ancho-profundidad. Volúmenes. Lleno-vacío, delgado-grueso, fino-grueso. Relaciones espaciales: ubicación de lugares y personas al centro, en la intersección de líneas, a un lado, en una cara, en una esquina. Agrupamientos de objetos atendiendo a diferentes criterios. Relaciones de pertenencia. Comparaciones de estas relaciones	Distancias. Junto-separado, alejado-cercano. Utilización de unidades antropomórficas o inventadas para medir distancias. Relaciones: mezclado, separado, igual, diferente. Agrupamientos diferenciando mayor que, igual que y menor que, con material concreto y en material representativo. El número. Iniciación del reconocimiento de los números cardinales hasta 9, asociando símbolo y cantidad.	Ubicación en el entorno con relación a su cuerpo, a objetos y en material representativo: delante-detrás, arriba-abajo, de un lado- de otro, encima-debajo, al frente-de espalda, en giros. Conjuntos con igual y distintos números de elementos. Partición de conjuntos, por ejemplo con rompecabezas de mapas, escudos y banderas y otros. Números, iniciación de la actividad de contar.

Observamos que se presentan los conceptos matemáticos que se adquieren en el nivel inicial. ¿Cuáles de estos contenidos nos sugieren desarrollo del pensamiento lógico-matemático? En el primer bloque encontramos las palabras identificar y medir, en el segundo se sugiere la comparación al presentar categorías contrapuestas como son alto-bajo, junto-separado. En el tercer bloque se plantea de nuevo la comparación, así como agrupamientos. Lo mismo para el bloque cuarto y quinto. Sin embargo, la cantidad de conceptos matemáticos que se sugieren en cada uno, supera en mucho las destrezas del pensamiento que se quieren desarrollar. Aún más, en muy escasas ocasiones están explícitas estas destrezas. Si observamos los contenidos referentes a las otras categorías del Desarrollo Intelectual, como es la Exploración y Descubrimiento del Medio Natural y el Descubrimiento del Medio Social, encontramos solamente algunas sugerencias de comparación. En cada una se destacan los conceptos correspondientes al área.

Para desarrollar su pensamiento lógico, el niño necesita múltiples estrategias. No basta con las correspondientes a los conceptos matemáticos. Los niños tienen que observar, comparar, agrupar, clasificar, ordenar, establecer correspondencia, formular hipótesis, etc. Nuestra preocupación estriba en que en la propuesta curricular no se presenta de forma explícita la necesidad de desarrollar estructuras mentales. Las operaciones del pensamiento apenas están esbozadas y nuestros educadores no están formados en este sentido, por lo que difícilmente logremos un verdadero desarrollo intelectual de nuestros niños. En sentido general, en nuestros países no se promueve el desarrollo del pensamiento. La mayoría de las asignaturas se imparten haciéndose mayor énfasis en la memorización, de modo que los niños sólo adquieren las destrezas de pensamiento del nivel inferior.

En la asignatura Desarrollo Lógico Matemático, que imparto en la Universidad Autónoma de Santo Domingo, para estudiantes de la Licenciatura en Educación Inicial, hemos fomentado el estudio de las diferentes operaciones del pensamiento y su desarrollo, a través de estrategias, actividades y recursos didácticos. Se aprende a establecer cuáles operaciones del pensamiento son aplicables con un recurso o actividad seleccionada para lograr ciertos objetivos. En la experiencia acumulada en los salones de clase por las alumnas que ya ejercen la profesión, podemos constatar que no se hace énfasis conciente del desarrollo de las destrezas mentales, aunque si se consigue parcialmente, al trabajar con el desarrollo de los conceptos matemáticos.

A manera de conclusión

Los educadores del siglo XXI tenemos un gran reto. Necesitamos formar un ser humano independiente, con capacidad para hacer uso de la lógica y la razón en la transformación de su entorno, tanto natural como social; con capacidad para conocer la realidad y operar sobre ella, pero también con una conciencia moral y ética que le permita actuar con solidaridad, justicia y honradez. Para lograrlo debemos empezar por los niños pre-escolares, propiciando que puedan empezar a establecer relaciones, adquirir conceptos, tomar decisiones y en general a formular ideas y pensar. No basta con desarrollar conceptos matemáticos, se hace necesario que en cada uno de los bloques de contenido, de cada una de las áreas programáticas, se desarrollen las destrezas del pensamiento necesarias para lograr el Desarrollo Lógico-Matemático.

Bibliografía

Cascallana, M T. (1988), *Iniciación a la Matemática. Materiales y Recursos Didácticos*. Editorial Santillana, Aula XXI. Madrid.

Lovell, K. (1982), *Desarrollo de los conceptos básicos matemáticos y científicos en los niños*. 4ta edición. Ediciones Morata, Madrid.

Olivares, Ma. del C. (1981). *Didáctica de la Matemática Moderna. Primer Curso*. Editorial Osiris, México.

Piaget, J. El desarrollo cognitivo en los niños: Desarrollo y Aprendizaje. (*Conferencia) Centro de Epistemología Genética*, Ginebra, Suiza. Copyright (1964) por la Asociación Nacional para la investigación de la Enseñanza de Ciencias.

Raths, L. (1971), *Cómo enseñar a pensar. Teoría y Aplicación*. Centro Regional de Ayuda Técnica (AID), México, Buenos Aires.

UN ESTUDIO DE REPRODUCIBILIDAD DE SITUACIONES DIDÁCTICAS: UN ENFOQUE SISTÉMICO

Javier Lezama Andalón
CICATA-IPN, México
jlezama@ipn.mx

Resumen
En este trabajo, presentamos los resultados del desarrollo de una investigación sobre un fenómeno didáctico denominado reproducibilidad. La relevancia de este trabajo para la didáctica de las matemáticas, está en que aborda de manera sistémica una práctica que es desarrollada por la mayoría de los profesores en su actividad escolar, "repetir clases". La didáctica se ha ocupado del estudio de algunos fenómenos asociados con el repetir clases, más el que nosotros abordamos en esta investigación, es el caso en que esas actividades de aula, responden a un trabajo de ingeniería didáctica. Lo que nos propusimos repetir fue una ingeniería didáctica estructurada sobre un saber matemático específico, como es el caso del concepto de función exponencial y que además contaba con predicciones sobre el aprendizaje de los estudiantes. La situación didáctica diseñada después del análisis de aspectos epistemológicos, cognitivos y didácticos, fue llevada al aula con el fin de que unos estudiantes específicos se apropiaran del conocimiento matemático puesto en juego por la situación, pero a pesar de la consideración de los elementos antes mencionados, nada aseguraba que dicho instrumento de aprendizaje fuera universal, es decir que produjera aprendizajes de manera uniforme en cualquier población de estudiantes que se seleccionara. Existen múltiples factores que reducen o modifican la efectividad de la ingeniería al poner en funcionamiento la ingeniería en diversos escenarios escolares. Estos factores, creemos, son elementos constitutivos del fenómeno de la reproducibilidad. Nos interesaba conocer cuáles de éstos, al ser identificados, podrían permitirnos lograr efectos didácticos estables, a pesar de cambios significativos en el escenario de aplicación de la ingeniería, tales como la intervención de otros profesores, trabajar la situación con otros alumnos, otras modalidades de aplicación de la ingeniería, en fin, un cuerpo muy amplio de condicionamientos y que constituyen precisamente el objeto de estudio de este trabajo.
A lo largo este y otros escritos precisamos lo que hemos estudiado (Lezama,1999, 2000, 2001, 2002), cómo lo hicimos y cómo obtuvimos la información pertinente para responder a nuestros cuestionamientos. Toda construcción didáctica nos obliga a hacer consideraciones sobre el carácter efímero o duradero de las mismas, sobre la factibilidad de ser implementada en la escuela periódicamente. Es relevante señalar, que las distintas investigaciones que se han elaborado a partir de 1984 con relación al fenómeno de la reproducibilidad, han ido incorporando aspectos nuevos al estudio del fenómeno, pero todas se han caracterizado por una fuerte atención al papel del profesor (Arsac, Balacheff y Mante, 1992), (Artigue, 1984), (Grenier, 1989), (Margolinas, Perrin-Glorian, 1997). Es en este contexto donde nosotros hicimos el planteamiento de nuestra investigación: ¿qué tipo de fenómenos podemos esperar aparezcan cuando se repite una situación didáctica diseñada con un propósito específico, aplicada por diferentes profesores o un mismo profesor en diferentes escenarios y con la intención de lograr la reproducibilidad de la misma? ¿Cuáles de estos fenómenos apuntan a lograr la reproducibilidad y cuáles no? ¿Cuáles eran predecibles y cuáles no?

Los elementos del sistema

Con relación al propósito didáctico de la ingeniería, éste se mantiene aunque el profesor cambie, no constituye un elemento subjetivo, sin embargo la manera como el profesor interprete dicho propósito sí afectará el desempeño de los estudiantes como lo mostró la experiencia, ya que se produjeron formas de interacción maestro-alumno-saber especiales configurando así un determinado contrato didáctico. El problema (como sinónimo de situación) fue planteado con un propósito didáctico específico, pero cuando interviene el profesor, afirmamos que aparece un elemento que denominaremos "intencionalidad del profesor" y como el contrato didáctico se erige por la interacción del profesor con el diseño, la naturaleza del saber en juego y la adopción del problema por parte del alumno, podemos esperar que uno de los factores que con mayor fuerza afectan al sistema es la actividad del (sea sustituido o no) profesor.

El propósito didáctico de la ingeniería deberá ser objetivo y comunicable, pero como nos lo ha permitido ver nuestro trabajo, la adopción del propósito didáctico por el nuevo profesor, si bien exige un trabajo de comunicación prolongado, dicho trabajo no es garantía de que el propósito didáctico opere automáticamente cuando la situación se pone en escena en un sistema didáctico determinado.

La estructura de la situación didáctica como factor de reproducibilidad

La situación didáctica "Un estudio de la función 2^x" fue producto de un trabajo de ingeniería didáctica, fue debidamente validada y fue hasta entonces que se decidió probarla en distintos escenarios. Como sabemos la situación didáctica podemos ubicarla dentro del sistema didáctico en el polo del saber, pero no se puede considerar independientemente de los otros dos polos, sin embargo como se discutirá más adelante la consideración sobre la estabilidad de su estructura y propósitos didácticos resultaron fundamentales en nuestro afán de reproducibilidad. Propósitos, antecedentes, eje conceptual y secuencia de situaciones problema, permanecieron inalterados en todas las puestas en escena, excepto en el aspecto operativo donde se colocó la primera etapa de la situación para trabajarse independientemente en cada grupo de estudiantes. En el proceso de comunicación del escenario y especialmente cuando se abrió la posibilidad de que los profesores propusieran cambios a la situación, las únicas modificaciones sugeridas fueron orientadas a la redacción de algunas actividades que a decir de los profesores resultarían más comprensibles a los alumnos (Lezama, 2003).

Los estudiantes ante la reproducibilidad

Se hizo el mayor esfuerzo posible por trabajar con los grupos en condiciones lo más parecidas posibles a una clase común y corriente. Uno de los factores en que más cuidado se puso fue al control de tiempo. Sin embargo en todos los casos los estudiantes se tomaron amplios espacios de tiempo para discutir algunas partes de la situación. El contenido matemático de la situación constituyó una fuente de interés para algunos equipos y desalentadora para otros. Un elemento importante a destacar fue el hecho de que los equipos se sintieron con libertad para expresarse y trabajar.

El profesor como agente de reproducibilidad

El profesor tiene una visión privilegiada en el sistema didáctico, conocimiento y dominio del contenido matemático de la situación, conoce las características de sus estudiantes, él adopta los propósitos didácticos de la ingeniería y tiene la posibilidad de hacer adaptaciones para sus estudiantes a partir de las características de ellos. En el proceso de reproducción de la ingeniería, el polo que mayor atención exigió fue el del profesor ya que como se planteó en la estrategia de la investigación, la ingeniería se llevó a un sistema didáctico distinto para el cual se había diseñado, este hecho constituye una intervención en dicho sistema. Iniciar el proceso de adaptación del diseño para las nuevas condiciones exige una amplia colaboración entre el profesor del grupo y los agentes que colaborarán en dicha puesta en escena.

Los profesores y las interacciones con los estudiantes

La actividad de los estudiantes, al interior de sus respectivos equipos de trabajo, requirió de diversas intervenciones por parte del profesor y que fueron de naturaleza muy diversa. En el análisis de las interacciones, catalogamos las intervenciones del profesor como preguntas, observaciones, indicaciones y acciones. Para el nivel de familiarización que tenían los profesores con la situación, se esperaban intervenciones de éstos, bien dirigidas y que redujeran al mínimo la incertidumbre en los estudiantes. Sorprendentemente hubo de calificarse como ambiguas muchas de las intervenciones del profesor. En varios equipos fue este tipo de interacción la que determinó el trabajo del equipo. Lo que caracterizaba a la interacción ambigua era, uso de lenguaje inapropiado para los estudiantes, respuestas ajenas a lo que el estudiante preguntaba o observaciones por parte del profesor muy ajenas a lo que en ese momento el estudiante estaba trabajando. La explicación a la intervención ambigua es difícil de dar, o bien el profesor no entiende la pregunta del estudiante, o no está atento a lo que en ese momento el estudiante hace, o también el profesor no tiene claro el sentido de la actividad y sus observaciones o respuestas resultan impertinentes. En algunos casos los profesores, ante la enorme dificultad que mostraban los estudiantes para interpretar los exponentes fraccionarios y la imposibilidad de reconstruir por ellos mismos los algoritmos geométricos, se abocaron a tratar de que los estudiantes recuperaran dichos algoritmos perdiendo así la oportunidad de atender en ese momento las exploraciones de los estudiantes y sus respectivas respuestas. La aparición del fenómeno de la interacción ambigua, es de gran importancia, ya que las dos categorías básicas de intervención discutidas y planeadas ampliamente en el proceso de comunicación del escenario son el desbloqueo y centración. Las interacciones ambiguas en forma paradójica fueron fuente de bloqueos y desviaciones. Incurrir en lo que hemos denominado como interacciones ambiguas muestra la complejidad de los fenómenos que se producen en el aula. Responder, indicar, hacer observaciones y realizar acciones en el marco de un plan de acciones para apoyar el proceso de aprendizaje de los estudiantes, son actividades propias del profesor quien tiene la visión privilegiada del sistema didáctico como decíamos más arriba pero que en determinadas circunstancias de presión o de enorme dificultad, puede hacerlas jugar en contra de sus propósitos didácticos.

Elementos para la modelación del fenómeno de la reproducibilidad

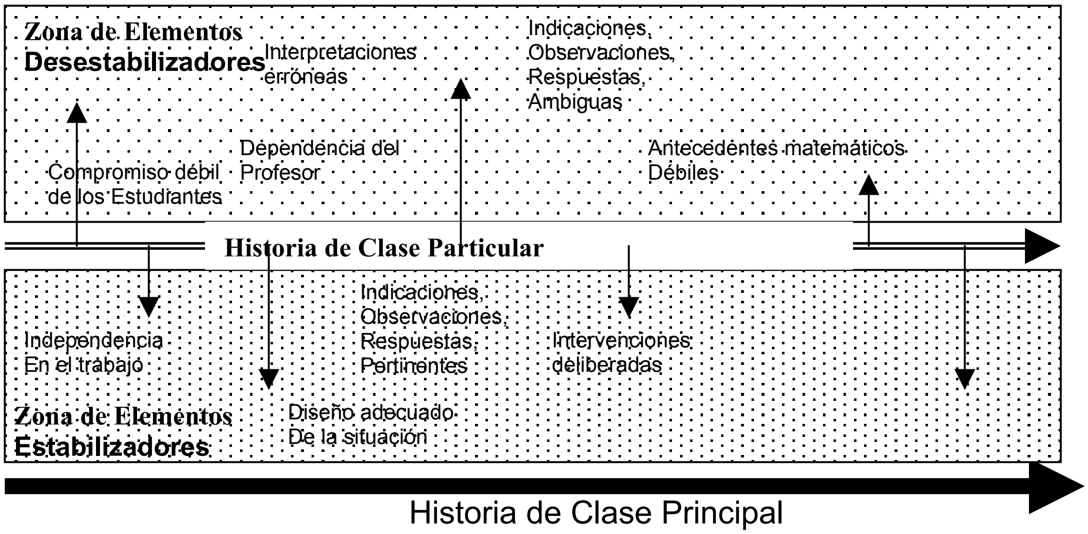
En el contexto de lo que llamamos el "proceso de reproducibilidad de una Ingeniería Didáctica", hemos identificamos elementos que consideramos imprescindibles en dicho proceso. Profesor, estudiantes y un contenido a estudiar conforman un sistema muy dinámico y éste se pone en acción bajo acuerdos motivados por propuestas de estudio que en la mayoría de los casos son propiciadas por el profesor. Introducir una propuesta de estudio formal a un sistema, exige para el profesor que operará la propuesta, un alto nivel de familiaridad con ella y estar convencido de los beneficios que le acarreará a sus estudiantes. Con base a los ejercicios de reproducción efectuados, identificamos tres grandes espacios de acción a considerar para hacer un análisis de reproducibilidad:

Estructura de la Ingeniería Didáctica (Estructura)

Un espacio para el saber, constituido por la Ingeniería didáctica a trabajar: Dicha ingeniería es el resultado de un análisis preliminar riguroso y su correspondiente validación. Para comunicarla a un profesor candidato a llevarla a sus estudiantes, consideramos deberán: Explicitarse de manera amplia el Propósito didáctico. Establecerse de manera clara los antecedentes matemáticos indispensables para abordarla. Mostrarse los ejes conceptual y operativo, establecido a través de una sucesión de elementos matemáticos a considerar, diversas acciones, validaciones y formulaciones a realizar. Estructura y sucesión de situaciones problema a resolver.

Comunicación del escenario (Comunicación)
Un espacio para la comunicación de la ingeniería (lo que se ha denominado Comunicación del Escenario): Discutir el propósito de la situación didáctica: Orientada a apropiarse del sentido de la actividad, analizar el por qué y para qué de todas sus partes. Establecimiento de un proceso de apropiación de la ingeniería, orientado a lograr que los profesores puedan considerarse como diseñadores (apropiación del diseño) de la situación. Resolver todas las situaciones problemas, discutiendo aspectos conceptuales y operativos de la situación.

Adaptación al nuevo Sistema Didáctico (Adaptación)
Un espacio para la planeación de la puesta en escena: Identificar los antecedentes matemáticos requeridos por los estudiantes para trabajar la situación así como las posibles dificultades que podría enfrentar desde la perspectiva matemática. Proceso de adaptación de la situación didáctica al grupo de estudiantes a través de una toma de acuerdos entre diseñador y profesores. Rediseño de la situación didáctica ajustada al nuevo grupo de estudiantes (establecer los límites de modificación de la situación didáctica). Establecimiento de una estrategia de interacción entre profesor y alumnos. Organización social de la clase, donde se establece la modalidad de trabajo en la que los estudiantes afrontarán la situación. Elaborar las predicciones sobre lo que harán los estudiantes. Lograr la reproducibilidad de una situación didáctica consiste en lograr que las historias de clase descritas por los estudiantes se encuentren lo más próximas posibles a la historia principal que es establecida desde el diseño. Las órbitas descritas por cada uno de los equipos pueden ser variadas pero deben de estabilizarse cuando se discuten los obstáculos alrededor de los cuales se ha diseñado la situación (Lezama, 2003). ¿La estructura de la situación es tal que orilla a los estudiantes a transitar casi de manera única por cada una de sus partes y provoca una comprensión uniforme en todos los estudiantes que la trabajan? Idealmente esa es la pretensión de un diseño científicamente planeado. Si bien un diseño apunta a reducir al mínimo las posibles alteraciones, sabemos que estas son inevitables, lo normal entonces es el surgimiento de múltiples alteraciones y estas son provocadas cuando los estudiantes entran a interpretar los problemas que se les plantean, por su bagaje matemático, por el dominio conceptual de los asuntos matemáticos que se tratan, por la heterogeneidad de los estudiantes. Estos elementos no pueden ser uniformes y por lo tanto introducen en escena elementos que producen inestabilidad en el efecto didáctico. Es el profesor quien, desde su nivel de apropiación de la situación y estrategias de interacción con los estudiantes, puede ayudar a reducir los factores desestabilizadores. Pero nuestra investigación nos ha mostrado que contra lo esperado, el profesor puede introducir nuevos e inesperados elementos inestabilizadores. La historia particular desarrollada por cada uno de los estudiantes o grupo de estudiantes, para poder asegurar que el efecto didáctico se ha reproducido deberá de tener el mayor parecido a la historia principal o ideal. La cercanía o lejanía de la historia principal estará determinada por los elementos estabilizadores o desestabilizadores que se ponen en acción, como se muestra en la figura:



La reproducibilidad está determinada por la distancia o parecido de las historias particulares a la historia principal, pero bajo el supuesto de que es imposible historias de clase idénticas. El proceso de reproducción de una situación didáctica se inicia con la actividad del profesor que operará la reproducción dirigida a trabajar la situación didáctica como un problema personal en el que él resolverá para sí, en lo que podríamos denominar un proceso personalizador, él identificará las partes problemáticas de ésta a partir de su experiencia y formación, para luego pasar a un proceso de despersonalización cuando mire a la situación como una actividad para otro (sus estudiantes) identificando los elementos problemáticos para ellos a partir del conocimiento que tiene de ellos. Este espacio de intervención del profesor sobre la situación didáctica permitirá por fin intervenir en el sistema didáctico que había señalado anteriormente como ajeno. El trabajo de reproducción consistirá en generar estrategias que reduzcan en lo más posible los elementos desestabilizadores, pero éstos aparecerán inevitablemente, queda a los operadores de la reproducción estar atentos al surgimiento de las situaciones inesperadas, pero atenderlas también está sujeto a acciones inesperadas del profesor cayendo así en un círculo que se podría calificar de vicioso, pero que es característico de la actividad humana.

Conclusiones

Partir de la experiencia de repetir una situación didáctica en condiciones de control, nos ha hecho identificar algunos fenómenos que emergen cuando se repite una situación didáctica en distintos escenarios. El fenómeno de la reproducibilidad, como fenómeno que nos permite analizar la repetición del efecto didáctico se presenta como frágil ya que la repetición del efecto didáctico está determinado por múltiples factores, siendo los más complejos e incontrolables los humanos. La reproducibilidad como hemos señalado consiste en una intervención en un sistema didáctico, en la tríada didáctica el polo del saber es el que permanece estable, siendo el de los estudiantes y profesores los más difíciles de controlar. La actividad de reproducir situaciones didácticas está asociada a la transposición didáctica, ya que el proceso de adaptar una situación didáctica a un grupo específico de estudiantes, está sujeto a un proceso de negociaciones entre el diseñador y los actores del nuevo sistema didáctico a fin de efectuar la reelaboración de la situación. La negociación y la posterior intervención del diseño original para obtener el rediseño, son actividades características que se efectúan en lo que se denomina el sistema operativo de la transposición didáctica y que Chevallard (1991) denomina noosfera. Se podría afirmar que reproducir una situación didáctica es una transposición a un sistema didáctico específico. La reproducibilidad de una situación didáctica entendida como la cercanía de las historias de clases particulares con la historia de clase principal puede ser establecida de manera objetiva dadas las características estructurales de una situación didáctica ya que están determinadas objetivamente las acciones, formulaciones y validaciones a realizarse, así como la respectiva institucionalización del profesor. Los elementos estabilizadores y desestabilizadores pueden ser controlados en cierto modo a partir del trabajo realizado en el proceso de comunicación del escenario y adaptación. El profesor juega un papel determinante en el proceso de reproducción de situaciones didácticas, ya que es el polo del sistema didáctico que requiere ser más activo y flexible, ya que vive la situación didáctica, la discute, analiza y critica y posteriormente la rediseña. La visión sobre la situación debe ser amplia y profunda ya que deberá reformularla para sus estudiantes y posteriormente acompañarlos cuando éstos la trabajen. Tal actividad exige en el profesor habilidades que van más allá del dominio disciplinar. Además son tantos los aspectos que el profesor deberá cubrir que es muy fácil que en alguno de ellos falle. En estas múltiples actividades podemos observar cómo se ponen en acción las concepciones del profesor sobre su actividad como profesor, así como las concepciones que tiene de los alumnos, por las decisiones que toma para llevar a los estudiantes la situación didáctica.

Reviste primordial importancia el espacio de las interacciones entre profesores y alumnos, ya que especialmente en ellas surgen los elementos desestabilizadores que impedirán el cumplimiento del propósito didáctico establecido. Se pudo observar el fenómeno que hemos denominado de umbral de conocimiento, y que es resultado de la carencia de los antecedentes matemáticos indispensables para afrontar la situación. Las respuestas erróneas podrían ser calificadas de arbitrarias o resultado de un salir al paso ante preguntas a las que se desconocen sus respuestas. Los estudiantes formularon respuestas provisionales y que no estaban en posibilidad de validar o darse cuenta del error, creemos por razones de tiempo. Las respuestas dadas por los estudiantes eran auténticas formulaciones pero esto sólo lo permitió ver un largo análisis de lo hecho y dicho por los estudiantes. En condiciones normales de clase sus respuestas hubieran sido calificadas de arbitrarias y erróneas. El concepto de potencia entera positiva es estable en la mayoría de los estudiantes pero en todos los casos mostraron que elevar a potencias fraccionarias carece de significado para la casi totalidad de los estudiantes. La mayoría los estudiantes asocia la función exponencial con crecimiento, pero son incapaces de reconocer la modalidad de crecimiento pues la mayoría representó dicho crecimiento con líneas de pendiente positiva.

Bibliografía

Aguilar, P.; Farfán R. M.; Lezama, J. Moreno, J. (1997). Un estudio didáctico de la función 2^x. *Actas de la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*. Morelia, México.

Arsac, G. (1989) Le rôle del professeur- aspects pratiques et théoriques, reproductibilité.Cahiers du Séminaire de Didactique des mathématques et de l'informatique.Grenoble:IMAG-LSD.

Arsac, G., Balacheff, N. y Mante, M. (1992) Teacher's role and reproducibility of didactical situations. *Educational Studies in Mathematics,* 23: 5 29.

Artigue, M. (1984). *Contributions à l'étude de la reproductibilité des situations didactiques –Divers travaux de mathématiques et de didactique des mathématiques*. Thèse de Doctorat d'état. Université Paris VII. Sin publicar.

Artigue, M. (1986). Ètude de la dynamique d'une situation de classe: une approche de la reproductibilité. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(1), (pp.5-62).

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Colección: Psicología Cognitiva y Educación. Edit. Aique. Argentina.

Grenier, D. (1989). Construction et ètude d'processus d'enseignement de la simetrie orthogonale: èlèments d'analyse du fonctionnement de la thèorie de situations. *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol.17, No. 1, pp. 5-60.

Lezama, J. (1999). *Un estudio de reproducibilidad: El caso de la función exponencial*. Tesis de maestría, no publicada. DME, Cinvestav-IPN. México.

Lezama, J. Farfán, R. M. (2000) El papel del profesor en la reproducibilidad de situaciones didácticas, En *Acta Latinoamericana de Matemática educativa Vol. 13.* pp. 493-500. México.

Lezama, J.; Farfán, R. M. (2001) Introducción al estudio de la reproducibilidad. *Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Edu*cativa. Vol.4, Núm. 2. pp 161-193. México.

Lezama, J.; Farfán, R. M. (2001) Un estudio de reproducibilidad de situaciones didácticas. En *Acta Latinoamericana de Matemática educativa. Vol. 14.* pp. 546-551. México.

Lezama, J.; Farfán, R. M. (2002). Reproducibilidad de situaciones didácticas. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* Vol. 15, tomo 2, pp. 1157-1162. México.

Margolinas, C., Perrin-Glorian, M. J. (1997). Des recherches visant à modéliser le rôle de l'enseignant. (Editorial). *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol. 17, No. 3, pp. 7-16.

EL CONCEPTO DE CONTINUIDAD Y SUS OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS

Cecilia Crespo Crespo
Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González". - Universidad de Buenos Aires
ccrespo@sinectis.com.ar

Resumen
El concepto de continuidad está íntimamente ligado a los de infinito y límite. En este trabajo se presenta primeramente un breve recorrido por las ideas que influyeron históricamente en la construcción matemática del concepto de continuidad a lo largo de la historia del pensamiento humano y se analizan las concepciones que sobre este concepto tienen los alumnos a las distintas edades, con la finalidad de clarificar ideas y buscar nuevas estrategias didácticas para abordar el tema del continuo.

Introducción
Existe una íntima relación entre los conceptos de infinito y de límite. Estas ideas son fundamentales para la comprensión de nociones como límite en los últimos años del nivel medio (nivel polimodal) y también en los primeros cursos del nivel superior, sin embargo algunos conceptos relacionados con la continuidad son abordados años antes. Su abordaje y comprensión debe ser gradual para asegurar su correcta asimilación.
Las dificultades que para los alumnos presenta el aprendizaje de los primeros conceptos de análisis matemático, incluso en cursos iniciales de nivel universitario son debidas en muchas oportunidades a la no asimilación de la idea de continuidad de la recta numérica.
El análisis histórico permite una visión clara acerca de las dificultades que aparecen en el aprendizaje desde su adquisición intuitiva hasta la construcción del concepto matemático de continuidad. Surgen, sin duda, numerosos obstáculos epistemológicos relacionados con este concepto. Entre ellos, podemos mencionar, la diferenciación entre discretitud y continuidad, la confluencia de lo infinito con lo indivisible y la diferenciación y aceptación de los infinitos actual y potencial.

Continuidad y densidad de la recta: dos conceptos que no deben confundirse
Es usual encontrar que muchos alumnos confunden densidad y continuidad de la recta. Para más de la mitad de los alumnos, la continuidad de la recta se traduce en la condición de que *"dado un punto, siempre es posible encontrar otro tan cercano a él como se desee" o "dados dos puntos de la recta, siempre es posible encontrar otro entre ellos".* Este es el concepto de densidad, no de continuidad. Es muy usual que continuidad y densidad sean confundidos y tomados como sinónimos, lo cual es completamente erróneo. Para mostrarles su error, basta con hacer referencia a la densidad de los números racionales y a la no continuidad de este conjunto numérico.
Si bien desde edades tempranas, se hace referencia a la continuidad de la recta, en muy escasas oportunidades los alumnos son capaces de relacionar el concepto de continuidad con la no existencia de interrupciones. Este es el concepto intuitivo de continuidad sobre el que deberíamos hacer más hincapié en la enseñanza, cada vez que nos sea posible. Esta idea debe ser trabajada explícitamente por el docente para evitar que la continuidad sea unida por los alumnos simplemente a la condición de infinitud, pero no está correctamente interpretada.

La construcción del continuo numérico a través de la historia

Es posible leer en algunas publicaciones de matemática educativa de diversos orígenes, la afirmación acerca de que la continuidad es una noción intuitiva y por lo tanto, evidente. Un breve vistazo a la manera en que se construyó históricamente esta noción, nos permitirá formar una opinión propia al respecto. La historia es, muchas veces, un instrumento útil para la comprensión de los problemas que se presentan en educación. Los conceptos sencillos e intuitivos, sin lugar a dudas surgieron rápidamente en la historia de la humanidad. Cuando una idea tarda siglos en ser comprendida cabalmente por los científicos, seguramente resultará necesario un abordaje cuidadoso en la enseñanza.

Según los documentos que han llegado a nuestra época, provenientes de distintas culturas (tablillas babilónicas, papiros egipcios, estelas mayas, etc.), la mayoría de las civilizaciones antiguas poseían sistemas de numeración; conocían los números naturales y en muchos casos también los números racionales como partes de la unidad. Para todos estos pueblos, los números tenían un claro significado geométrico. Estaban asociados al proceso de medir y la medida se asociaba con magnitudes geométricas.

En la matemática griega, estas ideas también se ven reflejadas. El pensamiento griego se orientó a dar forma a la matemática desde el pensamiento lógico deductivo y a lograr la matematización de los fenómenos naturales, sobre la base de su estructura racional.

Para los griegos, toda la naturaleza era explicable en términos de números. Pero los únicos números que existían eran los naturales y los racionales, pensados estos últimos como razón de dos naturales. Es conocida la crisis en la matemática que ocasionó el descubrimiento de $\sqrt{2}$ y de su naturaleza no racional. La aparición de estos números irracionales, puede decirse, que *"obligó a los matemáticos a crear el concepto de continuidad"* (Bell, 1996) y puso en problemas la concepción pitagórica del mundo.

En el siglo IX, el filósofo árabe al-Farabi generalizó el concepto de número a los racionales y a los irracionales positivos. Los árabes se focalizaron en este aspecto en la medición de las magnitudes, pero no era posible realizar la generalización que deseaban a partir de las operaciones, como en los restantes conjuntos numéricos. La naturaleza de la continuidad es fundamentalmente diferente. En Occidente, recién en el Renacimiento y por influencias árabes, se aceptó que los irracionales eran números. La noción de continuidad sigue a partir de este momento, íntimamente ligada a ideas físicas y geométricas.

Cuando Isaac Newton (1642-1727) matematizó algunos fenómenos físicos mediante las leyes que los rigen, debió suponer que tanto el tiempo, como el espacio son continuos:

> *...“Considero el tiempo como fluyendo o incrementando con un flujo continuo y otras magnitudes como incrementando continuamente en el tiempo”...* (Rigo Limini, 1994)

Sólo a finales del siglo XIX pudo formalizarse la idea de continuidad y dar definiciones satisfactorias para los números reales. Durante la segunda mitad de este siglo, los números reales fueron caracterizados como un campo ordenado completo arquimediano. Esto fue posible gracias a los trabajos de Cantor, Dedekind y Weierstrass en relación con la fundamentación del número real. Con estas definiciones, la recta numérica real se “completó”, se rellenaron los “huecos” existentes entre los números racionales. La recta real logró finalmente legitimar formalmente su continuidad. Esta definición permitió establecer con claridad la equivalencia entre la continuidad numérica y la continuidad geométrica de la recta.

La continuidad geométrica a través de la historia

Hasta fines del siglo XIX, en geometría, la continuidad del espacio se dio por sentada, era un concepto que no se ponía en discusión, que no se planteó como la posibilidad de que pudiera traer consigo un problema. Es conocida la demostración dada por Euclides (Siglo III a.C.) en sus Elementos para su Proposición 1.1. Esta proposición afirma la existencia de triángulos equiláteros. Para demostrar su existencia, es necesario algún postulado de continuidad. Euclides lo aceptó tácitamente en su obra; se tardaría veintidós siglos en enunciarlo explícitamente, quizá porque la atención de quienes se dedicaron a la geometría, se centró hacia el cuestionamiento del quinto postulado.

David Hilbert (1862-1943), en *Fundamentos de la Geometría*, introdujo un grupo de axiomas de continuidad. La genialidad de Hilbert, con respecto a este tema, consistió en darse cuenta de que la continuidad debía ser explícitamente enunciada a través de un gupo de axiomas para que pudiera usarse en la geometría. En la primera versión de Hilbert, aparece un sólo axioma en el grupo de continuidad: el de Arquimedianedad o de medición: Posteriormente, Hilbert reconoció la necesidad de añadir otro axioma en este grupo: el axioma de plenitud o de integridad: Con estos enunciados previos, no cabe duda de la corrección de las demostraciones geométricas como la de Euclides.

Otros matemáticos posteriormente propusieron axiomáticas equivalentes, en las cuales ya no faltó la idea de continuidad.

Existen sistemas geométricos que no satisfacen la continuidad, al postular la continuidad se establece una equivalencia entre el continuo aritmético y el geométrico y es posible establecer una biyección entre los números reales y los puntos de la recta.

Pero, al llegar a este punto de nuestro análisis, cabe entonces preguntarse: ¿Por qué transcurrieron tantos siglos antes de que esta idea surgiera? Quizá esto se relacione con la aparición de paradojas en relación con los conceptos de infinito y continuidad. El concepto de continuidad no sea realmente tan intuitivo como puede parecer a simple vista y merece un cuidadoso tratamiento.

La continuidad, el infinito y las paradojas

La paradoja de Zenón fue enunciada hace veinticinco siglos por Zenón de Elea, un discípulo de Parménides hacia el 450 a.C. Aparentemente, una de sus intenciones era probar la inconsistencia de las ideas pitagóricas respecto del número. Se ocupó de tres problemas: lo infinitesimal, lo infinito y la continuidad, los tres tratados a partir del movimiento y las contradicciones a que su análisis conducía.

La principal objeción de Aristóteles a Zenón, consistió en la distinción entre infinito por suma e infinito por división. Si se considera una unidad de longitud y se la suma infinitas veces, se obtiene una distancia ilimitada no recorrible en un tiempo finito. Pero si se prefigura lo ilimitado conforme a un procedimiento "en cierto modo opuesto", como el llevado a cabo por Zenón, dividiendo la unida de longitud en infinitos intervalos, entonces la infinitud puede considerarse agotable en un intervalo limitado de tiempo. Para Zenón, el absurdo se basa en una doble contradicción: la existencia de algo infinitamente pequeño que conduce a algo infinitamente grande, o sea la presencia de algo finito e infinito a la vez.

La concepción griega del espacio y del tiempo

El espacio físico, percibido inicialmente por los sentidos y sometido posteriormente a un proceso de idealización, tuvo para los griegos un papel fundamental para el análisis del

espacio geométrico. La concepción griega del espacio estuvo basada en experiencias sensoriales elementales, como por ejemplo en la noción de distancia entre cuerpos. Esta se comprende al poner entre los dos cuerpos un tercer cuerpo que está en contacto con ellos y que se mide. La idealización de la distancia entre cuerpos conduce al concepto de longitud.
De manera similar, la percepción de partículas materiales pequeñas conduce a la noción de punto y la de hilos muy delgados a la de recta. La intuición de que la distancia entre dos cuerpos puede ser fraccionada indefinidamente se conecta con la idea de que la recta, que tiene longitud está formada por puntos que no la tienen.
Pensar en la noción de continuidad temporal no es menos complicado. El concepto de tiempo se basa en las relaciones de "antes" y "después". Sin embargo el continuo temporal no tiene en la matemática tanta fuerza como el continuo geométrico. Aristóteles abordó el tema de la continuidad en su *Física*, considerándola como una propiedad esencial del movimiento, el tiempo y las magnitudes. Para él, el concepto de continuidad está caracterizado por una especie de "contigüidad" que conecta elementos que se mantienen unidos, en contacto. Según la concepción aristotélica, un segmento rectilíneo es un continuo en el que las partes y los puntos tienen existencia sólo en potencia. Sólo los extremos del segmento tienen existencia en acto. Esta visión de la continuidad, da la posibilidad de eludir el problema de que todo punto de una recta, aunque tenga sucesores, no tiene un sucesor inmediato. Esta concepción aristotélica es adecuada para el estudio de la recta racional, pero no de la recta real.
El continuo geométrico, tal como lo consideramos en la actualidad, tiene una característica fundamental que lo diferencia del continuo aristotélico: sus elementos, los puntos de la recta, tienen existencia actual, mientras que para Aristóteles, su existencia era potencial, o sea que no todos los elementos del conjunto son considerados como que existen simultáneamente. La visión griega del infinito corresponde a la idea de que el matemático no opera simultáneamente con todos sus elementos, sino que puede llegar a construirlos cuando los necesite. Esta concepción se mantuvo durante siglos, alimentada por una inmensa cantidad de paradojas y dificultades que recién fue solucionada con la teoría de Cantor basada en algunos precursores como Galileo y Bolzano.

La visión de los alumnos

Para reflexionar acerca de las causas por las que los alumnos tienen dificultades en la comprensión de los conceptos de continuidad y límite, es interesante analizar qué respuestas dan a preguntas relacionadas con la continuidad. Presentamos a continuación algunas experiencias llevadas a cabo por medio de encuestas y preguntas. El planteo de algunas de estas cuestiones en el aula permite conocer los preconceptos e ideas que manejan sobre el infinito, la continuidad y sus consecuencias en las distintas edades.
He aquí algunas de las situaciones problemáticas que hemos planteado, basándonos en otras investigaciones llevadas a cabo (Núñez Errázuriz, 1997), (Romero, 1996).

1. *Una hormiga quiere recorrer un lado de la mesa. Primero debe avanzar la mitad del trayecto, enseguida debe continuar con la mitad de lo que le queda, luego con la mitad de lo que le queda y así sucesivamente. ¿Llegará alguna vez al otro lado de la mesa?*
2. *Imagina que dispones de un microscopio de gran potencia, que te permite aumentar los objetos tanto como quieras. Enfocas un trozo de recta. Describe lo que ves y qué ocurre a medida que aumentas la potencia del microscopio.*

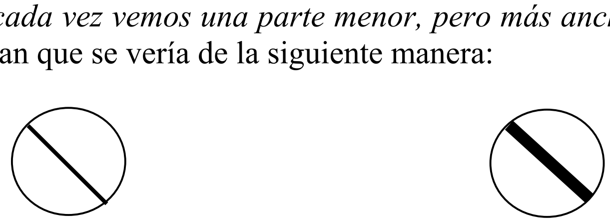
Para obtener de los alumnos las respuestas a estas preguntas, indagando en los errores conceptuales que pudieran tener, es importante permitir el uso de diversos materiales: calculadoras, lápices, reglas, etc., y observar cómo aplican cada uno de ellos para llegar a sus conclusiones, a cuáles recurren según las edades, y en cada caso, cuáles son los pasos que conducen el proceso de pensamiento.

Es evidente la analogía entre la primera situación problemática y la paradoja de Zenón.
Por lo tanto, las respuestas que pueden obtenerse son de tres tipos: algunos responden que la hormiga llega a destino, otros que no aunque en realidad se aproxima mucho a éste y finalmente una tercera postura es una sucesión de argumentos dubitativos que oscilan en la defensa de respuestas diferentes y a menudo contradictorias. Las posturas asumidas en este caso varían notoriamente según las edades.

- Los niños pequeños (de primer ciclo de EGB), en su gran mayoría considera que se trata de una pregunta trivial: la hormiga obviamente llega a recorrer la mesa, solo en casos aislados titubean, pero finalmente responden que llega a su meta.
- En el segundo ciclo, las respuestas son más dubitativas, oscilando entre los argumentos, con respuestas tales como: *"va avanzando la mitad, luego la mitad de la mitad, pero llega a faltarle una mitad muy chiquita, tan chiquita que con un paso más llega*". A estas edades es aún difícil que acepten las iteraciones infinitas, son pocos los casos que afirman que no alcanza la meta.
- Ya en el tercer ciclo de EGB, aunque la mayoría afirman que se llega al otro extremo de la mesa, a pesar de que tome mucho tiempo, gran cantidad titubea al realizar el análisis, llegando incluso en algunos casos a reconocer que la dificultas del problema se basa en el concepto de infinito a través de intervalos infinitamente pequeños. A pesar de estos razonamientos, no se llega a niveles de abstracción.
- Recién se detecta claramente la presencia de una paradoja en algunos de los jóvenes de entre 16 y 18 años (nivel polimodal). Sin embargo no se presentó en ningún caso el concepto matemáticamente correcto de que la serie considerada converge a L.

La segunda situación problemática consiste en cierto modo en la descripción de la recta, el interés principal consiste en analizar la evolución de lo observado a medida que aumenta el aumento del microscopio. En este caso, a medida que aumenta el nivel de abstracción y de comprensión conceptual del concepto de recta, se detecta la invariabilidad de la respuesta obtenida. Sin embargo, son pocos los casos en que se pone de manifiesto que la recta no tiene espesor.

- Las respuestas obtenidas, aún en jóvenes de 16 a 18 años, permiten reconocer dos visiones de la recta. La mayoría perciben la recta como una cinta delgada, a través de respuestas como: *"cada vez vemos una parte menor, pero más ancha"*, incluso llegan a dibujar lo que afirman que se vería de la siguiente manera:



Menor aumento   Mayor aumento

- Esta es también la posición de la mayoría de los niños de los primeros ciclos de

EGB. Se trata de una visión unida al mundo físico, a la visión de objetos a través del microscopio, sin la abstracción suficiente como para pensar en la estructura molecular.

- Otra de las respuestas comunes, aunque no tanto como la anterior, es considerar a la recta como una sucesión de puntos, muchas veces percibidos como esferas de dimensiones pequeñas. Aparecen algunas de las respuestas como: *"veo muchos puntos muy juntitos, que parecen unidos, a medida que aumenta la potencia del microscopio, veo más puntos entre punto y punto"*. Quienes optan por esta posición, reconocen el orden entre los números (puntos) y aparece bajo esta óptica la densidad de la recta, pero no la continuidad.

Algunas reflexiones finales

Hemos presentado distintas visiones del concepto de continuidad que tienen los alumnos en las diversas etapas de la escuela. Las respuestas obtenidas deben ser retomadas en clase para orientar a los alumnos hacia la construcción el concepto de continuidad. Sin lugar a dudas, el modelo de recta que van forjando tiene gran influencia en la comprensión de conceptos del análisis matemático. La geometría es una gran aliada a través del proceso de visualización, para llegar a la internalización de la noción de continuidad. Una percepción incorrecta de la propiedad de completitud de los números reales, unida tan sólidamente a la continuidad de la recta, pueden dificultar la comprensión de nociones posteriores. Por ello es de gran importancia hacer hincapié en la enseñanza de estos conceptos.

No se debe confiar en que comprenderán intuitivamente la continuidad de la recta por sí solos. Este concepto debe ser abordado explícitamente en la escuela, para estar seguros de su real comprensión. Cuando un concepto matemático ha tardado tantos siglos en hacerse evidente, esto demuestra que su comprensión no es sencilla y por lo tanto, su enseñanza no puede tomarse a la ligera.

Las situaciones problemáticas presentadas permiten conocer tanto los preconceptos que los alumnos poseen, como la manera en que su visión de la continuidad evoluciona. Trabajar en clase sobre estas preguntas u otras similares, puede ser de gran utilidad para clarificar ideas y buscar nuevas estrategias didácticas para abordar el tema del continuo, allanando de esta manera el aprendizaje de otras ideas posteriormente.

El enfoque histórico de la evolución del concepto de continuidad, contribuye a la interpretación y conocimiento de las dificultades existentes en su comprensión y de esta manera a la búsqueda de nuevas estrategias para abordar su aprendizaje.

Bibliografía

Bell, E. T. (1996). *Historia de las Matemáticas.* México: Fondo de Cultura Económica.

Crespo Crespo, C. (2001, noviembre). *Acerca de la comprensión del concepto de continuidad*. En Boletín de SOAREM nº 11 (pp.7-14). Buenos Aires: SOAREM.

Euclides (1991). *Elementos. Libros I-IV*. Madrid: Gredos.

Hilbert, D. (1953). *Fundamentos de la Geometría.* Madrid: Publicaciones del Instituto Jorge Juan.

Núñez Errázuriz, R. (1997). *Infinito de lo pequeño y desarrollo cognitivo: Paradojas y espacios consensuales*. En Educación Matemática. Vol. 9. Nº 1. (pp. 20-32). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Rigo Limini, M. (1994). *Elementos históricos y sicogenéticos en la construcción del contínuo matemático. 1ª Parte.* En Educación Matemática. Vol. 6. Nº 1. (pp. 19-31). *2ª Parte.* Vol. 6. Nº 2. (pp. 16-29). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Romero, C. (1996). *Una investigación sobre los esquemas conceptuales del continuo. Ensayo de un cuestionario.* En Enseñanza de las ciencias. Vol. 14. Nº 1. (pp. 3-14). Barcelona: Universitat Autònoma de Barcelona.

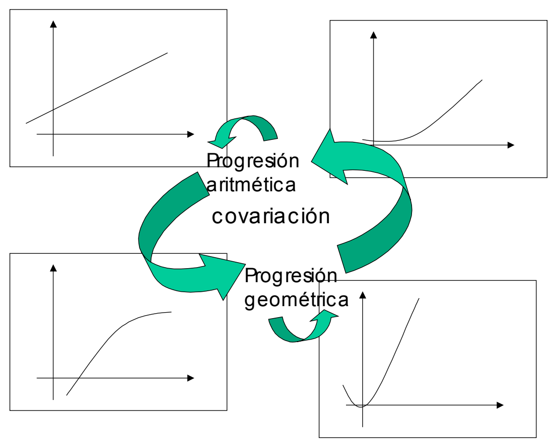
LA COVARIACIÓN COMO ELEMENTO DE RESIGNIFICACIÓN DE LA FUNCIÓN LOGARITMO

Marcela Ferrari Escolá
Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
mferrari@mail.cinvestav.mx , mferrari@uaeh.reduaeh.mx

Resumen
En este artículo se discute la noción de covariación como argumento para el enriquecimiento del significado escolar de la función logaritmo. Esta afirmación haya sustento en la hipótesis epistemológica presentada en Ferrari (2003) respecto a que, el diseño de situaciones de aprendizaje que involucren la covariación de las progresiones aritmética y geométrica podría generar una apropiación más robusta de la noción logaritmo. Se presenta entonces una breve reflexión sobre un ejemplo que se está desarrollando en torno de la función logaritmo enmarcado en la aproximación socioepistemológica.

A partir de nuestra revisión de artículos y reportes de investigación, que involucran a la función logaritmo, nos atrevemos a decir que poco es lo que se ha investigado y reportado a la comunidad científica respecto a este tema. La mayoría de los escritos se acercan más a notas de clase o sugerencias de abordar el tema de maneras alternativas más que de aportar a la problemática de su apropiación.
Consideramos que esto responde a la idea, muy arraigada en el medio, que estudiar la problemática propia del aprendizaje del concepto de función basta para comprender lo que sucede con la apropiación de distintas funciones, por ejemplo, los logaritmos.
Basta mirar los índices y resúmenes de las distintas revistas científicas y de difusión de nuestra disciplina, para observar la profusión en el abordaje de la problemática de la apropiación de la noción de función. En efecto, la importancia conferida a la misma desde el paradigma euleriano, al convertirla en eje del estudio de las matemáticas, y las dificultades propias de una noción que admite varias concepciones y representaciones, se ve reflejada en el interés por su estudio de investigadores de la más diversa índole.
Nuestro interés por el estudio de los logaritmos partió, en un inicio, del hecho que, según se reportara en Ferrari (2003), la manipulación errónea de los mismos da cuenta de la no apropiación de la noción logaritmo, producto de no ser construida escolarmente. En ese trabajo se reportó la dislexia escolar producto del quiebre entre la presentación operativa de los logaritmos y la presentación funcional de los mismos.
Desde nuestra perspectiva cada función posee su propia naturaleza, misma que la distingue de las demás así como de las problemáticas inherentes a su apropiación. En este sentido, comprender la noción de $f(x) = x^2$ no es equivalente a la comprensión de $f(x) = \ln x$, apartándonos por tanto de la idea que "saber función" equivale a comprender todas y cada una de las funciones conocidas.
Consideramos que estudiar a profundidad la problemática propia de la noción de función resta importancia o pertinencia a hacerlo con funciones particulares. Al cuestionar esto desde nuestra investigación y adherirnos a la idea de que es vital reconocer la naturaleza de cada función para abordarla, nos vemos obligados a reflexionar y analizar las propuestas que existen en el medio sobre la covariación como una manera alternativa de abordar el tema de función,.
La pertinencia de esta idea radica en la hipótesis epistemológica surgida del análisis

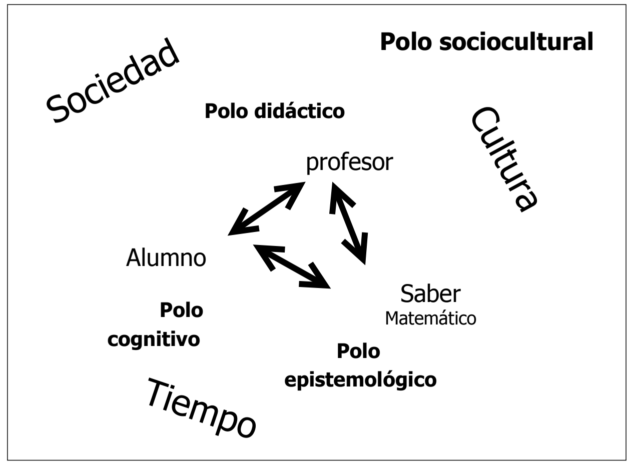
preliminar que se realizara en Ferrari (2003), a saber: “el uso explícito de la covariación de progresiones geométricas y aritméticas podría constituirse en un importante elemento de resignificación de los logaritmos” y, si hemos de ser consistentes con la misma, consideramos necesario conocer las investigaciones ya reportadas en literatura propia de nuestra disciplina respecto fundamentalmente a covariación.
La consulta de varios diccionarios como primer acercamiento a la explicitación de la noción eje de esta investigación nos lleva a concluir que la palabra “covariación” no está definida en el léxico español, y que aquellos textos que la mencionan en realidad se refieren a la medida de “correlación” que en textos especializados de Estadística es denominada “covarianza”.
Sin embargo, consideramos que la potencialidad de esta noción radica en que nos permite “remirar” las funciones escolares tales como polinomios, expo-nenciales, potencia y logarítmicas, y caracterizarlas como la “covariación de progresiones aritméticas y geométricas”.



Varios investigadores se han interesado en el estudio de la covariación como una herramienta para la comprensión tanto de la noción de función (Confrey y Smith, 1995; Carlson, 1998; Carlson et al., 2002; Kaput 1992) como de algunos conceptos del Cálculo, tales como: la derivada (Zandieh, 2000), el teorema fundamental del Cálculo (Thompson, 1994) o el concepto de límite (Contrill et al, 1996; Carlson et al., 2001).
En (Carlson, 1998; Saldhana & Thompson, 1998; Carlson et al., 2001) se afirma que el razonamiento covariacional ha mostrado ser una importante habilidad para interpretar, describir y representar el comportamiento de funciones que modelan fenómenos dinámicos. En tanto que, Confrey y Smith (1994, 1995), explican la noción de covariación como aquella que vincula el movimiento entre valores sucesivos de una variable coordinándolo con un movimiento entre los correspondientes valores sucesivos de la otra variable. Consideran también que, en la aproximación covariacional, una función es comprendida como la yuxtaposición de dos secuencias, cada una de las cuales es generada independientemente a través de modelar datos. Desde nuestra perspectiva, al referirnos a la covariación estaremos considerando:
La relación entre las variaciones simultáneas de dos cantidades. Así, una recta puede caracterizarse como la covariación entre progresiones aritméticas, en tanto que el logaritmo, como la covariación entre una progresión geométrica y una aritmética, elementos que se desarrollarán más adelante.

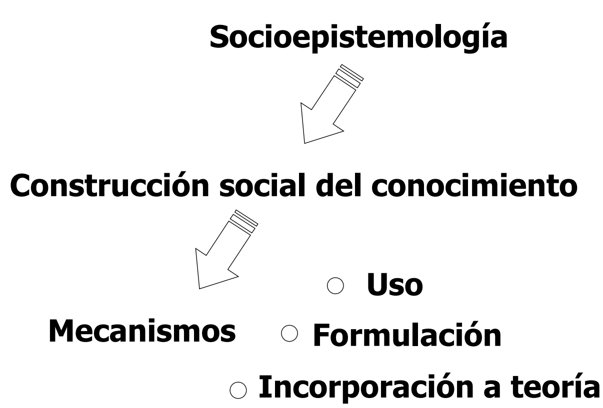
Marco Teórico
Este trabajo haya sustento en la aproximación socioepistemológica, que según Cantoral & Ferrari (2003) es una aproximación teórica de naturaleza sistémica que permite tratar los fenómenos de producción y de difusión del conocimiento desde una perspectiva múltiple al

incorporar el estudio de las interacciones entre la epistemológica del conocimiento, su dimensión sociocultural, los procesos cognitivos asociados y los meca-nismos de institucionalización vía la enseñanza. Tradicionalmente las aproximaciones epistemológicas asumen que el conocimiento es el resultado de la adaptación de las explicaciones teóricas con las evidencias empíricas, ignorando en sobremanera el papel que los escenarios históricos, culturales e institucionales desempeñan en toda actividad humana. La socio-epistemología por su parte, plantea el examen del conocimiento social-mente situado, considerándolo a la luz de sus circunstancias y escenarios sociales.



Uno de los supuestos básicos de la socioepistemología es que el cono-cimiento se construye, siendo tal construcción de carácter social donde las prácticas sociales, como acción con intencionalidad, cobran un papel relevante.

En este sentido, en Ferrari (2003) se reporta un análisis socioepistemológico de los logaritmos. Se distinguen tres etapas en la consolidación de esta noción dentro del discurso matemático al tomar como eje central las relaciones entre las progresiones aritméticas y geométricas, argumento utilizado por Napier para su primera definición. Como primer momento, consideramos a *los logaritmos como transformación numérica*. Se desarrollan fundamentalmente en el contexto numérico comenzando con ideas intuitivas de transformar para facilitar operaciones intentando regresar a la aritmética, es decir, utilizar sólo sumas y restas. Así, de la influencia de las primitivas formulaciones de las progresiones y de las relaciones entre ambas surge la definición de los logaritmos.



Como segundo momento se define, *los logaritmos como modelizadores.* En esta etapa se determinan sus características geométricas; logran pertenecer al discurso matemático de principios del siglo XVII; se les dota de una gráfica al adecuarlos al nuevo registro “algebraico-geométrico”; logran completar un modelo matemático de la cuadratura de curvas representativas de funciones potencia; permiten describir fenómenos físicos y se descubren nuevas formas para calcularlos en series de potencias todo lo que permite que accedan al discurso matemático del siglo XVIII y adquieran el status de función.

El tercer momento corresponde a la etapa de *los logaritmos como objetos teóricos*, conceptos trabajados en la enseñanza actual y que los encuentra escindidos de las argumentaciones necesarias, las cuales pueden contribuir a dotarlos de un mayor sentido, apartándolos de su tratamiento actual que los reduce a una aplicación algorítmica de sus propiedades apareciendo en el aula sin ningún antecedente analítico que pudieran haber adquirido los estudiantes hasta ese momento.

Discusión

El trabajo en el que nos hayamos abocados en este momento es el de desarrollar los argumentos que tan fértiles resultaron para el segundo momento, no con el fin de reproducirlos tal cual se discutieron en el siglo XVIII sino para comprender a profundidad sus implicaciones, su potencialidad, la manera de resignificar a partir de los mismo a los logaritmos.

Como mencionáramos en el parágrafo anterior, la covariación entre una progresión geométrica (aquella sucesión de números tal que el cociente de dos términos consecutivos es constante) y una progresión aritmética (aquella sucesión de números tal que la diferencia entre dos términos consecutivos es constante) fue fundamental para el desarrollo y consolidación de los logaritmos como una poderosa herramienta matemática que perdura hasta nuestros días.

Xn+1 / Xn	**X**	**Y**	**Yn+1 - Yn**
2	**1**	**0**	
2	**2**	**1**	1
2	**4**	**2**	1
2	**8**	**3**	1
2	**16**	**4**	1
2	**32**	**5**	1
2	**64**	**6**	1
2	**128**	7	1
2	**256**	**8**	1

Si bien, para Napier (1614- 1619) para definir logaritmos sólo basta asociar una progresión geométrica con una aritmética, no debemos perder de vista que para mantener el álgebra de los logaritmos que conocemos y manejamos hoy en día, se debe convenir que $\log_a 1 = 0$ idea propuesta a Napier por Brigg en 1616 con el fin de calcular logaritmos a los números y extender la idea de “facilitar las cuentas” creada sólo para el ámbito de la trigonometría. En este sentido, decimos que la práctica social que se puede asociar a los logaritmos, como aquella que le dio vida, es la de “multiplicar sumando”.

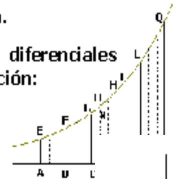
Este argumento fue el nexo entre las distintas representaciones y usos que se les dieron a los logaritmos, tanto dentro como fuera de la matemática. Las ideas que nos resultan interesantes para discutir la construcción escolar de la función logaritmo tienen como argumentos de referencia los siguientes:

Argumentos gráficos - geométricos
(Agnesi – 1748)

Las abscisas han sido construidas en progresión aritmética y las ordenadas en progresión geométrica.

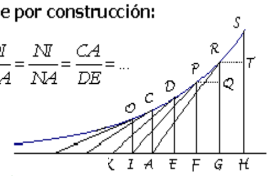
Establece que los diferenciales guardan la misma proporción:

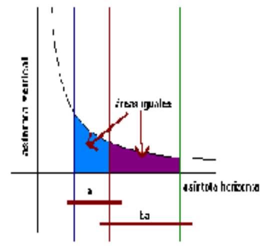
$$\frac{dy}{dz}=\frac{y}{z}\Rightarrow\frac{dy}{y}=\frac{dx}{a}$$



Semejanza de triángulos, estableciendo que por construcción:

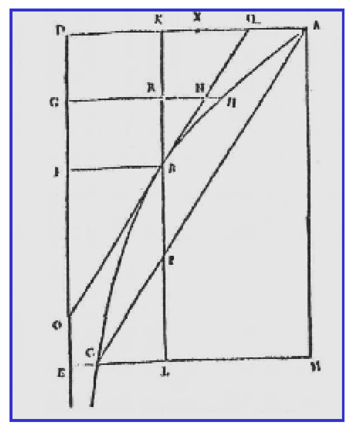
$$\frac{OI}{CA}=\frac{NI}{NA}=\frac{CA}{DE}=\dots$$





Completar patrón de cuadraturas

Gregory St. Vincent (1647) establece: "*si las paralelas de una asíntota son trazadas entre la hipérbola y la otra asíntota, de tal forma que las áreas sucesivas de los cuadriláteros mixtilíneos así formados sean iguales, entonces las longitudes de tales paralelas forman una progresión geométrica*".



De los ejemplos de modelación de los logaritmos antes citados se percibe que el argumento que los engloba y por tanto refleja la naturaleza de los logaritmos, es justamente la covariación entre una progresión geométrica y una aritmética, misma que se está utilizando en los diseños de secuencias de aprendizaje.

Huygens (1690)

... para encontrar los espacios recorridos en ciertos tiempos, cuando caen los cuerpos o suben perpendicularmente, y para conocer las velocidades al cabo de estos tiempos, había una línea curva, que he examinado largo tiempo antes, que es de gran uso en esta investigación. Se le puede llamar "*Logaritmique*" o "*Logistique*", no veo que se haya dado algún nombre aunque otros la hayan considerado antes. Estando ABC, que tiene una línea recta DE como asíntota, en la cual si se toman partes iguales cualesquiera, como DG, GF, etc. y por los puntos D, G, F; etc. se trazan perpendiculares a la curva, se ve que las líneas DA, GH, FB serán proporcionalmente continuas.

La investigación de la que se deriva este artículo sigue en curso, esperándose contar con resultados que evidencien la robustez argumentativa de la covariación para construir la función logaritmo para la escuela.

Bibliografía

Cantoral, R. & Ferrari, M. (noviembre de 2003, en prensa) Un estudio socioepistemológico de la Predicción. *La matemática e la sua didattica 4.*

Carlson, M. (1998). A croos-sectional investigation of the development of the function concept. En E. Dubinsky, A. H. Schonfeld & J. J. Kaput (Eds.) *Research in collegiate mathematics education, III, Issues in mathematics Education, 7,* 115-162.

Carlson, M. Larsen, S. & Jacobs, S. (2001). An investigation of covariational reasoning and its role in learning the concepts of limit and accumulation. En: R. Speiser, C. Maher & Ch. Walter: *Proceeding of the Twenty-third Annual Meeting. North American Chapter of the international group for the Psychology of mathematics education*. Vol 1. PME-NA XXIII. October 18-21, 2001. Snowbird, Utah. USA: Eric.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S. & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Educational 23*(5), 352, 378.

Confrey, J. & Smith, E. (1995) Splitting, cavariation, and their role in the multiplicative unit. *Educational Studies in Mathematics, 26*, 135-164.

Confrey, J. (1998). Building mathematical structure within a conjecture driven teaching experiment on splitting. En: S. Berenson, K. Dawkins, M. Blanton, W. Coulombe, J. Kolb, K. Norwood & L. stiff: *Proceeding of the Twentieth Annual Meeting. North American Chapter of the international group for the Psychology of mathematics education*. Vol 1. PME-NA XX. October 31-November 3, 1998. North Carolina State university. Raleigh, North Carolina USA. USA: Eric.

Contrill, J., Dubinsky, E. Nichols, D. Schwingendorf, K., Thomas, K. and Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginnig with a coordinated process schema. *Journal of Mathematical Behavoir 15,* 167-192.

Ferrari. M. (2003). *Una vision socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo*. México: Grupo Editorial iberoamérica.

Kaput, J. J. (1992). Patterns in students' formalization of quantitative patterns. In G. Harel & E. Dubinsky (Eds.) *The concept of function: Aspects of Epistemology and Pedagogy, MAA Notes, Vol 25* (pp. 290-318) Washington, DC: Mathematical Association of America.

Rasmussen, C. (2000). New directions in differntial ecuations: A framework for interpreting students' understandings and difficulties. *Journal of Mathematical Behavior 20,* 55-87.

Saldhana, L. & Thompson, P. (1998). Re-Thinking covariation from a quantitative perspective: Simultaneous continuous variation. En: S. Berenson, K. Dawkins, M. Blanton, W. Coulombe, J. Kolb, K.

Norwood & L. stiff: *Proceeding of the Twentieth Annual Meeting. North American Chapter of the international group for the Psychology of mathematics education*. Vol 1. PME-NA XX. October 31-November 3, 1998. North Carolina State university. Raleigh, North Carolina USA. USA: Eric.

Thompson, P. W. (1994). Images of rate and operational understanding of the fundamental theorem of calculus. *Educational studies in mathematics 26.* 229-274.

Zadieh, M. (2000). A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivative. En E: Dubisnky, A . Shoenfeld & J. Kaput (Eds.): Research in collegiate mathematics education IV (vol 8, pp. 103-127). Providence, RI: American Mathematical Society.

LA GEOMETRÍA ¿CÓMO SE CONCIBE?

Ismenia Guzmán R.
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
iguzmanr@vtr.net

Resumen
En esta conferencia tratamos algunos resultados que hemos obtenido en un Proyecto sobre la Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría Plana apoyado por la dirección de Investigación de la PUCV. La investigación se refiere la enseñanza y aprendizaje de la Geometría, por ello tomamos en cuenta la formación de los profesores, su concepción sobre la Geometria y su quehacer respecto a las exigencias de la Institución (Programas, Establecimiento Escolar). Las informaciones las recogimos a través de una Encuesta con preguntas diversas y generales (para profesores) y Dos situaciones Problema que entran de lleno en el terreno geométrico propuestas a profesores y alumnos. Las dos situaciones problemas tienen que ver con paralelógramos en que se solicita dos tareas, una de construcción y descripción y otra de análisis y demostración. Los problemas corresponden a la unidad de transformaciones del curso de primer año medio. Estas situaciones las hemos sometido a una población de 50 profesores de liceos y establecimientos particulares subvencionados o particulares pagados y 50 alumnos de 1º y 2º año medio, de esos mismos establecimientos. La Encuesta de 14 preguntas la propusimos a 16 profesores con diferente experiencia docente. El marco teórico previsto para el análisis de la información es el enfoque cognitivo de Raymond Duval sobre la enseñanza de la Matemática y en particular de la Geometría

El instrumento encuesta

1. ¿En qué año obtuvo usted. su título de Profesor de Matemáticas?
   ....

2. ¿En qué institución realizó sus estudios de Pedagogía en Matemáticas?
....

3. ¿Cuántos años de experiencia docente tiene?
....

4. ¿Estaba contemplada en el plan de su Carrera asignaturas de Geometría? ¿Cuáles?
....

5. ¿Qué temas de Geometría estudió usted. en la Universidad? Enumere los principales
....

6. En caso de no haber tenido cursos de Geometría en su formación inicial ¿Ha usted. estudiado los contenidos a enseñar en forma autodidacta o a través de cursos de perfeccionamiento?
....

7. Para abordar las materias de Geometría. ¿Se apoya usted. en textos ¿Cuáles? ¿Tiene apuntes propios?
....

8. ¿En cuáles cursos ha enseñado usted. Geometría?
....

9. ¿Qué unidades ha podido abordar?
....

10. ¿Exige usted. que sus alumnos trabajen con instrumentos de Geometría? ¿Cuáles?
....

11. Para favorecer el Aprendizaje en Geometría, ¿prefiere usted. proponer construcciones geométricas, es decir con uso de regla no graduada y compás o bien acepta construcciones con otros instrumentos, como transportador, escuadra, regla graduada...

....

12. Para favorecer el Aprendizaje en Geometría, ¿Usted. prefiere enunciar las propiedades de las figuras involucradas ilustradas por un dibujo, sin demostraciones, ni construcciones?

....

13. ¿Acepta usted que sus alumnos justifiquen las propiedades tratadas en clases mediante plegados en papel, o mediciones con escuadra, regla transportador o compás?

....

14. Exige usted a sus alumnos justificaciones que se apoyen en las propiedades de las figuras involucradas y no en las informaciones visuales que les proporciona el dibujo?

....

Análisis de la encuesta

La encuesta la contestaron 16 profesores de Enseñanza Media, dos con 30 o más años de experiencia; 3 entre 20 y 30 años de experiencia; 6 entre 10 y 20 años de experiencia y 5 con menos de 10 años de experiencia. Entre los cuales hay egresados PUCV, de la PUC, la U de Chile de Valparaíso (hoy U de Playa Ancha), U de Talca, U de Chile de Arica, Universidad Técnica del Estado, hoy USACH, U de Chile de Antofagasta.

Con respecto a la pregunta si la Geometría estaba contemplada en su formación, 15 profesores declaran explícitamente haber tenido cursos de Geometría Euclidiana, Geometría Plana, Geometría Analítica, Geometría del Espacio, Geometría 1 y Geometría 2. Esta pregunta no nos ha dado mayor información, ya que no se sabe a qué se refiere cada una. La Geometría Euclidiana, Geometría Plana y Geometría podrían tratarse del mismo ramo.

La pregunta ¿Qué temas de geometría estudió usted en la Universidad, enumere los principales, no ha sido bien comprendida, tres omiten la respuesta y sólo tres de 16 señalan los siguientes temas: triángulos, circunferencias, ángulos, polígonos. El resto enumera Asignaturas, como Geometría Euclidiana, Geometría Analítica, Trigonometría, Geometría Vectorial.

Cuatro profesores declaran que su formación en Geometría ha sido autodidacta y otros cinco declaran haber tomado cursos de perfeccionamiento para actualizar su formación, siete omiten la respuesta.

Constatamos que las respuestas con respecto a su formación son heterogéneas, y cruzando algunas de estas respuestas hemos detectado que los profesores más jóvenes pueden enumerar temas de Geometría que han estudiado. Esto es coherente con la ausencia de la Geometría en los currículos pasados. De ahí que profesores señalen ser autodidactas y otros declaran haber estudiado Geometría gracias a cursos de perfeccionamiento.

Esto nos parece particularmente grave, ya que los profesores deben tratar materias sobre las cuales no han tenido una formación adecuada.

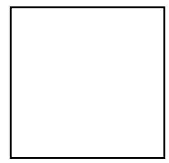
Con respecto a la pregunta sobre los textos de apoyo, 5 profesores declaran que utilizan los textos del Mineduc y apuntes personales, 8 dicen apoyarse en textos antiguos no en vigencia como Geometría de Phoenich, Omer Cano, Baldor, Alcayaga, Mercado de Schuler

(todos estos textos son clásicos de más de 30 años) , también mencionan a Santillana, Arrayán y textos de nivel universitario o páginas web. Tres profesores dan otra respuesta.
Esta respuesta nos muestra la falta de actualidad en los textos de apoyo que prefieren los profesores.
Con respecto a la pregunta sobre experiencia docente en Geometría, 12 profesores señalan haber hecho clases de Geometría en todos los cursos de Enseñanza Media, algunos de ellos también han trabajado en 7º y 8º Dos señalan tener experiencia de Séptimo a Primero Medio. Dos dan otras respuestas.
Respecto a la pregunta sobre los temas que abordan en clases, Tres señalan explícitamente que han tratado Semejanza, Congruencia, Geometría Analítica .
Cuatro profesores anotan : Ángulos, Construcciones (regla y compás), Perímetros, Áreas, Volúmenes. Cinco omiten y cuatro dicen desde Ángulos al Teorema de Thales y Euclides.
Con respecto al uso de útiles de geometría, 10 profesores declaran exigir compás, reglas, transportador, escuadra. Tres dicen no exigir, y otros 3 no responden.
Respecto a la pregunta sobre las tareas de construcción si da preferencia a las mecánicas o geométricas, Seis profesores señalan que prefieren las mecánicas, Cuatro las geométricas, dos de los cuales dicen ambas y Cuatro profesores omiten.
Con respecto a la pregunta ¿Ud. prefiere enunciar las propiedades de las figuras involucradas ilustradas por un dibujo, sin construcciones ni demostraciones?
Cuatro profesores dicen que prefieren dibujo y demostraciones. Dos profesores señalan que prefieren que los alumnos descubran las propiedades y luego “yo formalizo”, cinco profesores dicen “ prefiero el dibujo, enunciar y verificar”, cinco profesores no contestan. esa pregunta.
Las respuestas sobre estas dos últimas preguntas construcciones mecánicas o geométricas y sobre el enunciado de propiedades de figuras involucradas en el dibujo, no son del todo coherentes, puesto que aceptan apoyarse en los dibujos para verificar, una minoría señala que pide demostraciones, y la mayor parte dice que prefiere las construcciones mecánicas, es decir aquellas apoyadas en instrumentos y no en propiedades. En consecuencia a qué demostraciones se refieren? ¿Cómo conciben la tarea de demostrar en Geometría?
La respuesta a la pregunta que sigue corrobora esta incoherencia, ¿Exige Ud. a sus alumnos justificaciones que se apoyen en propiedades de las figuras involucradas y no en las informaciones visuales que las figuras les proporcionan?
Catorce profesores dicen que si y dos omiten. Esto significa que ellos consideran importantes las demostraciones geométricas de las propiedades, pero la realidad como hemos visto es que en la práctica se contentan con mediciones con reglas, escuadras o transportador, o con verificaciones por plegados u otro.
De los resultados de nuestra investigación, esperábamos encontrar elementos significativos sobre conocimientos y quehaceres. La encuesta nos da algunos elementos sobre su formación y su quehacer docente. En la parte de los problemas, hemos puesto al profesor frente a dos situaciones geométricas correspondientes a situaciones normales y corrientes de Enseñanza Media, y en posición de alumno frente al problema. Hemos podido detectar que es la visión empírica de la Geometría la que predomina en la concepción que los profesores encuestados, por sobre la concepción matemática basada en propiedades que necesitan ser demostradas. Una actitud de prueba frente a enunciados o afirmaciones, está prácticamente ausente. A continuación presentamos las dos situaciones problemas ya mencionadas.

Situación 1
(En cada una de las siguientes figuras construya con regla y compás los puntos medios de sus lados). En el cuadrado de la figura 1, construir con regla y compás, los puntos medios de sus lados. Al unir dichos puntos resulta un cuadrilátero.

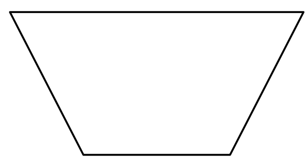
Pregunta1: ¿De qué tipo es el cuadrilátero resultante? Explique el por qué de sus afirmaciones.

Figura1



Pregunta 2: De qué tipo es el cuadrilátero resultante, si considera ahora el trapecio isósceles de la figura 2. Explique el por qué de sus afirmaciones.

Figura 2

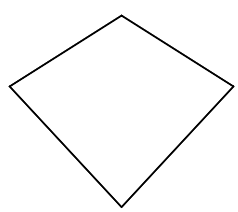


CONTINUACIÓN SITUACIÓN 1

En el volantín de la figura 3, construir con regla y compás, los puntos medios de sus lados. Al unir dichos puntos resulta un cuadrilátero.

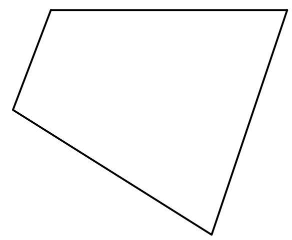
Pregunta 3: ¿De qué tipo es el cuadrilátero resultante? Explique el por qué de sus afirmaciones.

Figura 3



Pregunta 4: ¿De qué tipo es el cuadrilátero resultante, si considera ahora el cuadrilátero de la figura 4? Explique el por qué de sus afirmaciones.

Figura 4



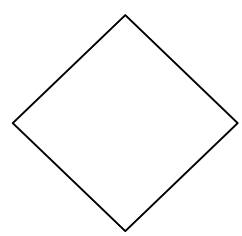
Situación 2

a) La figura 5 es un rectángulo, cuyos vértices son los puntos medios de un rombo. Construir ese rombo. Indique los pasos de su construcción ¿Cómo asegura Ud. que la figura construida es el rombo pedido? Explique.

Figura 5

b) La figura 6 es un rombo, cuyos vértices son los puntos medios de un rectángulo. Construir ese rectángulo. Indique los pasos de su construcción ¿Cómo asegura Ud. que la figura construida es el rectángulo pedido? Explique.

Figura 6



En la Conferencia analizamos algunas respuestas dadas por algunos profesores encuestados que en este resumen lamentablemente hemos debido omitir.

Conclusiones

En síntesis, la Geometría no se concibe como un cuerpo de conocimientos organizados o como un sistema matemático con definiciones, propiedades y teoremas. Las tareas de construcciones o verificaciones que se proponen en clases y en los textos de uso frecuentes, favorecen la búsqueda empírica hasta la formulación de una conjetura. La cual se comprueba por medios técnicos del tipo utilizado en los "trabajos manuales", o por verificaciones a través de mediciones o plegados. En las clases se cubre una primera etapa, nos parece bien llegar a conjeturas, pero falta la segunda etapa, fundamental para el aprendizaje de la matemática y de la geometría en particular, la de la demostración o justificación, la cual permite distinguir una definición de un teorema y sus respectivos roles. No estamos refiriéndonos a demostraciones rigurosas, sino a las explicaciones de los porqués, los cuales pueden darse según el nivel, en lenguaje natural intuitivo, o mixto (lenguaje natural y geométrico) e ir evolucionando hasta el logro de un lenguaje geométrico más formal, a finales de la Enseñanza Media.

Bibliografía

Duval R. (1992) Argumenter, démontrer, expliquer: continuité ou ruptura cognitive. *Petit* x n°31, 37-61.
Houdement C. et Kuzniak A.(2000) Formations des maîtres et paradigms géométriques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. vol 20/1, 89-115.
Guzmán R. Ismenia (1998) Registros de Representación y su incidencia en el aprendizaje de la noción de función contínua. *Voces de los estudiantes. Relime Mexico*.
Guzmán R. I.(1995) Aprendiendo geometría oon el programa Cabri geométrico.Sugerencias Metodológicas. *Publicación IMA.UCV Difusión Nacional hecha por el Ministerio de Educación*.
Guzmán, Consigliere, Acuña (1999) Potencias y Simetrías para Primer Año Medio. *Publicación IMA UCV*. Valparaíso, Chile.
Guzmán, Consigliere, Acuña (2000) Probabilidades y Semejanza de Figuras Planas para Segundo Año Medio. *Publicación IMA UCV,*. Valparaíso, Chile.
Guzmán, Consigliere, Acuña (2001) Funciones Cuadráticas y Proporcionalidad en el triángulo Rectángulo para Tercer Año Medio. *Publicación IMA UCV*. Valparaíso, Chile.

LA MATEMÁTICA EN EL CONTEXTO DE LAS CIENCIAS

Patricia Camarena Gallardo
Instituto Politécnico Nacional, México
patypoli@prodigy.net.mx

Resumen
El presente trabajo muestra los resultados de varias investigaciones educativas relacionadas con el proceso enseñanza aprendizaje de la matemática en carreras de ingeniería, en donde la matemática no es una meta por sí misma. Como es sabido, en el proceso enseñanza aprendizaje intervienen varios factores y personajes, entre los más relevantes se encuentran los alumnos, el profesor y el contenido a enseñar. Tal es el efecto de estos tres elementos que se han constituido en una de las llamadas ternas doradas de la educación. Para el desarrollo de la conferencia se toman como hilos conductores a cada uno de los tres puntos mencionados, llevando a cabo un análisis sobre cada uno de ellos y las interrelaciones que se establecen entre los mismos, siempre girando en torno a la función específica de la matemática en los niveles educativos medio superior y superior. Cada resultado que se presenta está sustentado a través de investigaciones que se han llevado a cabo a través de prácticamente veinte años, las cuales han convergido a constituir una teoría educativa que lleva por nombre el título de la presente conferencia. Entre los resultados más sobresalientes se cuenta con la fase curricular, cuya ponderación mayor recae en la interrelación del profesor con el contenido, en ésta se ha diseñado la metodología DIPCING para el diseño de programas de estudio de matemáticas. Respecto al alumno se tienen estudios de tipo cognitivo en donde los registros de representación de los objetos matemáticos son el numérico, visual, algebraico o analítico (según sea el caso), registros dados por Duval, pero el grupo de trabajo ha determinado que hay un cuarto registro fundamental para el aprendizaje de la matemática en estos niveles educativos: el del contexto. Referente a los contenidos matemáticos un constructo teórico relevante que se ha elaborado es el denominado *transposición contextualizada*.

Introducción

La teoría que aquí se resume se ha desarrollado a lo largo de 20 años en el Instituto Politécnico Nacional de México. Se inició con investigaciones sobre el currículo tratando de abordar la problemática del proceso enseñanza aprendizaje de la matemática en carreras de ingeniería. En particular enfrentando el por qué se tienen que impartir los contenidos programáticos de los programas de estudio en carreras de ingeniería y tratando de buscar respuestas a la problemática que todo docente de matemáticas vive con los estudiantes, quienes parece que odian a la matemática, en donde se repite la situación de que en apariencia nunca han visto los conocimientos que les exige el profesor.
De esta forma cada año se desarrolla una investigación que va dando forma a lo que ahora se ha constituido como una teoría educativa que nace en el nivel superior y se está llevando hacia los niveles educativos anteriores.

La matemática en el contexto de las ciencias

Se fundamenta en la función específica que tiene la matemática en el nivel superior en carreras en donde no se van a formar matemáticos y en el paradigma de conocimientos integrados (Camarena, 1999).
Con este fundamento y tomando en cuenta que en el salón de clases están presentes tres elementos centrales: el alumno, el profesor y el contenido a ser enseñando y aprendido, los cuales interactúan entre sí, véase la figura No. 1, se abren cinco fases:

La curricular (desde 1984)

La didáctica (desde 1987)

La epistemológica (desde 1988)

La de formación de docentes (desde 1990)

La cognitiva (desde 1992)

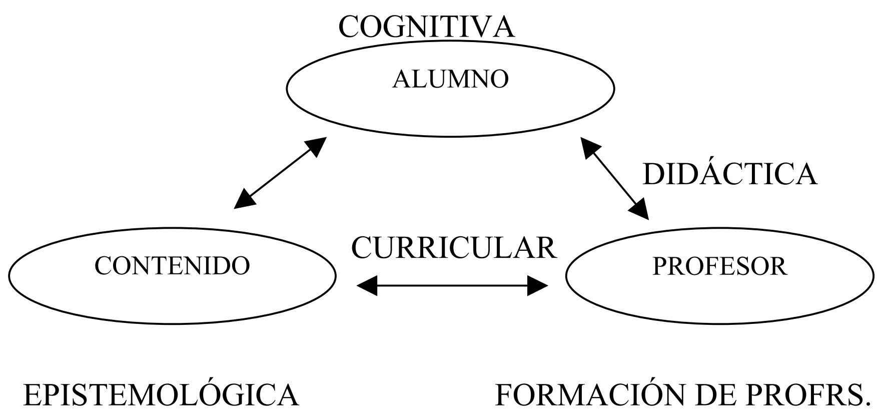


Figura. No. 1. Una terna dorada en educación.

Fase curricular
La fase curricular posee una metodología denominada DIPCING para el diseño de programas de estudio de matemáticas en carreras de ingeniería (Camarena, 1984).
Con la metodología se obtiene vinculación curricular interna (entre la matemática y las asignaturas de las ciencias básicas, la matemática y las ciencias básicas de la ingeniería, así como entre la matemática y las especialidades de la ingeniería). También se logra la vinculación curricular externa (entre el nivel medio superior y el nivel superior, el nivel superior con el nivel posgrado, así como entre la escuela y la industria, tomando como eje rector a la matemática).
Algunos de los constructos teóricos sobresalientes son los diferentes tipos de contenidos que se presentan, unos apoyan a las partes teóricas de la ingeniería, mientras que los otros a los temas y conceptos de aplicación de la ingeniería, dando evidencia de en qué temas de la matemática se deberán desarrollar habilidades y destrezas matemáticas y en cuáles no es necesariodesarrollarlas (Camarena, 2002_b).

Fase didáctica
La fase didáctica (Camarena, 1987) presenta una propuesta didáctica denominada *matemáticas en contexto* (Camarena, 1995), en donde se vincula la matemática con otras asignaturas y contempla 7 etapas:

1.- Planteamiento del problema de las disciplinas del contexto.

2.- Determinación de las variables y de las constantes del problema.

3. Inclusión de los temas y conceptos matemáticos necesarios para el desarrollo del modelaje y su solución.

4.- Determinación del modelo matemático.

5.- Solución matemática del problema.

6.- Determinación de la solución requerida por el problema en el ámbito de las disciplinas del contexto.

7.- Interpretación de la solución en términos del problema y área de las disciplinas del contexto.

Una de las etapas centrales es la elaboración del modelo matemático, situación que llevó a caracterizar y clasificar a los modelos matemáticos dentro de la ingeniería (Camarena, 2000).

Por la necesidad de partir de problemas concretos, desde el año 2000, se ha incorporado la resolución de problemas (Polya, 1976), así como los constructos teóricos de la teoría de Resolución de Problemas, como lo son las heurísticas, las habilidades del pensamiento, la metacognición y las creencias (Nickerson 1994; De Bono, 1997; Santos, 1997). Se puede recurrir a los trabajos de Herrera (2003) para mirar este proceso.

La instrumentación de la propuesta de la matemática en contexto se ha llevado a cabo de forma experimental, a través de la cual se toman los problemas de otras asignaturas, en donde están presentes tanto el docente de la asignatura del contexto como el docente de matemáticas, y se trabaja la matemática contextualizada, regresando a la clase de matemáticas para presentar contenidos matemáticos descontextualizados para que el alumno pueda aplicar estos conocimientos matemáticos en otros contextos (Camarena, 1999).

A través de la matemática en contexto se ha verificado que el estudiante puede llevar a cabo la transferencia del conocimiento de forma eficiente (Camarena, 1999).

Como parte de los productos de investigación se cuenta con el diseño de materiales de apoyo didáctico para cursos en contexto como: ecuaciones diferenciales en el contexto de los circuitos eléctricos (Camarena, 1987), análisis de Fourier en el contexto del análisis de señales electromagnéticas (Camarena, 1993), series de Fourier en el contexto del proceso de transferencia de masa (Muro, 2002) y cálculo vectorial en el contexto de la teoría electromagnética, la transformada de Laplace en el contexto de los circuitos eléctricos (Suárez, 2000).

Fase de formación de profesores

La fase de formación de docentes ha detectado las deficiencias de profesores que dan cursos de matemáticas y que su formación no es de matemáticos, constituyendo esto una de las grandes causas de las deficiencias de los estudiantes en matemáticas (Camarena, 2002_a).

Desde 1990 a través de una investigación se diseñó una *especialidad en docencia de la ingeniería matemática en electrónica*, en donde las asignaturas de matemáticas se muestran vinculadas con otras disciplinas propias de la electrónica y sus ramas afines (Camarena, 1990). Incluye cursos sobre conocimiento científico y técnico, historia y fundamentos de la matemática, procesos de aprendizaje, la evaluación del aprendizaje, etc.

Como por ejemplo: Introducción al Análisis Matemática de una Variable Real y Electrónica Básica, Cálculo Vectorial y Electromagnetismo, Álgebra Lineal y Control Electrónico, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y Circuitos Eléctricos, Análisis de Fourier y Análisis de Señales Electromagnéticas, Probabilidad y Análisis de Señales Aleatorias, Procesos Estocásticos y Telefonía.

Fase cognitiva

El sustento fuerte de esta fase está en la teoría de aprendizajes significativos de Ausubel (1990). Respecto a la fase cognitiva se ha determinado que el estudiante debe transitar entre los registros aritmético, algebraico, analítico, visual y contextual para construir y asirse del conocimiento (Camarena, 2001_b).

Se ha verificado a través de la matemática en contexto que el estudiante logra conocimientos estructurados y no fraccionados, logrando con ello estructuras mentales articuladas (Camarena, 1999). Esta situación se ha tratado a través de la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud, como ejemplo véase el trabajo de Muro (2003) en donde establece el campo conceptual de la serie de Fourier con la transferencia de masa de fenómenos químicos.

La matemática en contexto ayuda a que el estudiante construya su propio conocimiento con amarres firmes y duraderos y no volátiles; refuerza el desarrollo de habilidades mentales mediante el proceso de resolver problemas vinculados con los intereses del alumno (Camarena, 1996).

Para mirar en los estudiantes el funcionamiento cognitivo de la matemática en contexto, también, se ha recurrido a analizar las funciones cognitivas, véase el trabajo de Zúñiga (2003). Asimismo, se ha determinado que el factor motivación en el estudiante se encuentra altamente estimulado a través de la *matemática en contexto* y su desempeño académico como futuro profesionista se incrementa, es decir, la transferencia del conocimiento se puede establecer sin tantos tropiezos (Camarena, 1996).

Fase epistemológica

Con la fase epistemológica se ha verificado cómo gran parte de la matemática que se incluye en los cursos de carreras de ingeniería nace en el contexto de problemas específicos de otras áreas del conocimiento y a través del tiempo pierde su contexto para ofrecer una matemática "pura" que es llevada a las aulas de clases sin que tenga sentido para los estudiantes que no van a ser matemáticos, como lo describe Chevallard (1991).

También se ha determinado un constructo teórico denominado transposición contextualizada. En donde la matemática científica sufre transformaciones para adaptarse a la forma de trabajar de otras ciencias (Camarena, 2001_a). Como parte de esa etapa se cuenta con una serie de situaciones de matemática contextualizada para ser usadas en clase.

También hay situaciones en donde el ingeniero emplea procesos o métodos sin conocer su origen, la fase epistemológica de la matemática en el contexto de las ciencias pone a la luz estas génesis (Camarena, 1987).

Conclusiones

Como parte de las conclusiones se puede mencionar que esta es una teoría, a diferencia de la mayoría de las teorías sobre el proceso enseñanza aprendizaje, que nacen en el nivel básico, ésta se genera en el nivel superior y baja a los niveles anteriores.

Actualmente ha tomado auge la matemática en contexto, independientemente de esta línea que estamos presentando, siendo el grupo que encabeza la que suscribe este trabajo uno de los pioneros en esta dinámica.

Es claro que es imposible ahondar en cada una de las cinco fases de la matemática en el contexto de las ciencias, por lo que se le sugiere al lector interesado que consulte la bibliografía, que aunque no es toda la existente relativa a este tema, sí es suficiente como para tener un panorama de la teoría.

Bibliografía

Ausubel David P., Novak Joseph D. y Hanesian Helen (1990). *Psicología educativa, un punto de vista cognoscitivo*. Editorial Trillas.

Camarena G. Patricia, (1984). *El currículo de las matemáticas en ingeniería*. Mesas redondas sobre definición de líneas de investigación en el IPN, México.

Camarena G. Patricia, (1987). *Diseño de un curso de ecuaciones diferenciales en el contexto de los circuitos eléctricos*. Tesis de Maestría en Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN, México.

Camarena G. Patricia, (1990). *Especialidad en docencia de la ingeniería matemática en electrónica*. Editorial ESIME-IPN, México.

Camarena G. Patricia, (1993). *Curso de análisis de Fourier en el contexto del análisis de señales eléctricas*. ESIME-IPN, México.

Camarena G. Patricia, (1995). *La enseñanza de las matemáticas en el contexto de la ingeniería*. XXVIII Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana, México.

Camarena G. Patricia (1996). *El contexto y las ecuaciones diferenciales lineales*. Memorias del 6º Coloquio Académico de la ESIME-IPN, México.

Camarena G. Patricia, (1999). *Reporte del proyecto de investigación titulado: Etapas de la matemática en el contexto de la ingeniería.* ESIME-IPN, México.

Camarena G. Patricia. (2000). Reporte de investigación titulado: *Los modelos matemáticos como etapa de la matemática en el contexto de la ingeniería.* ESIME-IPN, México.

Camarena G. Patricia, (2001_a). *Las Funciones Generalizadas en Ingeniería, construcción de una alternativa didáctica.* Editorial ANUIES, México.

Camarena G. Patricia. (2001_b). Reporte de investigación titulado: *Registros cognitivos de la matemática en el contexto de la ingeniería*. ESIME-IPN, México.

Camarena G. Patricia, (2002_a). *La formación de profesores de ciencias básicas en ingeniería. Memorias del* 3º nacional y 2º internacional: Retos y expectativas de la Universidad, México.

Camarena G. Patricia. (2002_b). *Metodología curricular para las ciencias básicas en ingeniería*. Revista: Innovación Educativa, Vol. 2, Núm. 10, septiembre - octubre (primera parte) y Núm. 11, noviembre - diciembre (segunda parte). México.

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica*. *El saber sabio al saber enseñado*. Aique Grupo Editor.

De Bono Edward (1997). *El pensamiento lateral, manual de creatividad*. Paidós.

Herrera E. Javier y Camarena G. P. (2003). *Los modelos matemáticos en el contexto de los circuitos eléctricos y la metacognición*. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Volumen 16, tomo II, Cuba.

Nickerson Raymond S., Perkins David N. y Smith Edward E. (1994). *Enseñar a pensar, aspectos de la aptitud intelectual*. Editorial Paidós M. E. C.

Muro U. Claudia y Camarena G. P. (2002). *La serie de Fourier en el contexto del proceso de transferencia de masa*. Revista "Científica" The Mexican Journal of Electromechanical Engineering. Volumen 6, No. 4.

Muro U. Claudia (2003). *Determinación de un campo conceptual de la serie de Fourier en un contexto*. XVII Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, Chile.

Polya G. (1976). *Cómo plantear y resolver problemas*. Editorial Trillas.

Santos T. Luz Manuel (1997). *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas*. Grupo Editorial Iberoamérica S. A. de C. V.

Suárez B. Virginia y Camarena G. P. (2000). *La transformada de Laplace en el contexto de la ingeniería*. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Volumen 13.

Zúñiga S. Leopoldo (2003). Sobre las funciones cognitivas en el aprendizaje del cálculo diferencial de dos variables en el contexto de la ingeniería. *XVII Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*, Chile.

REFORMAS EN EDUCACIÓN CIENTÍFICA

Fernando Cajas
Universidad de San Carlos de Guatemala
fercajas@hotmail.com

Resumen

Se presentan algunas características de las reformas educativas en ciencia, matemática y tecnología que se llevan a cabo en Latinoamérica. Se discute como estas reformas intentan reconstruir el contenido científico, matemático y tecnológico pero en el fondo no problematizan el mismo manteniendo un posición tradicional acerca de que es lo que deben aprenden las personas luego de su educación obligatoria en ciencia, matemática y tecnología. La visión dominante de reforma curricular es la reorganización de conocimientos *existentes* y la secuenciación de objetivos de aprendizaje con pocas referencias a la investigación contemporánea en didáctica de la ciencia, la matemática o la tecnología. La transposición didáctica de estos conocimientos sigue siendo un proceso empírico y las comunidades de didactas, si acaso existen, impactan poco los procesos de reforma educativa. Se discute como las comunidades emergentes de investigadores en didáctica de la ciencia, matemática y tecnología pueden impactar procesos de reforma educativa.

Una sociedad puede verse como un sistema concreto formado por tres subsistemas: el económico (producción), el político (control) y el cultural (arte, deporte, ciencia, matemática y tecnología). La riqueza y la pobreza de una sociedad también puede verse en términos de esos tres sectores. Casi siempre pensamos en pobreza económica cuando en efecto la pobreza como la riqueza son sistémicas, esto es, no se dan aisladas. Casi siempre creemos que los impedimentos al desarrollo son económicos, cuando en verdad el desarrollo también es sistémico, esto es, una interacción de lo económico, lo político y lo cultural. Es posible que el subdesarrollo más difícil de superar sea el subdesarrollo cultural, debido a que los modos de pensar y las mismas concepciones de progreso y trabajo están ancladas en este subsistema y se han construido durante muchas generaciones

Esta conferencia se centra en el desarrollo científico aceptando parcialmente el reconocimiento que se hace del papel que juega la ciencia y la tecnología como motores para el desarrollo de los pueblos pero extendiendo la educación científica al desarrollo político y cultural de los pueblos. Se inicia con una revisión de reformas en educación científica generadas en países donde existen comunidades de científicos organizados, particularmente en Estados Unidos de Norteamérica en particular la reforma propuesta por la American Association for the Advancement of Science (AAAS, 1989; 1997). Luego se discute el desarrollo de reformas en educación científica en países donde no existen comunidades de científicos bien consolidadas tal el caso de Guatemala. Se proponen alternativas para poder mejorar la educación científica basándose en casos reales provenientes de diferentes países de América.

Visión Global de las Reformas en Educación Científica de la Ultima Década

Durante los ultimas tres décadas se ha dado un cambio fundamental en la manera de plantear los problemas de la enseñanza y principalmente el aprendizaje en ciencia y matemática (National Research Council, 199a, b, 2000). Por muchos siglos las decisiones acerca de la enseñanza de estas materias ha bian estado dominadas por ideologías y creencias sin ningún sustento cientifico-teorico ni evidencia empírica. En el caso de educación científica por mucho tiempo se sostuvo que enseñar ciencia era dar clases magistrales y aprender era memorizar los hechos importantes que el profesor decía. El caso de matemática es similar con el agravante de que se pensó que la estructura lógica de la matemática debería dominar el contenido y la instrucción matemática, particularmente a los niveles de bachillerato y principalmente universitarios. En los niveles de pre-primaria la situación es mucho más dramática pues los contenidos de ciencia y matemática no han sido siquiera pensados ya que se cree, erróneamente, que las niñas y niños a estas edades solo deben de "jugar" y que no están preparados para aprender conceptos y procesos científicos "complicados". "Jugar" ha sido mal interpretado y no se diseñan ambientes donde los infantes puedan construir, jugando, elementos básicos para su educación científica y matemática. Sin embargo, los trabajos de Piaget y de muchos científicos cognitivos contemporáneos han proveído evidencia empírica que soportan que en determinadas condiciones los niños y niñas pueden apropiarse de ideas y procesos científicos poderosos. A la vez la sicología cognitiva ha demostrado que para aprender ciencia y matemática los niños y niñas tienen que tener oportunidades de reconstruir conocimientos y procesos claves desde edades muy tempranas.

Paralelamente a los trabajos de científicos cognitivos, esto es, durante la década de 1970-1980, una serie de investigaciones empíricas desarrolladas alrededor del mundo por la emergente didáctica de la ciencia y la matemática (llamada science and mathematics educación en los países sajones y didáctica de la ciencia y matemática educativa en Latinoamérica) revelaron que los estudiantes no aprenden la ciencia ni la matemática que se les enseña. Estas investigaciones cubrieron una gama de conceptos científicos (por ejemplo, fuerzas, energía, fotosíntesis, células, etc.) asociados a fenómenos naturales (esto es, movimiento de objetos, el clima Terrestre, producción de alimento, crecimiento de las plantas, etc.) y conceptos matemáticos (por ejemplo, fracciones, proporciones, funciones, álgebra, cálculo, etc.). Estos estudios sientan las bases teóricas y empíricas para repensar la manera en que generamos conocimiento científico, matemático y tecnológico para la educación general así como para planificar como producir recursos que pudieran soportar el aprendizaje de estos contenidos.

La Visión de Ciencia y Tecnología en la Reforma Educativa Guatemalteca

La actual reforma educativa incluye entre uno de sus ejes el de Ciencia y Tecnología. Este es parte de los siguientes ejes: Vida en Democracia y Cultura de Paz; Unidad en la Diversidad y Desarrollo Integral Sostenible. El eje de Ciencia y Tecnología esta someramente descrito en el Diseño de Reforma Educativa (Comisión Paritaria de Reforma Educativa, 1988, pp. 54-55). Dicho documento hace énfasis en la contribución que puede tener la ciencia y la tecnología en el perfeccionamiento de la persona a través de la creación y difusión de conocimiento y el dominio de actitudes, destrezas y técnicas que contribuyan al desarrollo sostenible. Esta concepción de respeto por la naturaleza es una tema que permea toda la reforma. La ciencia es concebida en el documento mencionado como los esfuerzos sistemáticos para explicar la realidad a través de la observación y experimentación controlada. La tecnología, en contraste, se presenta como una consecuencia practica de la ciencia que incluye las técnicas, instrumentos y procedimientos utilizados por la sociedad para resolver problemas y satisfacer necesidades.

El documento de Diseño de Reforma Educativa también reconoce que la ciencia y la tecnología occidental (refiriéndose quizás a la ciencia moderna que aparece en el Europa en el siglo XVII) han ocupado un lugar privilegiado en la difusión y aplicación, sin embargo, se dice en el documento, existe un rico caudal de ciencia y tecnología indígena que requiere ser recobrado. A la vez, el mismo documento reconoce lo fundamental que es para los guatemaltecos la educación en ciencia y tecnología debido a los "acelerados" cambios tecnológicos de la actualidad, especialmente en informática y comunicaciones. La propuesta del eje de Ciencia y Tecnología en la reforma educativa va encaminada a que los estudiantes desarrollen: pensamiento científico, capacidad de aprender a aprender, desarrollo del pensamiento critico, dominio de conocimientos científicos y actitudes necesarias para la investigación y experimentación científica. Por ello se dice que es importante fortalecer los mecanismos de registro, almacenamiento, difusión y practica de la ciencia y la tecnología.

La Reforma Educativa ha empezado a clarificar lo que significaría la introducción de esta nueva concepción de ciencia y tecnología en el currículo de la escuela primaria y con ello se ha presentado una propuesta sobre lo que deben aprender todos los guatemaltecos al respecto (Ministerio de Educación, 2002). La visión de ciencia y tecnología que se presentan en el documento esta expuesta en términos de Competencias Marco, Competencia de Eje y Competencias de Área. Para dar una idea de la naturaleza de la propuesta se presentan abajo dos ejemplos sobre la forma en que esta estructurado el nuevo currículo de Ciencia y Tecnología.

Competencia Macro	Competencia de Eje	Competencia de Área
Aplica los saberes de la tecnología y los conocimientos de las artes y las ciencias, propias de su cultura y otras culturas, enfocadas en el desarrollo personal, familiar, comunitario y local.	Promueve el uso de una tecnología orientada al mejoramiento de la calidad de vida y de una productividad sostenible. Aplica tecnología con ética en la vida diría y laboral aplicando criterios básicos de eficiencia y seguridad.	Utiliza información, técnicas, procedimientos e instrumentos para facilitar la resolución de problemas. Valora la utilidad de los saberes tradicionales de las culturas del país y de otras culturas para la satisfacción de necesidades de la vida personal y colectiva. Sugiere la utilización de tecnología adecuada para lograr el desarrollo sustentable en armonía con la naturaleza. Relaciona la tecnología propia con otras, en función de complementariedad y el mejoramiento de resultados. Incorpora la utilización de tecnologías de punta en sus actividades cotidianas,

Cuadro No.1 Un ejemplo de la clarificación de las competencias macro, de eje y de área para un tópico particular de Ciencia y Tecnología en el currículo de la escuela primaria sugerido por la Propuesta de Currículo Intercultural para la Educación Primaria (Ministerio de Educación, 2002, p. 59).

Como puede notarse en el Cuadro No.1 existe una visión de la introducción de la ciencia y la tecnología como parte de la educación de todos los guatemaltecos. A pesar de que esta visión establece las competencia macro, de eje y de área, existe una serie de vacíos que deben llenarse tanto a nivel macro como a nivel micro. Por un lado se requiere de desarrollo de una visión sobre el papel de la ciencia y la tecnología en los sistemas económicos, políticos y culturales de Guatemala así como la especificación de saberes particulares que puedan incorporarse a los sistemas educativos concretos. En resumen se requiere de la generación de una política de educación científica y tecnológica para todos los guatemaltecos. La siguiente sección propone una visión de educación científica y tecnológica coherente con la reforma educativa y sugiere formas de llenar los vacíos de las visiones existentes tanto a nivel macro (económico, político y cultural) como a nivel micro (contenidos específicos, programas puntuales de educación científica y tecnológica).

Una Visión de Educación Científica

En línea con la concepción de sociedad presentada al inicio, los objetivos de la educación científica y tecnológica de una determinada sociedad pueden ser: económicos (una vida más productiva), políticos (una vida con mas participación social) y culturales (una vida más interesante. Los mismos se pueden generalizar para instituciones y no solo para personas individuales. Entonces, la educación científica y tecnológica de los guatemaltecos debe conceptualizarse a la luz de estos tres objetivos debido a que el desarrollo no es sostenible si estos tres sistemas no se encuentran integrados en una visión donde estos objetivos se refuercen mutuamente.

Lo que caracteriza a las poblaciones latinoamericana, en particular a la guatemalteca, es su baja productividad en el trabajo. Según el informe del Desarrollo Humano (Naciones Unidad, 2002), pocos países latinoamericanos tienen productividades en el trabajo menores que Guatemala. Aunque la productividad en dicho informe esta relacionada con el ingreso per cápita, el mismo reporte indica la baja calidad del trabajador guatemalteco así como la baja calidad del puesto de trabajo. La educación científica y tecnológica guatemalteca deben enmarcarse en la producción de ciudadanos con habilidades que les permita integrarse a empresas altamente productivas o a la creación de dichas empresas. Para ello hay que trascender de las tecnologías arcaicas que han sido utilizadas en los sistemas educativos, particularmente en los sistemas de educación para el trabajo.

Hace falta, entonces, crear una visión de educación científica y tecnológica que permita a los estudiantes adquirir habilidades básicas para poder ser autosuficientes en un mundo que cada vez mas depende de tecnologías de información. Esto no puede hacerse sin consolidar una alfabetización básica, esto es, habilidades de leer, entender y escribir, así como el manejo de operaciones matemáticas fundamentales. Aquí la creación del pensamiento critico juega un papel básico y debe estar conectado al incremento de la capacidad productiva de los estudiantes. Detalles sobre algunos elementos que integran el paquete llamado “pensamiento critico” se han generado en otras culturas y pueden adaptarse a la situación guatemalteca (véase por ejemplo el reporte de la Asociación Americana para el Avance de la Ciencia, titulado “Avances en el Conocimiento Científico” (AAAS, 1993, 1998).

Bibliografía

AAAS (1993) *Benchmarks for science literacy*. New York: Oxford University Press.
AAAS (1998) *Avances en el Conocimiento Científico*. México Harla
AAAS (1998). *Blueprints for Reform*. New York: Oxford University Press.
AAAS(1997). *Ciencia Conocimiento para Todos*. México: Harla
AAAS, (2000) *Atlas of science literacy*. New York: Oxford University Press.
National Research Council (1999a). *How people learn: Bridging research and practice*. M. S. Donovan, J. D. Bransford, & J. W. Pellegrino (Eds.). Washington D.C.: National Academy Press.
National Research Council (1999b). *How people learn: Brian, mind, experience and school*. J. D. Bransford, A.L. Brown, & R. Cocking (Eds.). Washington D.C.: National Academy Press.
National Research Council (2000). *Educating teachers of science, mathematics, and technology.* National Academy Press: Washington D.C.
Naciones Unidas (2002). Informe de Desarrollo Humano de Guatemala 2001. Sistema de Naciones Unidas, Guatemala.

REPORTES DE INVESTIGACIONES TERMINADAS

Se presentan informes acerca del estados en que se encuentran investigaciones que responden a los diversos momentos del ejercicio indagativo, a saber, proyectos en curso y aquellos terminados.

ESTRATEGIAS DE SOLUCIÓN ANTE PROBLEMAS MULTIPLICATIVOS. ESTUDIO EXPLORATORIO

Lorena Irazuma Garcia Miranda,
Cinvestav, México
lor_mir@hotmail.com

Resumen

Mientras más información se obtenga respecto a los diferentes tipos de problemas multiplicativos y las estrategias que usan los niños para resolverlos, resulta más fácil orientar las acciones para la enseñanza del algoritmo de la multiplicación. Este estudio de caso se analizan las particularidades de las estrategias utilizadas por quince niños que cursan alguno de los tres primeros grados de la educación básica mexicana para resolver problemas de agrupamiento, arreglos rectangulares, razón y precio. La investigación detecta diversas habilidades y privilegia el conteo como la herramienta más utilizada para solucionar las situaciones planteadas sin que el grado escolar implique el uso de estrategias más económicas.

Marco Teórico

La multiplicación se puede considerar como una adición repetida y, desde la teoría de conjuntos, como producto cartesiano. La primera concepción es muy común, ya que para quien está aprendiendo los pasos fundamentales de esta operación binaria resulta una descripción familiar. El producto cartesiano ofrece un enfoque diferente, un apareamiento entre dos conjuntos (A y B), en donde cada elemento del conjunto A se asocia con cada elemento del conjunto B, formando pares ordenados (producto cartesiano de los conjuntos A y B).

Como cualquier otra operación, la multiplicación posee diversas propiedades: cerradura, conmutativa, asociativa y distributiva. Para avanzar en el aprendizaje de este contenido, resulta necesario conocer dichas cualidades, ya que dan respuesta a preguntas tales como ¿qué hacer si deseo encontrar el producto de tres o más números? ¿Puedo intercambiar los números que representan el multiplicando y el multiplicador sin que esto afecte el resultado?

Los números uno y cero juegan un papel muy importante en la multiplicación. El uno se conoce como elemento idéntico, debido a que si se multiplica 1 x n, el producto invariablemente será n. Cuando se presenta un arreglo que implica un cero, está implícito que el conjunto que se representa está vacío, por lo que perennemente el producto tendrá que ser 0.

Para trabajar con problemas multiplicativos, es necesario clasificarlos. Vergnaud (1983), Kouba y Franklin (1993), Nesher (1989) y Carpenter, Fennema, Franke, Levi y Empson (1999) han estudiado los diferentes problemas multiplicativos a los que se enfrentan los niños.

Considerando la última corriente, se encuentra que los problemas multiplicativos se bifurcan en *asimétricos* y *simétricos*. Las situaciones asimétricas presentan factores relacionados a referentes específicos y no pueden intercambiarse; este conjunto abarca problemas de agrupamiento, razón, precio y comparación multiplicativa. Los problemas de área, arreglo rectangular y combinación pertenecen a las cuestiones simétricas, las cuales se caracterizan por mostrar factores que juegan roles equivalentes; es decir, se pueden intercambiar.

Respecto a las estrategias que los niños utilizan para resolver problemas multiplicativos, Carpenter, Fennema, Franke, Levi y Empson (1999) afirman que existen principalmente tres estrategias a las que se recuren: modelado directo, conteo y hechos numéricos derivados.

Modelado directo
Inicialmente los niños modelan cada objeto que involucra el problema que se les plantea (dichas representaciones pueden realizarse por medio de pequeñas marcas hechas en el papel, con objetos, material de base diez, etc.) y posteriormente proceden a contar el total de objetos que modelaron.

Conteo
Las estrategias de conteo resultan ser de más fácil empleo en problemas de suma y resta que en problemas multiplicativos, por lo que en general, los niños no las usan en el proceso de solución de estos problemas. Cuando se llega a utilizar en este tipo de problemas, involucra un conteo salteado. Los niños son expertos en nombrar una serie numérica que implica múltiplos de tres o cinco; sin embargo, se les dificulta saltear la serie con otros números como por ejemplo, el siete. En ocasiones, los niños dicen los primero tres o cuatro números salteados de una serie y la completan contando de uno en uno. El conteo salteado se considera esencialmente como una adición repetida.

Hechos numéricos derivados
Cuando se sabe el resultado de una operación sin tener necesidad de contar o representar los números involucrados, se dice que se ha realizado un hecho numérico. Los hechos numéricas básicos son los resultados memorizados, a partir de los cuales se desarrollan los hechos numéricos derivados. Por ejemplo: Ramíro tiene 5 dulces, Gabriela le regala 7 dulces. ¿Cuántos dulces tiene ahora Ramíro? El niño puede responder 5 y 5 son 10 mas 2 son 12. Utiliza el hecho numérico básico de 5 más 5 y aumenta las unidades que le faltan incluir para resolver el problema.

Diseño de investigación
Se presenta una investigación de tipo cualitativo “donde la información obtenida se analiza e interpreta más en términos de procesos y eventos que en términos de datos sujetos a cuantificación” (Buenrostro, 1998). De esta manera, las estrategias de solución de los niños se sometieron a un análisis de tipo cualitativo en el que se observaron las semejanzas y diferencias en sus ejecuciones.
Es un estudio exploratorio con el que se pretende obtener información preliminar respecto a las estrategias de los niños. Se espera que dicha información permita la realización de estudios posteriores. Así mismo, concurre un estudio de casos en el que se analizan las particularidades de las estrategias que cada niño presenta al resolver los problemas multiplicativos planteados (Merriam, 1998)
Respecto a la concepción de validez que mantiene el estudio, conviene presentar algunas consideraciones hechas por Jaworski (1998):

> …no hay una forma en la que pueda concebirse a las interpretaciones o conclusiones de esta investigación como correctas o ciertas. Aquí, la validez no tiene el significado objetivo que tiene en la investigación positivista. Se puede argumentar que tal significado muchas veces deriva de una estrechez y definición poco realista. El rigor de investigación en este estudio descansa en

incorporar los resultados en su naturaleza y contexto ampliamente situados y en abrir los detalles de esta incorporación. El papel central del investigador y las implicaciones que resultan deben juzgarse a través de la validez de lo que es ofrecido en éste y otros escritos, dado que la validez reside, en última instancia, en el grado en el que un lector informado es convencido de lo que está escrito (p.127).

Propósitos del Estudio

- Detectar y describir las estrategias que emplea un grupo de niños que cursan alguno de los tres primeros grados de primaria para resolver problemas multiplicativos de agrupamiento, arreglos rectangulares, razón y precio.

Comparar las estrategias encontradas en este estudio con las estrategias reportadas en investigaciones anteriores.

PARTICIPANTES

La investigación se llevó a cabo con quince niños (cinco de primer grado, cinco de segundo y cinco de tercero) que asisten al Programa de Atención al Bajo Rendimiento Escolar (PABRE). Cabe mencionar que la mayoría de estos niños son remitidos por sus maestros debido al bajo aprovechamiento que presentan, o bien, por estar en riesgo de reprobación.

Obtención de Datos

Los datos se recolectaron mediante la aplicación del instrumento denominado "Evaluación Informal de Problemas Multiplicativos", empleando la técnica de entrevista. A continuación se presenta una descripción minuciosa de las características de la evaluación informal y del tipo de entrevista clínica utilizado.

Evaluación Informal de Problemas Multiplicativos

Este instrumento fue construido bajo la dirección de Buenrostro, A. considerándose autores García, L. y Acevedo, H. (2000). El propósito de esta prueba consiste en dar cuenta de las estrategias que usa un grupo de niños de primero, segundo y tercer grado de primaria ante cuatro tipos de problemas multiplicativos. La selección de problemas está basada en la aportación de Carpenter, Fennema, Franke, Levi y Empson (1999), de la cual se distinguen los problemas de agrupamiento, razón, precio y arreglos rectangulares. Esta prueba plantea tareas semejantes a los problemas que aparecen en los libros de texto que proporciona la Secretaría de Educación Pública para segundo y tercer grado de la educación primaria. El contenido de la evaluación fue sometido a un proceso de validación mediante la revisión por parte de seis profesores titulares de los tres primeros grados de una primaria pública.

La evaluación informal contiene ocho problemas multiplicativos: dos de agrupamiento, dos de arreglos rectangulares, dos de precio y dos de razón. Cada tipo de problema se presenta en dos versiones; las primeras versiones de los problemas de agrupamiento y arreglos rectangulares permiten observar todos los objetos contenidos en las colecciones o arreglos, mientras que las segundas no lo permiten. Para los problemas de precio y razón, la primera versión maneja cantidades de una cifra, mientras en la segunda aparecen cantidades de dos cifras.

Tabla 1. Problemas multiplicativos contenidos en la evaluación informal

TIPO DE PROBLEMA	**SITUACIÓN PLANTEADA**
Agrupamiento (1)	El trenecito tiene 4 vagones y en cada vagón hay 6 niños, ¿cuántos niños hay en todo el tren?
Agrupamiento (2)	Hay 4 naves espaciales, en cada una hay 7 niños, ¿cuántos niños hay dentro de todas las naves?
Arreglos rectangulares (1)	Los payasos de tela están acomodados en filas, hay 8 filas y cada una tiene 6 payasos, ¿cuántos payasos hay en total?
Arreglos rectangulares (2)	En el juego de tiro al globo hay 7 filas, cada una va a tener 6 globos, ¿cuántos globos habrá en total?
Precio (1)	Luis compró 4 paletas, cada paleta le costó 8 pesos, ¿cuánto pago por todas las paletas?
Precio (2)	El papá de Luis compró 12 algodones de azúcar, cada algodón costó 3 pesos, ¿cuánto pagó por los 12 algodones?
Razón (1)	Luis tiró 6 canicas que cayeron en lugares que valían 4 puntos cada uno, ¿cuántos puntos juntó Luis?
Razón (2)	En el juego de tiro con rifle Luis tiró 12 patos, cada uno valía 6 puntos, ¿cuántos puntos logró juntar Luis?

Entrevista

La entrevista empleada en esta investigación se concibe como un método flexible y no estandarizado de cuestionamiento que permite el acceso al pensamiento matemático del niño. La entrevistadora proporcionó tareas específicas y aunque usualmente se comenzó con preguntas determinadas, fue libre de modificarlas para lograr la comprensión del pensamiento del participante.

Análisis de resultados

El carácter exploratorio de las entrevistas durante la aplicación de la prueba informal de problemas multiplicativos permitió detectar las estrategias a las que un grupo de estudiantes recurre para solucionar los problemas planteados. A continuación se describe cada una de ellas:

Tabla 2. Descripción de estrategias detectadas en la investigación

ESTRATEGIA	DESCRIPCIÓN
Dibujo	Esbozar objetos, rayas o cualquier elemento que ayude a representar las cifras expuestas en el problema.
Conteo de uno en uno desde el inicio	Enunciar la serie numérica desde el número uno.
Conteo de uno en uno a partir del grupo	Mencionar la serie numérica a partir de uno de los números proporcionados en el problema.
Conteo de uno en uno a partir de cierto número	Complemento de un hecho numérico básico o de alguna operación matemática. Es la continuación de la serie numérica a partir del último número considerado.
Conteo de dos en dos desde el inicio	Enunciar la serie numérica de dos en dos (2,4,6,8...)
Conteo de tres en tres desde el inicio	Decir la serie numérica avanzando de tres en tres (3,6,9,12...)
Conteo de cuatro en cuatro desde el inicio	Mencionar la serie numérica de cuatro en cuatro (4,8,12...)
Algoritmo escrito	Plasmar en papel alguna operación.
Suma	Realizar la operación aritmética, considerando el resultado de dos hechos numéricos básicos o los datos proporcionados en el problema.
Evocación de tabla de multiplicar	Recordar el resultado de alguna multiplicación utilizada con frecuencia.
Multiplicación	Plantear esta operación como herramienta para solucionar el problema.
Hecho numérico básico	Nombrar de inmediato el resultado de una operación.

El estudio minucioso de estas estrategias, admite enriquecer las propuestas por Carpenter, Fennema, Franke, Levi y Empson (1999). El *dibujo* está incluido en el modelado directo y el conteo deriva seis modos diferentes de llevarlo a cabo. Se innova el *algoritmo escrito*, la *suma*, *evocación de tabla de multiplicar*, *multiplicación* y *hecho numérico básico*. Los hechos numéricos derivados no se consideran debido a que en el presente estudio, ningún caso recurrió a dicha estrategia.
En general, la estrategia más utilizada para resolver las situaciones planteadas fue el conteo de uno en uno desde el inicio, seguida del conteo de uno en uno a partir del grupo. El conteo de uno en uno a partir de cierto número, hecho numérico básico,

suma y evocación de tabla de multiplicar fueron estrategias utilizadas en menor grado y en combinación de unas con otras.
Los participantes de primer grado fueron los únicos que recurrieron al *dibujo*, además utilizaron diversos conteos, privilegiando el *conteo de uno en uno desde el inicio*. Los alumnos de segundo grado hicieron uso frecuente de la última estrategia mencionada, así como de la *suma*, el *hecho numérico básico* y la *evocación de la tabla de multiplicar*. El *algoritmo escrito* y la *multiplicación* son estrategias utilizadas exclusivamente por los niños de tercer grado; el *conteo de uno en uno desde el inicio* permanece como herramienta, aunque se presenta con menor frecuencia.

Conclusiones

La variedad de estrategias empleadas para resolver los problemas expuestos y la perseverancia del *conteo de uno en uno desde el inicio* como una herramienta recurrente en su solución, presume que el grado escolar que se cursa, no implica el uso de estrategias más elaboradas o económicas. Al respecto, es prudente mencionar que los diversos métodos utilizados (estrategias) son correctos en su totalidad, aunque en situaciones que involucran cantidades mayores, no son prácticos.
La información obtenida da lugar a otro tipo de investigaciones, las cuales pueden profundizar los resultados aquí reseñados. Por ejemplo, sería conveniente diseñar situaciones didácticas en las que se proponga a los niños el uso de estrategias más elaboradas. A su vez, sería oportuno indagar los efectos que tendría el aprendizaje con una presentación cuidadosa de los diferentes tipos de problemas.

Bibliografía

Buenrostro, A. (2003). Aritmética y bajo rendimiento escolar. Tesis de doctorado. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional: México.

Carpenter, T. P., Fennema, E., Franke, M. L., Levi. L. & Empson, S. B. (1999). *Children's mathematics: Cognively guided instruction.* Portsmouth, NH: Heinemman-NCTM.

Garcia, L. y Acevedo, H. (2000). Estrategias de solución ante problemas multiplicativos. Tesis de licenciatura. Universidad Nacional Autónoma de México: México.

Jaworski, B. (1998). The centrality of the researcher: Rigor in a constructivist inquiry into mathematics teaching. En Teppo, A.R. (Ed.), Qualitative research methods in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education Monograph, 9,* 112-127.

Kouba, V. & Franklin, K. (1993). Multiplication and división: sense making and meaning. En: Jensen, R. (Ed.), *Research Ideas for the classroom: Early Childhood Mathematics* (103-126). Macmillan Publishing Company.

Merriam, S.B. (1998). *Qualitative research and case study applications in education*. San Francisco: Jossey-Bass Publishers.

Nesher, P. (1989). Multiplicative school word problems: theoretical approaches and empirical findings. En: J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades (pp.20-37)*. Virginia: Lawrence Erlbaum Associates.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. En: R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Adquisition of mathematical concepts and processes* (pp.141-161). New York: Academic

¿A.B=0 $\Rightarrow$ A=0 $\vee$ B=0? REFLEXIONES E IMPLICACIONES EN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

Cristina Ochoviet
Liceo "Juan Zorrilla de San Martín", Uruguay
princesa@adinet.com.uy

Resumen
Se reporta una investigación sobre pensamiento algebraico realizada con estudiantes de Uruguay de 3er. del Ciclo Básico de enseñanza secundaria, 3er. de Bachillerato y 3er. año de Profesorado de Matemática, en torno a la propiedad que da título a este trabajo.
Se situó la atención principalmente en tres puntos: qué estrategias usan los estudiantes para resolver ecuaciones del tipo $(ax+b)(cx+d)=0$; en un error que aparece con frecuencia al verificar las raíces de las ecuaciones antes mencionadas que consiste en la sustitución simultánea de la variable por dos valores distintos; y si los estudiantes generalizan esta propiedad a estructuras donde no es válida aun cuando hayan recibido instrucción específica al respecto.

Breve reseña sobre los estudios exploratorios realizados

De acuerdo a los estudios exploratorios que realizamos con alumnos de enseñanza secundaria[1] y terciaria[2], pudimos apreciar que existe una marcada tendencia a generalizar la propiedad Hankeliana de los números reales a otras estructuras algebraicas donde esta propiedad no es siempre válida.

Propiedad Hankeliana

Esta tendencia puede apreciarse aún cuando los alumnos hayan recibido instrucción específica al respecto. Los alumnos aplican esta propiedad a diferentes situaciones problemáticas, sin mediar un análisis de la situación, sin reflexionar que las propiedades no son siempre válidas, que están relativizadas a un contexto. Por ejemplo, se le presentó a los estudiantes la siguiente actividad:

D y B son dos matrices. Se sabe que D.B=O, es decir que el producto de ambas matrices es la matriz nula. ¿Qué puedes deducir sobre las matrices D y B a partir de esta información?

Muchos estudiantes contestaron que *D* o *B* eran la matriz nula, aun cuando en sus cursos de álgebra habían observado que esto no era cierto.

[1] En Uruguay la Enseñanza Primaria abarca seis años de instrucción y la Secundaria otros seis que se dividen en dos ciclos. El primer ciclo tiene una duración de tres años (1º, 2º, 3º) y se denomina Ciclo Básico (alumnos de 12 a 14 años aproximadamente). El segundo ciclo, también de tres años (1º, 2º, 3º), se llama Bachillerato Diversificado (alumnos de 15 a 17 años aproximadamente).

[2] Los alumnos de nivel terciario estaban cursando tercer año de profesorado de matemática. Esta carrera se cursa en el Instituto de Profesores Artigas y tiene una duración de cuatro años.

También hemos detectado que muchos alumnos no la aplican en el contexto de la resolución de ecuaciones, aún cuando sea la única herramienta disponible y hayan recibido instrucción sobre su aplicación a la resolución de ecuaciones polinómicas factorizadas e igualadas a cero[3]. También hemos observado un tipo de error que cometen algunos estudiantes al momento de verificar las raíces de una ecuación dada en esta forma y nos cuestionamos si es consecuencia directa de la aplicación de esta propiedad. Este error consiste en realizar una sola verificación, usando simultáneamente las dos raíces que se han encontrado. Con esto queremos decir que, dada la ecuación $(ax+b)(cx+d)=0$ con dos raíces distintas, en lugar de realizar dos verificaciones, una para cada raíz, es frecuente que el alumno sustituya la x presente en el primer factor, por la raíz que obtuvo al resolver $ax+b=0$ y en el segundo factor, sustituya la x por la raíz que obtuvo al resolver $cx+d=0$. En este procedimiento el alumno está asignando a x dos valores distintos a la vez.
Por ejemplo, los estudiantes resolvieron la ecuación $(2x-6)(5x+10)=0$ y encontraron las raíces 3 y -2. Podemos observar en la parte izquierda del siguiente cuadro cómo hicieron la verificación gran parte de ellos y a la derecha lo que en realidad deberían haber hecho:

3 y –2 son las raíces de la ecuación $(2.\mathbf{3}-6)\,(5(\mathbf{-2})+10)=0$	**VS**	*3 y –2 son las raíces de la ecuación* $(2.\mathbf{3}-6)(5.\mathbf{3}+10)=0$ y $(2.(\mathbf{-2})-6)(5(\mathbf{-2})+10)=0$

Preguntas de investigación
Las preguntas que surgen a partir de los estudios exploratorios realizados son muchas, pero en la presente investigación nos concentramos principalmente en los siguientes tres puntos y haremos más tarde mención a ellos de acuerdo a la numeración que les asignamos a continuación:

1. Observaremos las estrategias que utilizan los estudiantes que conocen la propiedad Hankeliana de los números reales cuando se enfrentan a la resolución de ecuaciones polinómicas factorizadas e igualadas a cero
2. Examinaremos el error que cometen los estudiantes cuando sustituyen a la incógnita por dos valores distintos en forma simultánea, al verificar las raíces en una ecuación polinómica que está dada en forma factorizada e igualada a cero y formularemos posibles explicaciones del mismo
3. Buscaremos elementos para destacar en relación a los estudiantes que generalizan la propiedad Hankeliana de los números reales a otras estructuras algebraicas donde no es válida, aun cuando hayan recibido instrucción específica al respecto.

[3] Nos referimos concretamente a ecuaciones de la forma $(ax+b)(cx+d)=0$ con a y c diferentes de cero y con dos raíces **distintas**.

Los estudiantes con los que trabajamos
La investigación se realizó con estudiantes de tres niveles:- 3er. año de Ciclo Básico de enseñanza secundaria. Último año de bachillerato. 3er. año de profesorado de matemática

Para conocer las diferencias en cuanto a las estrategias de resolución elegidas
Para observar la aparición del error, en relación al nivel de los estudiantes.
Para ver la versatilidad de pensamiento según el nivel que cursaban, ante evidencias de que la propiedad no era válida en determinadas situaciones.

- Para observar la evolución del universo de representaciones para a y b en a.b=0, cuando no se especifica qué representan *a* y *b*.

Consideraciones teóricas
Para formular posibles explicaciones a los fenómenos en los que nos hemos centrado tuvimos en cuenta diversos marcos teóricos: la noción de *Imagen conceptual* presentada en (Vinner, 1991), el concepto de *compartimentalización* (Vinner, 1990), la *Teoría de la Intuición* (Fischbein, 1987) y la noción de *Autonomía de los modelos mentales* presentada en (Fischbein, Tirosh, Stavy & Oster, 1990). Como marco téorico específico del pensamiento algebraico usamos el *modelo 3 UV* presentado por Trigueros y Ursini (Por aparecer).
Vinner (1991) modela la estructura cognitiva de un individuo asumiendo la existencia de dos celdas. Una celda es para la definición y la otra para la imagen conceptual. Una o las dos pueden estar vacías. La celda de la imagen conceptual se considera vacía hasta que algún significado se asocie al nombre del concepto.
Cuando introducimos un concepto por primera vez a través de su definición, la celda de la imagen conceptual está vacía en un principio, pero luego de varios ejemplos y explicaciones se va llenando. No necesariamente refleja todos los aspectos de la definición del concepto. Por ejemplo, la *imagen conceptual* podría contener la información de que si $a.b=0$ entonces $a=0$ o $b=0$, pero no contener la información de lo que representan *a* y *b*. Esto permitiría explicar la generalización que los estudiantes realizan de esta propiedad a estructuras donde no es válida. Con esto queremos decir que los estudiantes recuerdan la propiedad como regla y pierden de vista qué objetos matemáticos representan *a* y *b*. Con esto dan validez universal a la propiedad y cometen errores.
También podría ocurrir que la imagen conceptual de los estudiantes tuviera solamente la regla pero no aplicaciones de ella, como ser la resolución de ecuaciones factorizadas e igualadas a cero.
¿Pero cómo podríamos explicar el hecho de que el alumno aun teniendo conocimiento de la propiedad Hankeliana no la aplica a la resolución de ecuaciones, no solo cuando es la herramienta más adecuada, sino también, cuando es la única herramienta disponible?
Para explicar este fenómeno usaremos el concepto de *compartimentalización* que presenta Vinner (1990):
"By "compartmentalization", I refer to situations in which two pieces of knowlodge (or information) that are known to an individual and that should be connected in the person´s thought processes nevertheless remain unrelated". (Vinner, 1990)

Se habla de *compartimentalización* cuando esperamos que cierto detalle específico sea evocado en la mente de cierta persona, porque ese detalle es relevante en lo que la persona está pensando, pero resulta que éste no es evocado.
En el caso que estamos estudiando, de alguna manera, el conocimiento (la propiedad) está en algún lugar de la mente pero lo que no siempre se produce es una evocación del mismo para poder aplicarlo. Muchos alumnos conocen la propiedad pero no todos la aplican, aun cuando sea la herramienta óptima. Parecería que la ecuación factorizada e igualada a cero no constituye un estímulo suficiente que les permita evocarla. Entonces no se produce una asociación que se supone debería realizarse y el alumno no obtiene éxito en la actividad que enfrenta, ya sea porque no relaciona el contexto de las ecuaciones con la propiedad y ésta es la única herramienta disponible o porque usa otras herramientas más costosas a nivel de la operatoria involucrada y comete errores.
Vinner (1990) nos habla de que los estudiantes pueden tener ideas inconsistentes. Una persona difícilmente pueda decir que *p* y *no p* pueden verificarse simultáneamente, sin embargo, hay situaciones que pueden derivar contradicciones.
Pudiera ser que en cierto momento t_1 un estudiante creyera en la validez de cierta proposición *p* y en otro momento diferente t_2, creyera en la validez de *no p*, sin darse cuenta de que en t_1 pensó que *p* era verdadera. Este autor señala que esta situación puede verse como un caso especial de *compartimentalización*. También puede suceder que un estudiante tenga ideas inconsistentes, pero una idea no sea la negación de la otra, con esto queremos decir que un estudiante podría tener las ideas *p* y *q* y que de ellas se derivaran ideas como *r* y *no r*.
Ejemplifiquemos esta situación tomando el caso del error en la verificación que hemos observado. Se le pide a un alumno resolver y verificar la ecuación $(x-5)(x-6)=0$. Supongamos que calcula las raíces 5 y 6, y realiza el siguiente planteo (incorrecto) como verificación de las mismas:

$$(\mathbf{5}-5)(\mathbf{6}-6)=0$$
$$0\ .\ 0=0$$

Obsérvese que el estudiante está implícitamente aceptando que $x \neq x$, ya que para él, simultáneamente, una x vale 5 y la otra vale 6. Pero no es el estudiante el que se da cuenta de este error lógico sino que seguramente sea su docente, que bien sabe que x es igual a x. Por otra parte, si al estudiante se le preguntara si $x=x$, es bastante seguro que conteste que sí. Con esto queremos decir que, el estudiante no puede percibir la contradicción en el planteo que hace, aun cuando de alguna manera sabe que x debe ser igual a x. Posiblemente, lo que no hace el estudiante es la conexión. No se da cuenta que sustituir dos valores distintos equivale a utilizar dos diferentes x en la misma situación. Pero aún así, no tenemos la certeza si de evocarse estos dos comportamientos el alumno se daría cuenta de su error.
Según Trigueros y Ursini (Por aparecer):
"The development of algebraic language and its use for different purposes requires the development of the concept of variable as a single multifaceted concept that includes different aspects".

Desde su punto de vista, la enseñanza debería hacer énfasis en la distinción entre los diferentes usos de la variable con el objetivo de que los estudiantes pudieran integrarlos en una única entidad conceptual: la variable. Reconocen diferentes usos de la variable que están relacionados a diferentes concepciones del álgebra, por ejemplo, aritmética generalizada, resolución de problemas, estudio de relaciones y funciones, estudio de estructuras. Estas diferentes concepciones del álgebra y los diferentes usos de la variable aparecen comúnmente mezclados en la enseñanza del álgebra escolar. Parecería que las prácticas docentes no hacen énfasis en la distinción entre cada uno de los usos y por tanto se hace difícil para los estudiantes diferenciarlos. Trigueros y Ursini señalan que en la enseñanza del álgebra elemental, los aspectos más usados del concepto de variable son: como una incógnita, como un número genérico, y como variables en una relacional funcional.

Algunos resultados en relación a las preguntas de investigación

1. Se ha observado que aun cuando los estudiantes sepan que si $a.b=0$ entonces $a=0$ o $b=0$, siendo a y b números reales, no todos lo aplican a la resolución de una ecuación polinómica de segundo grado, factorizada e igualada a cero, aun cuando este procedimiento sea el más económico para aplicar en esta situación y en muchos casos el único disponible. Los estudiantes aplican otras técnicas más costosas al nivel de la algoritmia implicada, como la fórmula cuadrática, y cometen errores. Por ejemplo, para resolver $(x-5)(x-6)=0$, desarrollan obteniendo $x^2-11x+30=0$ y aplican la fórmula cuadrática: $x=\frac{11\pm\sqrt{(-11)^2-4.1.30}}{2.1}$ deduciendo las raíces 5 y 6. Nos preguntamos por qué conociendo la propiedad antedicha no plantean directamente $x-5=0$ o $x-6=0$, obteniendo las raíces 5 y 6.
Algunos estudiantes creen que los docentes les requieren procedimientos complejos para resolver las situaciones, o por lo menos, procedimientos de alto costo algorítmico. Los estudiantes de bachillerato todavía no poseen la autonomía suficiente como para valorar qué es lo más económico, en muchos casos "les da igual" uno u otro procedimiento. Los de nivel terciario aplican la propiedad en su inmensa mayoría, argumentando, en este nivel sí, razones de economía.

También hemos observado que los estudiantes tienen dificultades para interpretar en $(x-5)$ y $(x-6)$ números reales, razón por la cual, la propiedad tampoco es evocada y los estudiantes terminan aplicando la fórmula cuadrática.

2. Observamos que algunos estudiantes, al momento de verificar las raíces de una ecuación como por ejemplo $(x-5)(x-6)=0$, cometen un error que fue observado en todos los niveles (medio, bachillerato, terciario). Como ya explicamos, este error consiste en la sustitución simultánea de la x por valores diferentes. Esto es $(\mathbf{5}-5)(\mathbf{6}-6)=0$, haciendo una sola verificación y no dos, una para cada valor de x hallado. Como la ecuación igual "verifica" ya que 0.0=0, los alumnos no se dan cuenta del error.
Parecería que se trata de un error lógico. Los estudiantes creen que como la ecuación tiene dos raíces, deben estar "ambas presentes" al momento de verificar. El conflicto estaría en que las raíces son 5 **y** 6 pero en la expresión algebraica $x=5$ **o** $x=6$. Los alumnos parecerían no comprender la lógica de la expresión algebraica

donde la variable x admite "un valor a la vez". Por otra parte, si bien los alumnos explicitan que alcanza con que uno de las factores sea cero para que el producto sea nulo, existe una fuerte tendencia a creer que ambos factores deben ser cero. Esto pudo evidenciarse cuando se sustituyó la incógnita, por papelitos que tapaban números:

Los papelitos tapan números, ¿puedes averiguarlos? $(\square -5)(\square -6)=0$

Observamos que existe una fuerte tendencia a creer que detrás de los papelitos están los números 5 y 6, respectivamente. Podría estar sucediendo que esta creencia fuera luego llevada al contexto de resolución de ecuaciones, provocando errores.

3. Parecería que algunos estudiantes generalizan la propiedad: A.B=0 entonces A=0 o B=0, válida en los anillos que no admiten divisores de cero, a diferentes contextos donde no es válida. Entre ellos el producto de matrices o el producto de funciones de dominio real. Esto se observó aun cuando los estudiantes habían recibido instrucción específica al respecto.

No poseemos evidencias aún, pero hemos formulado la hipótesis de que las respuestas de los estudiantes podrían estar respondiendo a la aplicación de un modelo mental que preserva las características sintácticas de la propiedad sin atender a la semántica de los objetos matemáticos involucrados.

Posible prototipo

$\cong \times \leq = \mathbf{0} \Rightarrow \cong = \mathbf{0}$ **o** $\leq = \mathbf{0}$

Bibliografía

English, L. & Halford, G. (1995). *Mathematics Education. Models and Processes*. Mahwah, New jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in Science and Mathematics. An Educational Approach*. Dortretch: D. Reidel Publishing Company.

Fischbein, E. Tirosh, D., Stavy, R. & Oster, A.(1990). *The Autonomy of Mental Models*. For the Learning of Mathematics, 10, 23-30.

Trigueros, M. & Ursini, S. (Por aparecer). "Starting college students' difficulties in *working with different uses of variable"*. En Research in Undergraduate Mathematics Education. American Mathematical Society. Vol. 5

Vinner, Sh. (1990). *Inconsistencies: Their Causes and Function in Learning Mathematics*. Focus on Learning Problems in Mathematics, 12 (3 & 4), 85-98.

Vinner, Sh (1991). *The role of definitions in teaching and learning*. En Tall, D. (ed) Advanced Mathematical Thinking. Kluwer. Dordretch/Boston/London Pp. 65-81.

ACTITUDES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS EN FORMACIÓN HACIA LA MODELIZACIÓN Y LA CALCULADORA GRÁFICA

José Ortiz Buitrago; Enrique Castro Martínez; Luis Rico Romero;
Universidad de Carabobo. Venezuela; Universidad de Granada, España
ortizjo@cantv.net; ecastro@ugr.es; lrico@ugr.es

Resumen
En este trabajo se estudia la actitud de un grupo de diez profesores de matemáticas en formación respecto a un programa de formación recibido, basado en el uso de la modelización y la calculadora gráfica en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Dicho programa se implementó mediante un curso-taller. Se consideró importante conocer la actitud de los participantes en el desarrollo del programa tanto al inicio como al final del mismo. Para ello se diseñó un cuestionario de actitudes estilo Likert, cuyo propósito fue captar los cambios actitudinales que pudo generar, en los profesores en formación, el desarrollo del programa que integra la modelización y la calculadora gráfica en el contexto del álgebra lineal escolar. Dicha escala se diseñó, a partir de una estructura matricial sostenida en categorías de análisis, tomando en cuenta dos variables. La primera variable definida mediante los componentes del programa; es decir: modelización (C_1), calculadora gráfica (C_2), estructura conceptual del álgebra lineal escolar (C_3), y diseño de actividades didácticas (C_4). La segunda variable definida por las dimensiones del concepto de currículo en el nivel de planificación educativa; es decir: alumno (D_1), profesor (D_2), contenido matemático (D_3) y uso social (D_4). Se midió la fiabilidad del instrumento, aplicando el coeficiente rho (ρ_s) de Spearman. Se realizaron análisis estadísticos de ítems (log-lineal), de reacciones extremas (Moses) y de sujetos (cluster y escalamiento multidimensional). Del análisis log-lineal se evidenciaron cambios favorables en los participantes pero no estadísticamente significativos, excepto en el componente C_3 y la dimensión D_3. Por otra parte, los participantes mostraron reacciones extremas significativas en las actitudes hacia la modelización respecto de la evaluación y hacia las actividades didácticas relativas a la evaluación. El análisis de los sujetos permitió identificar la estructura grupal actitudinal presente tanto al inicio como al final de la aplicación de la escala.

Introducción
Se da por supuesto que hay diferentes acepciones del término “actitud”. En la presente investigación se considera para hacer referencia a respuestas afectivas de intensidad moderada y relativa estabilidad. Además, se parte de la consideración que la actitud es un constructo en el cual hay una interrelación de componentes cognitivas, afectivas y teleológicas. Esta última está referida a las finalidades que podrían estar presentes en determinadas actitudes.
El análisis de las actitudes hacia las nuevas tecnologías y la modelización se justifica en virtud que en algunos sectores se observa cierta resistencia hacia su uso en el aula, por ello consideramos de interés estudiar las actitudes de los profesores en formación en torno a la potencialidad didáctica de la calculadora gráfica, para la enseñanza del álgebra lineal, a partir del proceso de modelización de situaciones del mundo físico o social. Es un hecho la incorporación de las nuevas tecnologías en educación matemática; sin embargo para ello se requiere de un profesor competente; éste podría conseguirse con una sólida formación inicial en su campo profesional; es decir, en lo didáctico y en lo disciplinar (McLeod, 1993). Aunado a esto, no se puede obviar que en el proceso de enseñanza y aprendizaje las actitudes de rechazo, de los profesores, hacia las nuevas tecnologías pueden afectar negativamente las actitudes de los

alumnos hacia el uso de las calculadoras gráficas, a pesar de que éstas últimas podrían jugar un rol importante en el mejoramiento de actitudes de los alumnos hacia las matemáticas (McLeod, 1992). En tanto que dominio afectivo en la formación inicial de profesores de matemáticas, las actitudes podrían ralentizar o potenciar la congruencia entre el ser y el deber ser del proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, esto se evidencia en los estudios de McLeod (1992, 1993), Ponte, Matos, Guimaraes, Cunha & Canavarro (1992), Almeqdadi (1997), Philippou & Christou (1998) y Mohammad & Tall (1999). En suma, el interés por las actitudes de los profesores en formación reposa también en la importancia que a ésta se le asigna en la legislación educativa en España. Las actitudes forman parte de los objetivos de los programas de estudio de la escuela secundaria. Los estudios del Instituto Nacional de Calidad y Evaluación (1998ª, 1998b, 2001) sobre el sistema educativo español, en diferentes niveles, muestran entre sus hallazgos relacionados con los profesores de matemáticas, que: 1) los profesores de matemáticas en ejercicio son los que menos valoran y utilizan los medios materiales tales como audiovisuales y ordenadores; 2) los profesores de matemáticas son los menos partidarios de emplear una metodología innovadora y participativa; 3) los profesores valoran más los materiales elaborados por ellos mismos. De lo antes señalado se deduce que los profesores de matemáticas no tienen una actitud positiva hacia la incorporación de cambios en las estrategias de enseñanza y, por tanto, las actitudes de los profesores podrían afectar la puesta en práctica del currículo acorde con la normativa contemplada en la Ley de Ordenación General del Sistema Educativo (LOGSE) vigente en España desde el año 1990. En investigación evaluativa también se ha venido incorporando el estudio de las actitudes. Ortiz (2000, 2002) y Bedoya (2002) observan que conociendo la actitud de los sujetos ante los componentes de un programa, previo a su implementación y posterior a ella, permite identificar aspectos que el programa a podido modificar en la actitud de los sujetos. Es decir, el estudio de las actitudes favorece el conocimiento del posicionamiento de los sujetos ante los componentes de un programa en particular.

En esta investigación se estudia las actitudes de los profesores en formación hacia cuatro componentes que están relacionadas con las necesidades identificadas por los estudios del Instituto Nacional de Calidad y Educación (INCE). Esas componentes son la calculadora gráfica, la modelización, el álgebra lineal y el diseño de unidades didácticas.

Para indagar respecto a las actitudes de los profesores en formación se recurre al diseño e implementación de un programa de formación que incorpora la modelización matemática y la calculadora gráfica en el diseño de actividades didácticas de contenido algebraico. Dicho programa tiene como propósito ampliar el soporte cognoscitivo, de los participantes, necesario para el diseño de actividades didácticas; es decir, para actuar razonadamente en la toma de decisiones al momento de diseñar las referidas actividades.

La interrogante de investigación fue la siguiente:

¿Qué actitudes manifiestan los profesores en formación ante el uso didáctico de la modelización y la calculadora gráfica en la elaboración de unidades didácticas relacionadas con elementos algebraicos?

A partir de esta cuestión se plantea como objetivo analizar las actitudes de profesores en formación hacia el uso didáctico de la modelización y la calculadora gráfica en la elaboración de unidades didácticas relacionadas con el álgebra lineal.

Aproximación metodológica

Para efectos del estudio se toma un grupo de diez profesores en formación, todos cursantes del último año de licenciatura en matemáticas en la Universidad de Granada, España, los cuales fueron sometidos a un programa de formación para conocer las actitudes respecto a sus componentes. Para captar las actitudes de estos sujetos se utiliza la escala de actitudes descrita en Ortiz, Rico & Castro (2001). La misma fue construida en correspondencia con la modelización, calculadora gráfica, álgebra lineal y actividades didácticas; y con las dimensiones del currículo (Rico, 1997). La escala permite conocer las actitudes de los participantes hacia cada componente del programa propuesto en lo referente a: el alumno, el profesor, el contenido matemático y la evaluación. Para la valoración de cada ítem se presentan cinco opciones Las mismas fueron: totalmente en desacuerdo (TD), parcialmente en desacuerdo (PD), neutral (N), parcialmente de acuerdo (PA) y totalmente de acuerdo (TA). Este cuestionario se aplicó al inicio (para captar la actitud de entrada) y al final del desarrollo del programa a manera de identificar variaciones.

Resultados

Análisis de los resultados en la aplicación de la escala

Se consideran las ponderaciones o pesos, iniciales y finales, dadas a las parejas de ítems (ver tabla 1). Dichas ponderaciones serán números entre 20 y 100, según todos los participantes tomen la opción TD (20x1=20) o la opción TA (20x5=100). La ponderación promedio será 20x3=60, obtenida al considerar que todos los participantes escogieron N (neutro) en todos los ítems del cuestionario.

En principio, a partir de las ponderaciones mostradas en la tabla 1 se podría afirmar que el desarrollo del Programa resultó moderadamente favorable al cambio de actitudes objeto de estudio. Sin embargo, estas inferencias requieren de un estudio estadístico que pueda dar soporte a lo dicho anteriormente, para replantear o reformular estos juicios o aseveraciones sobre las causas de los ligeros cambios actitudinales asignado a la realización del curso-taller.

Análisis estadístico de ítems

Se aplicó la técnica de los modelos log-lineales a los datos de la tabla 1. En el análisis log-lineal se observa que C_3 es el único componente ponderado favorablemente con significación estadística. Aunque el valor de λ= 0,0619821 para C_1, permite apreciar un cambio positivo hacia la modelización matemática, pero no estadísticamente significativo. El análisis log-lineal también señala cierta tendencia de las ponderaciones de la CG (C_2) y las unidades didácticas (C_4) por debajo de la media de las mismas, lo cual expresa una valoración menos favorable hacia ellas.

		Dimensiones curriculares									
		Alumno D_1		Profesor D_2		Contenido D_3		Evaluación D_4		Totales	
		Momento		Momento		Momento		Momento		Momento	
		1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
Componentes del Programa	Modelización (C_1)	91	96	82	92	90	89	74	59	337	336
	Calculadora (C_2)	77	77	66	67	86	89	63	69	292	302
	Älgebra lineal (C_3)	87	100	73	75	91	96	89	93	340	364
	U. Didácticas (C_4)	67	71	77	72	69	77	67	59	280	279
	Totales	322	344	298	306	336	351	293	280		

Tabla 1 Ponderaciones iniciales y finales de las actitudes

Respecto a las dimensiones curriculares (C_j) el análisis realizado a la tabla 1 indica que la mayor ponderación fue dada al alumno (D_1), seguida de D_3 y D_2 respectivamente. Al observar el análisis log-lineal se nota que el contenido matemático es el mejor ponderado, y además estadísticamente significativo, seguido de D_1, D_2 y D_4 respectivamente. Sin embargo, no hay una correspondencia en el orden de importancia de los D_j. Se encontraron cambios favorables en D_j pero no son estadísticamente significativos.

En cuanto a la variable C_iD_j, el análisis de diferencias sugiere que C_3D_1: actitud hacia la resolución de problemas de álgebra lineal respecto del alumno tiene mejor ponderación, seguido de C_1D_2: actitud hacia la modelización referida al profesor, C_4D_3: actitud hacia las unidades didácticas referidas al álgebra lineal y C_2D_4: actitud hacia la calculadora gráfica respecto de la evaluación. Asimismo, el análisis log-lineal muestra congruencia con lo obtenido en el análisis de diferencias, aunque no establece ponderación estadísticamente significativa.

Los resultados de la escala de actitudes sugieren cambios favorables en los participantes, pero a la luz del análisis log-lineal éstos no son estadísticamente significativos. Por otro lado, se identifican actitudes que no sufrieron cambio luego de la aplicación del programa, como el caso C_2D_1: actitud hacia la CG respecto del alumno.

Análisis estadístico de reacciones extremas

Para saber si existen reacciones extremas en sentido positivo o negativo se empleó el test no paramétrico de reacciones extremas de Moses. Se concluye que las reacciones extremas en las actitudes de los participantes, en el momento inicial, difieren significativamente de las actitudes de los mismos en el momento final en relación con las variables C_1D_4 y C_4D_4. Observándose que, en relación con la variable C_1D_4, en el momento inicial, un subgrupo (seis sujetos) se manifestó *parcialmente de acuerdo*, mientras que en el momento final otro subgrupo (cuatro sujetos) se manifestó *parcialmente en desacuerdo*. De igual manera, este mismo comportamiento lo observamos en la variable C_4D_4, donde un subgrupo (cinco sujetos) se manifestó *parcialmente de acuerdo* en el momento inicial y en el momento final otro subgrupo (cuatro sujetos) se manifestó *parcialmente en desacuerdo*.

Análisis estadístico de los sujetos

A efectos de explicar las posibles agrupaciones de sujetos, tanto al inicio como al final de la aplicación del programa, se utilizan las técnicas del análisis cluster y la de escalamiento multidimensional.

Análisis cluster

En el momento inicial identificamos dos clusters, específicamente uno constituido por los sujetos s2, s3, s8, s5 y s6 y el otro formado por los sujetos s9 y s10. Luego de identificados los clusters se considera de interés conocer las coincidencias o disparidades intracluster. De esa manera se podría tener mayor claridad en las conformaciones de los grupos y sus consecuencias para el estudio.

En el momento inicial, los sujetos del grupo más numeroso coinciden en actitudes favorables hacia componentes referidas a la dimensión curricular alumno. Por otro lado, presentan disparidad en la actitud hacia las unidades didácticas en la enseñanza del álgebra (C_4D_3).

El análisis estadístico del momento final permitió identificar un grupo de cinco miembros. En él se destaca que todos sus miembros se manifiestan totalmente de acuerdo en lo que respecta a las actitudes hacia la resolución de problemas algebraicos en todas las dimensiones del currículo. Esto indica que en dicho grupo la actitud de preferencia favorable es hacia el álgebra lineal.

A partir de la comparación entre los resultados del análisis estadístico de los sujetos, con los clusters seleccionados, pudimos confirmar que las actitudes más favorables de manera significativa fueron C_3D_1 y C_3D_4, hacia las cuales se manifestaron los sujetos, de los dos grupos mayoritarios totalmente de acuerdo, tanto al inicio como al final. El análisis de escalamiento multidimensional confirmó el análisis cluster.

Lo antes expuesto induce a pensar que el análisis estadístico de los sujetos pone en evidencia la importancia de ser cauteloso al momento de emitir juicios categóricos acerca de las tendencias actitudinales y por lo tanto hacia el impacto del programa en estudio. De allí la importancia de la complementariedad de técnicas de análisis de los datos en el estudio de las actitudes, para lograr un abordaje mucho más profundo para la obtención de conclusiones con mayor sustentación.

Conclusiones

1. Del análisis log-lineal aplicado a la escala de actitudes se desprende que no hubo cambios globales significativos de actitud en los sujetos. No obstante, el desarrollo del programa provocó un ligero cambio hacia actitudes favorables.
2. Se encontró diferencias significativas entre los componentes del programa. El componente C_3: resolución de problemas de álgebra lineal tuvo una valoración superior a la media de forma significativa. Por el contrario, el componente C_4: actividades didácticas fue infravalorado por los sujetos.
3. El moderado impacto del programa en las actitudes hacia la CG en el aprendizaje del alumno podría indicar que algunos participantes conservan temores a que sus alumnos pierdan habilidades algebraicas con papel y lápiz.

4. El test de reacciones extremas de Moses puso de manifiesto que hay sujetos que tuvieron un cambio brusco de actitud hacia algunos de los aspectos considerados. En concreto en la actitud hacia la modelización respecto de la evaluación (C_1D_4) y hacia las actividades didácticas referidas a la evaluación (C_4D_4).
5. El cambio de actitud menos favorable se observó hacia las actividades didácticas para la evaluación.
6. El análisis estadístico de los sujetos permitió identificar disparidades y coincidencias en las actitudes de subgrupos de sujetos. Las disparidades identificadas en el momento inicial fueron en la actitud hacia las unidades didácticas referidas al contenido matemático (C_4D_3) y en el final fueron hacia las unidades didácticas referidas a la evaluación (C_4D_4). Las actitudes hacia las cuales hubo mayor coincidencia a favor, tanto al inicio como al final, fueron hacia la resolución de problemas algebraicos referidos al alumno (C_3D_1) y a la evaluación (C_3D_4).

Bibliografía

Almeqdadi, F. (1997). Graphics Calculator in Calculus: an Analysis of Students' and Teachers' Attitudes. Tesis Doctoral. Ohio (USA): Ohio State University

Bedoya, E. (2002). Formación Inicial de Profesores de Matemáticas: Enseñanza de Funciones, Sistemas de Representación y Calculadoras Gráficas (Tesis Doctoral). Granada: Universidad de Granada

Instituto Nacional de Calidad y Evaluación (1998ª). *Diagnóstico general del sistema educativo. Avance de resultados.* Madrid: Autor

Instituto Nacional de Calidad y Evaluación (1998b). Diagnóstico del Sistema Educativo. La escuela secundaria obligatoria, 1997 1. Elementos para un diagnóstico del Sistema Educativo Español. Informe Global. Madrid: Autor

Instituto Nacional de Calidad y Evaluación (2001). Evaluación de la Educación Secundaria Obligatoria 2000 Datos básicos**.** Madrid: Autor

McLeod, D. (1992). Research on Affect in Mathematics Education: A Reconceptualization. En D.A. Grows (ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. (pp. 575-596). New York: Macmillan Publishing Company

McLeod, D. (1993). Affective Responses to problem Solving. *The Mathematics Teacher*. Vol 86, No. 9. pp.761-763.

Mohammad, Y. & Tall, D. (1999). Changing Attitudes to University Mathematics Through Problem Solving. *Educational Studies in Mathematics*, 37, 67-82.

Ortiz, J. (2000). Modelización y Calculadora Gráfica en Formación Inicial de Profesores de Matemáticas. Memoria de Tercer Ciclo. Granada: Universidad de Granada.

Ortiz, J. (2002). Modelización y Calculadora Gráfica en la Enseñanza del Álgebra. Estudio Evaluativo de un Programa de Formación (Tesis Doctoral). Granada: Universidad de Granada

Ortiz, J., Rico, L. & Castro, E. (2001). Attitudes of preservice mathematics teachers towards modeling and the graphic calculator. En M. Van den Heuvel-Panhuizen (ed.). *Proceedings of the 25th Conference of the PME*. (vol. 1). Utrecht, NL: Freudenthal Institute

Philippou, G.N. & Christou, C.(1998). The effects of a preparatory mathematics program in changing prospective teachers´ attitudes towards mathematics. *Educational Studies in Mathematics,* 35, 189-206

Ponte, J.P., Matos, J.P. Guimaraes, H.M., Cunha, L. & Canavarro, A.P.(1992). Students´ Views and Attitudes Towards Mathematics Teaching and Learning: A Case Study of a Curriculum Experience. En W. Geeslin y K. Graham (eds.) *Proceedings of PME 16* (vol.II, p.218-225). Durham, NH: University of New Hampshire.

Rico, L. (1997). Los organizadores del currículo de matemáticas. En L. Rico (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (Cap. II). Barcelona, España: ICE/Horsori.

ACTIVIDAD METACOGNITIVA AL HACER USO DE SOFTWARE EDUCATIVO

Sandra Castillo
Universidad Nacional Experimental de Guayana. Venezuela.
scastill@uneg.edu.ve viajero@cantv.net

Resumen
Con énfasis en la importancia que tiene la Metacognición dentro del proceso de aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas, se reporta parte del trabajo de una investigación cuyo objetivo es realizar un estudio descriptivo, interpretativo y evaluativo de las habilidades metacognitivas que los alumnos desarrollan, al realizar actividades de aprendizaje del cálculo de áreas a través de la integral definida, haciendo uso del software educativo Mathgraph. El diseño de investigación se basó en el estudio de caso, el cual puede ser utilizado para estudiar sistemáticamente un fenómeno; el instrumento que permitió evaluar las habilidades metacognitivas de los alumnos fue el cuestionario propuesto por Mayor, Suengas y González (1995), basado en un modelo global -tridimensional- que involucra variables y los componentes metacognitivos.

Introduccion

La importancia de los aportes que todo docente puede ofrecer a su institución está determinada por la calidad de las investigaciones que él puede realizar. Bajo esa perspectiva, la autora de este reporte, una vez que conoce la existencia del Material Educativo Computarizado Mathgraph, un software educativo idóneo para ser utilizado en el proceso de aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas, detecta la necesidad de estudiar las habilidades metacognitivas que desarrollan los alumnos cuando usan la computadora para dar solución a problemas, en este caso de Matemática II. El lector se preguntará ¿por qué el estudio de las habilidades metacognitivas y no otra variable?. La razón de esto, está en que los alumnos de la UNEG son preparados desde el Curso Introductorio con un componente llamado Desarrollo de Procesos Cognoscitivos (DPC) y específicamente en su unidad II, trata la resolución de problemas (Reglamento General de la UNEG, 1996) y esto hace que haya familiaridad con las variables tratadas.

De igual manera, últimamente se ha dado mayor importancia a la metacognición en distintas investigaciones dentro del campo educativo, llevadas a cabo en todos sus niveles y en distintas naciones y, para dar un ejemplo de ello, aquí en Venezuela encontramos a Zaragoza (2001), quien en su trabajo "Reconceptualización del proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática en la I y II etapa de la Educación Básica" expresa que: "La enseñanza de la matemática vista en función de las necesidades del ciudadano que debe trabajar habitualmente en situaciones de incertidumbre debe necesariamente contemplar el desarrollo de estrategias metacognitivas". Se hace, pues; no sólo necesario sino imprescindible, forjar cada día estudios e investigaciones que conlleven a profundizar y extender el amplio mundo de la metacognición, de tal forma que todo docente debe estimular la práctica y la discusión de las estrategias espontáneas e inconscientes que generan los estudiantes, ya que sin duda contribuirá a su desarrollo.

La metacognición permite a los alumnos tomar conciencia de su propio proceso de aprendizaje, discernir y escoger sus propias estrategias para planificar su aprendizaje y la utilización de instrumentos necesarios para identificar y corregir las fallas en su aprendizaje (Landaeta, 1998)

Esta investigación arrojó resultados que contribuyen, de alguna manera a enriquecer el proceso de aprendizaje y enseñanza; profundizar en el desarrollo de habilidades cognoscitivas y metacognitivas; ofrecer alternativas para la resolución de problemas de ingeniería y desarrollar la inquietud de crear software educativo para la enseñanza de la matemática.

La investigación

La investigación que se reporta, tuvo las siguientes variables de estudio: (1) El uso del Mathgraph, (2) Las habilidades metacognitivas y, (3) La resolución de problemas. Se debe señalar que en primer lugar, el uso del Mathgraph por parte de los estudiantes se dio a través de un proceso de monitoreo guiado por la docente-investigadora; segundo, la metacognición se trató como el producto cartesiano entre sus componentes y variables, modelo propuesto por Mayor, Suengas y González (1995) y tercero, que la resolución de problemas se estudió tomando en cuenta el enfoque del procesamiento de la información (Puente, 1989).

Como objetivo general se planteó realizar un estudio descriptivo, interpretativo y evaluativo del desarrollo de habilidades metacognitivas en alumnos que utilizan el Material Educativo Computarizado - Mathgraph - para resolver problemas relacionados con la ingeniería haciendo uso de la integral definida (unidad II) en la asignatura Matemática II del Proyecto Ingeniería en Informática de la Universidad Nacional Experimental de Guayana.

> *El marco de referencia que fue considerado corresponde al psicólogo Robert Gagné, quien comparte los postulados básicos de los enfoques: conductismo y cognoscitivismo. Además agrega una taxonomía y una teoría de aprendizaje, como resultado de su tarea como investigador; él propone ligar tipos de estímulos a los que llama eventos con tipos de respuestas a las que llama resultados (Galvis, 1992). Entre los conceptos básicos figuran:*
> *Aprendizaje, el cual se entiende como el proceso de cambio en las capacidades del individuo, el cual produce estados persistentes y es diferente de la maduración o desarrollo orgánico. Se infiere que ha ocurrido cuando hay un cambio de conducta que perdura.*
> *Modelo de procesamiento de información y aprendizaje: El proceso de aprendizaje de Gagné puede explicarse siguiendo las teorías del procesamiento de la información, específicamente el propuesto por Lindsay y Norman (1972); no obstante, existen algunas diferencias dadas por las relaciones entre las memorias y los mecanismos de interacción con el ambiente, además de el control ejecutivo, estructura que influye en el procesamiento de información y permite que éste gane eficiencia; a través de este control se mejoran los procesos del pensamiento, es decir se aprenden estrategias cognitivas y las expectativas generadas por estructuras internas de los sistemas de autoaprendizaje, en los que el alumno asume el control del proceso de aprendizaje.*
> *Fases o etapas del aprendizaje: Para Gagné las fases de aprendizaje son las siguientes: motivación, comprensión, adquisición, retención, recordación, generalización, desempeño y realimentación. En resumen, se debe procurar que los alumnos tengan el control sobre el procesamiento de la información que está ligado a cada tipo de aprendizaje, de esta forma se establece la comunicación y la colaboración entre los docentes y los alumnos, indispensable para que se dé el proceso de enseñanza-aprendizaje.*

Por otro lado el potencial educativo que tiene el uso de computadoras en el aula de clases ha sido estudiado exhaustivamente en los últimos tiempos. Hoy en día, se investiga el impacto al emplear este tipo de medios en el proceso de aprendizaje y enseñanza. Luego, las computadoras y la educación se pueden relacionar bajo las siguientes dimensiones (Galvis, 1992):1ra. Dimensión: La computación como objeto de estudio, es decir aprender "acerca de" la computación. 2da. Dimensión: El

computador como medio de enseñanza-aprendizaje, es decir, ambientes de enseñanza-aprendizaje enriquecidos con el computador. 3ra. Dimensión: El computador como herramienta de trabajo en educación, es decir, uso de aplicaciones del computador para apoyar procesos educativos.
La segunda dimensión es la tratada en esta investigación, por cuanto se va a utilizar el material educativo computarizado Mathgraph para enriquecer el proceso de aprendizaje y enseñanza de la asignatura Matemática II de la carrera Ingeniería en Informática de la UNEG.
Bajo el slogan "una nueva forma de enseñar... una nueva forma de aprender" se presenta el Mathgraph para Windows como el resultado de años de experiencia en el diseño de software educativo para la enseñanza de la matemática, realizado por el profesor Luc Bramaud du Boucheron apoyado por un equipo de matemáticos que participaron en la elaboración del programa y en el diseño y aplicación de los métodos docentes asociados. El *estudiante* que utiliza Mathgraph para Windows asimila mejor y más rápido los conceptos matemáticos abstractos que pasan a tener un significado más concreto debido a su utilización interactiva en observaciones, experimentos y problemas. Para el *profesor*, Mathgraph para Windows es un instrumento que facilita la elaboración de problemas, ejercicios y pruebas. Acompañado de guías de estudio diseñadas específicamente para cada tema. Mathgraph para Windows se puede utilizar en laboratorio como parte del *aprendizaje práctico* de numerosas áreas del conocimiento matemático.

Importancia de los procesos cognitivos y metacognitivos en la resolución de problemas

El "resolver un problema" implica el conocimiento de técnicas y procedimientos que se deben poner de manifiesto para lograr tal fin, es decir, "resolver problemas" involucra procesos de cognición y metacognición; años atrás los profesores de matemática pensaban que el camino de acercarse a las técnicas que los estudiantes empleaban para resolver problemas era a través de la práctica voluminosa, pero esto fue sustituido, por la creencia de que es necesario una atención explícita a la enseñanza de varias técnicas y la concientización a los estudiantes de su uso (Kilpatrick, citado por Serres, 1996).
Los procesos metacognitivos son los procesos reguladores, controladores y supervisores que se encargan de disciplinar el pensamiento de modo que este no se desenvuelva anárquicamente (González, 1995). La investigación sobre el rol de la metacognición en la solución de problemas matemáticos, plantea Lester (1994), se ha enfocado en dos componentes relativos: a) conocimiento de los propios procesos del pensamiento, y b) regulación y monitoreo de la propia actividad durante la solución de problemas.
Las acciones metacognitivas han sido vistas como "fuerza motriz" en solución de problemas, influenciando la conducta cognitiva en todas las fases de solución de problemas. Para otros investigadores, la metacognición ha sido vinculada a un ancho rango de factores no cognitivos, como las creencias, afectos y actitudes, control y factores contextuales. La relación entre la metacognición y la actividad de solución de problemas, aun no ha llegado a establecerse con exactitud; sin embargo, Schoenfeld (1992), presenta los tres resultados que han venido a ser generalmente aceptados:

(1) La actividad metacognitiva durante la solución de problemas requiere conocimiento no sólo de qué y cuándo monitorear, sino también cómo monitorear. Además, enseñar a los estudiantes cómo monitorear su comportamiento, es una tarea difícil. (2) El enseñar a los estudiantes a estar más alerta de su cognición y a monitorear mejor sus acciones para resolver problemas, debe ocurrir en el contexto de aprendizaje de conceptos y técnicas matemáticas específicas. (3) El desarrollo de buenas destrezas metacognitivas es difícil y a veces requiere desprender conductas metacognitivas inapropiadas que han sido desarrolladas en experiencias previas. Puede decirse que los mecanismos cognitivos se refieren al proceso mismo del pensamiento en acción y a los razonamientos que se llevan a cabo para resolver problemas, mientras que los metacognitivos se asocian con la conciencia que se tiene de tal proceso, de tal forma que es necesario distinguir entre estar sumergido en un proceso de razonamiento y controlar dicho proceso.

(2)

Las razones por las cuales las metacognición debe ser un elemento importante para el mejoramiento de la educación y en particular de la educación matemática, han sido expuestas por Antonijevic y Chadwick (1981, citado por Zaragoza 2001) en los siguientes términos: a) la explosión de conocimientos nos esta llevando a una sociedad basada en la información de modo que es imprescindible disponer de procesos necesarios para seleccionar, entender y reflexionar sobre la información; b) el aprendizaje es en último término un acto individual; c) una serie de aspectos afectivos abogan por un aprendizaje centrado en el alumno, de modo que de una actitud positiva hacia el aprendizaje y con bajos niveles de ansiedad es posible lograr individuos con un sentimiento de control y con estrategias que le permitan adaptarse y modificar las circunstancias que le rodean.

La autora de este artículo hace referencia al modelo de metacognición propuesto por Mayor, Suengas y González (1995), en el cual se establece la incorporación de la actividad metacognitiva (A); la cognición, funcionamiento de la mente (B) y por último la integración en un modelo global de metacognición (C) de los dos modelos parciales de la actividad metacognitiva y de la cognición

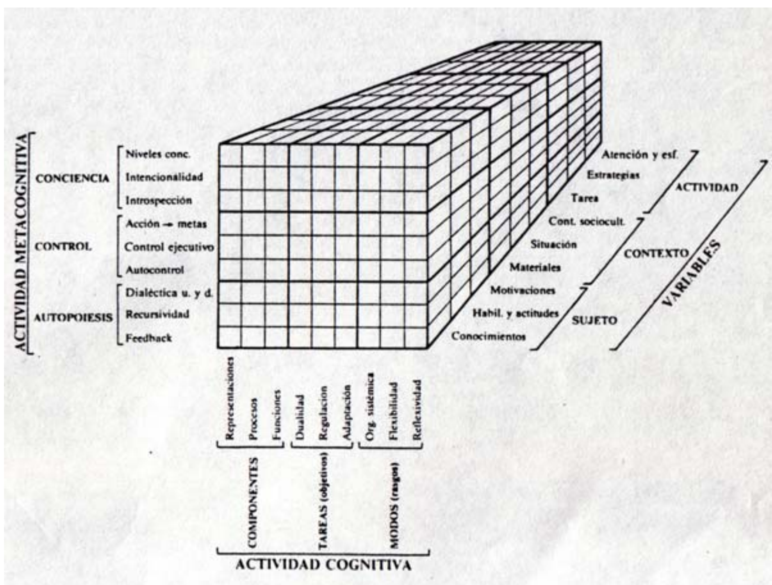
Metodología

El diseño de investigación se basó en el estudio de caso cualitativo, el cual puede ser utilizado para estudiar sistemáticamente un fenómeno con procedimientos rigurosos, aunque no necesariamente estandarizados, este estudio incluyó técnicas cuantitativas, especialmente en la parte correspondiente a la evaluación.

Esta investigación tuvo como unidades de análisis a todos los alumnos (29) inscritos en la sección 02 del semestre II de la carrera Ingeniería en Informática de la UNEG, esta sección fue asignada a la docente-investigadora de manera aleatoria, durante el lapso 2001-I.

El estudio de caso cualitativo, al igual que otros métodos de investigación cualitativa, siempre se lleva a cabo en contextos naturales donde no se manipula el ambiente, por lo que requiere de un instrumento particular que es el instrumento humano -el investigador-. Además se tomó como referencia el cuestionario propuesto por Mayor, Suengas y González (1995) quienes afirman que la mayor parte de los sistemas de la

metacognición utilizan el instrumento del auto informe, en algunas ocasiones graduado a través de las escalas tipo Likert y ellos proponen un sistema de ese tipo al margen de las consideraciones generales que pueden hacerse sobre la evaluación de la actividad metacognitiva, además se intenta evaluar todas las dimensiones de la metacognición y las variables que afectan el rendimiento metacognitivo. (Ver fig. 1).
El cuestionario para obtener la información sobre la capacidad y el rendimiento metacognitivo, incluye items relativos a los tres macro componentes de la actividad metacognitiva; conciencia, control y autopoiesis (la articulación entre la apertura y el cierre para crear algo distinto de lo ya existente) en combinación con las dimensiones de la actividad cognitiva: componentes, tareas y modos o características.
Figura 1. Modelo Tridimensional para Evaluar la Metacognición



Tomado de Mayor, Suengas y González (1995, pag. 169)

Conclusiones
Una vez analizados los datos en un proceso de cuatro fases (exploración, descripción, interpretación y evaluación) se llegó a las siguientes conclusiones con base en los items formulados en el cuestionario arriba citado.
Respecto al primer componente metacognitivo: la toma de Conciencia:
El conocimiento que se tiene del mundo, de los otros y del individuo mismo, se maneja a través de palabras. Al momento de recordar algo, los alumnos manifiestan "conocimiento" de lo que tienen que hacer para recordarlo después; cuando se trata de resolver un problema usando el software educativo, siempre los alumnos tienen conciencia de los pasos que tienen que dar, así como tienen conciencia de las reglas que tienen que aplicar; al momento de prestar atención, los alumnos se dan cuenta de que están concentrados en un solo punto y con dificultad pueden atender dos cosas a la vez; muchas veces, cuando tienen conciencia de los ejercicios que deben hacer, se dan cuenta de que una cosa es la conciencia que tienen y otra la realidad; y cuando son conscientes de esa realidad, tienen conciencia de que su mente introduce un cierto

orden de aquella. Los alumnos al ser conscientes de la tarea a realizar se dan cuenta de que su mente se ajusta a las restricciones y posibilidades de esa realidad.
Respecto al segundo componente metacognitivo: el Control, se concluyó que:
En la representación de la realidad normalmente los alumnos seleccionan metas u objetivos de esa representación. Cuando se presta atención a la docente-investigadora, el alumno en general *controla* el proceso de atención. Con referencia al recuerdo de los pasos a seguir para realizar una tarea en el laboratorio de computación, se encontró que los alumnos seleccionan y ponen en claro cuáles son los objetivos del recuerdo y cuáles son los objetivos de sus pensamientos así como evalúa si es eficaz o no al pensar. Cuando el alumno distingue entre mente y realidad, muchas veces selecciona las metas y objetivos de esa distinción y cuando el alumno descubre la existencia de orden y reglas, él controla el proceso y la eficacia de ese descubrimiento. Al organizar sus conocimientos, recuerdos y pensamientos, utiliza estrategias y procedimientos para organizarlos. Al reflexionar sobre sí mismo y trata de auto controlarse cada alumno selecciona las metas y objetivos de esa reflexión y auto control.
Con referencia al tercer componente metacognitivo: Autopoiesis
Cuando la mente de cada alumno representa la realidad del mundo, de los otros y de sí mismo, éste incrementa sus conocimientos insertando indefinidamente nuevas representaciones; los alumnos son capaces de mejorar su atención dándose cuenta de cómo atienden, cómo recuerdan y pueden mejorar su pensamiento, dándose cuenta cómo piensan; cuando funciona la mente teniendo en cuenta las condiciones de la realidad, los alumnos son capaces de mejorar ese funcionamiento si se dan cuenta de cuáles son las condiciones de la realidad. Cuando la mente se adapta a la realidad o a los propósitos e intenciones del alumno, éste siente que la realidad se impone a su mente. Cuando relaciona y organiza sus conocimientos, recuerdos y pensamientos, el alumno siente que esa organización se acerca más a la realidad; siendo la mente flexible en función de restricciones y demandas diversas, al reflexionar sobre sí mismo y auto controlarse el alumno siente que su mente es más segura y eficaz.
Respecto a las variables de la metacognición se concluyó que:
Los conocimientos previos que los alumnos tienen del software educativo, les facilitan a ellos pensar, recordar o atender sobre el tema. Cuando los alumnos tienen dificultades para atender, recordar o pensar, dedican a estas actividades un esfuerzo mayor. Cuando el alumno tiene que atender, recordar o pensar con eficacia, él lo hace de forma diferente en cada situación y piensa que el lograrlo solo depende de él y al llevar a cabo cualquier actividad mental, los alumnos consideran que su eficacia depende de la atención que le presten, más que del esfuerzo que realicen.

Bibliografía

Galvis, A. (1992). *Ingeniería del software educativo*. Colombia : Uniandes.
González, F. (1995). *El corazón de la matemática*. Maracay, Venezuela.
Landaeta, S. (1998). Los procesos metacognitivos activados mediante instrumentos procesadores de información. Venezuela : UCAB.
Lester, F. (1994). Musings about mathematical problem-solving research: 1970-1994. *Journal for research in mathematics education*. Vol.25, Nº 6.
Lindsay, P. y Norman, D. (1972). *Human information processing*. New York : Academic Press.
Mayor, J., Suengas, A. y González, J. (1995). *Estrategias Metacognitivas*. España: Síntesis

Puente, A. (1989). Solución de problemas: procesos, estrategias e implicaciones. En Puente. Poggiolli, Navarro. *Sicología cognoscitiva: Desarrollo y perspectivas.* Venezuela Mc.Graw-Hill.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically : problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. En D.A Grows (De). *Handbook of research on mathematics teaching and learning.* (Pp. 334 - 370). New York: Macmillan.

Serres, Y. (1996). *Cognición y metacognición en el proceso de solución de problemas matemáticos*. UCV. Caracas: sin publicar.

Zaragoza, A. (2001). Reconceptualización del proceso de Enseñanza Aprendizaje de la matemática en la primera y segunda etapa de la Educación Básica. Un enfoque metacognitivo. Maturín: UNIEDPRA

Zaragoza, A. (2001). Reconceptualización del proceso de Enseñanza Aprendizaje de la matemática en la primera y segunda etapa de la Educación Básica. Un enfoque metacognitivo. Maturín: UNIEDPRA

ANÁLISIS ESTADÍSTICO DE UN TEST DE CONOCIMIENTOS PREVIOS DE MATEMÁTICAS PARA INGRESANTES UNIVERSITARIOS

Nélida H. Pérez, María A. Mini y Julio Benegas
Universidad Nacional de San Luis, Argentina
nperez@unsl.edu.ar - jbenegas@unsl.edu.ar

Resumen

En este trabajo presentamos un análisis estadístico del Test de Conocimientos Previos de Matemáticas (TCPM) diseñado para medir el estado inicial de destrezas y conocimientos básicos en matemáticas de los alumnos ingresantes a carreras científico- tecnológicas de la Facultad de Ciencias Físico, Matemáticas y Naturales de la Universidad Nacional de San Luis.

El objetivo de la investigación está centrado en observar el diagnóstico utilizado, con miras a una eventual utilización posterior.

Para determinar la bondad de la prueba realizamos un análisis de la calidad, discriminación e índice de dificultad de los ítems, así como de la validez y confiabilidad del diagnóstico, para este análisis estadístico empleamos los programas TestGraf y SPSS.

El test se aplicó a 698 estudiantes ingresantes a la Universidad en el ciclo lectivo 2002. De la investigación pudimos inferir que el diagnóstico resultó: *difícil* para la población de aplicación; de *confiabilidad aceptable*, y de *buena calidad de items*, con variada dificultad y aceptable discriminación.

Introducción

La Universidad Nacional de San Luis (UNSL) no escapa del preocupante problema de la preparación inicial de los estudiantes que pretenden ingresar a las distintas carreras de ciencias e ingeniería. Diversas acciones se han programado desde hace tiempo para tratar de mejorar el desempeño estudiantil y bajar el porcentaje de fracaso y deserción en el primer año de vida universitaria.

Una de esas acciones consiste en determinar el nivel de conocimientos y las habilidades con que los estudiantes arriban a la Universidad, con el objetivo de poder identificar, tan pronto como sea posible, las falencias de conocimientos, y su importancia relativa, en la población en riesgo. A tal efecto se elaboró un diagnóstico de respuestas múltiples para medir los conocimientos matemáticos básicos de los alumnos ingresantes. Luego de aplicada la prueba creímos imprescindible realizar un pormenorizado análisis de resultados, de manera de poder capitalizar la experiencia, tanto en esta como en otras instituciones. A tal efecto nos propusimos dos objetivos:

1º. Determinar la calidad general del diagnóstico utilizado, realizando un análisis estadístico pormenorizado de su aplicación.

2º. Evaluar el nivel de conocimientos matemáticos básicos de los ingresantes y relacionarlo con el sistema educativo regional. Considerando que el 90% de población encuestada es de la provincia de San Luis, y constituye la primera promoción que ha tenido una implementación completa de la nueva ley de educación general básica.

Este segundo objetivo es objeto de un estudio complementario y separado del presente trabajo.

Construcción del diagnóstico

El Test de Conocimientos Previos de Matemática (TCPM) se diseñó para medir el estado inicial de conocimientos básicos y aptitudes en matemáticas de los alumnos ingresantes a las carreras científico-tecnológicas de nuestra universidad. Los temas incluidos corresponden a una selección tomada del currículum del Tercer nivel de la Educación General Básica (EGB3) y del nivel Polimodal de la escuela pública Argentina.

El TCPM contiene 20 ítems, con cuatro opciones de respuesta posible cada uno. Las preguntas y sus distractores fueron propuestos por un equipo de docentes con experiencia en la enseñanza de la matemática en el ámbito universitario y en diversos programas de interacción con los profesores de EGB3 y Polimodal. (En ANEXO, prueba completa con items agrupados por tema).

Análisis estadístico del diagnóstico

La Figura 1 representa los resultados obtenidos de la aplicación del test a una muestra de 698 estudiantes (aproximadamente el 80% de la población total). Los encuestados son alumnos ingresantes (sin instrucción universitaria previa al diagnóstico) a las carreras de: Licenciatura y Prof. en Ciencias de la Computación, Ingeniería Electrónica, Licenciatura y Prof. en Matemáticas y Licenciatura y Prof. en Física.

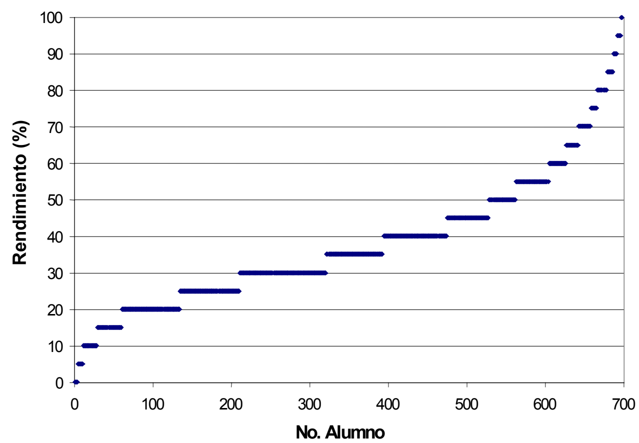


Figura 1: *Rendimiento (en %) en el TCPM de los ingresantes 2002*

Se observa que el rendimiento general es bajo con un valor porcentual de la media para toda la muestra de 38 %, con una desviación estándar de 45%. Desde el punto de vista del diseño de pruebas objetivas, este valor medio es demasiado bajo, mientras que la amplia desviación estándar es adecuada para discriminar entre poblaciones de distinto rendimiento.

De la Figura 1 se desprende que alrededor de 220 alumnos apenas alcanzan el valor estadístico de contestar al azar (25%), mientras un total de 560 alumnos (80 % del total) tienen sólo la mitad o menos de las preguntas contestadas correctamente. Dada la escasa complejidad de los ítems de este diagnóstico, la primera conclusión es que esta población estudiantil carece del conocimiento y de las habilidades matemáticas mínimas para afrontar un curso universitario inicial de cálculo o álgebra.

a) Características generales de los ítems

Los parámetros estadísticos que caracterizan el diagnóstico están sintetizadas en la Tabla y han sido obtenidos a través de la aplicación de los programas estadísticos TestGraf [5] y SPSS[7]. Los valores de *Coeficiente Biserial*, *Discriminación* y *Dificultad* se refieren a parámetros calculados por el programa TestGraf [5] de análisis gráfico de diagnósticos de respuestas múltiples.

La mayoría de los ítems resultaron difíciles. Solo en 5 ítems la población encuestada supera el 50% de rendimiento, mientras que en ocho ítems se obtuvo rendimiento comparable con la respuesta azarosa (cuatro opciones por pregunta). En todos los casos la desviación estándar, σ, es próxima a la mitad del rango total, lo cual indica una buena dispersión de los valores obtenidos.

Tema	Ítem	**Media**	**Desvío Estándar**	**Coef. Biserial**	**Discrimi-nación**	**Dificultad**
ARITMÉTICA: Números Operaciones Proporciones	**1**	**0.72**	**0.45**	**0.36**	**0.87**	**-0.18**
	2	0.61	0.49	0.43	0.73	-0.04
	3	0.49	0.50	0.42	0.62	0.21
	4	0.40	0.49	0.46	0.79	0.57
	5	0.26	0.44	0.31	0.5	1.68
	18	0.69	0.46	0.26	0.45	-0.44
EXPRESIONES ALGEBRAICAS	**6**	0.17	0.38	0.51	1.24	1.35
	7	0.19	0.39	0.57	1.07	1.25
	8	0.46	0.50	0.36	0.68	0.66
	9	0.13	0.34	0.23	2.04	2.16
GEOMETRÍA	**10**	0.35	0.48	0.45	0.75	0.83
	11	0.29	0.45	0.27	0.47	1.83
	17	0.33	0.47	0.51	0.87	0.77
ECUACIONES de PRIMER GRADO	**12**	0.66	0.47	0.37	0.84	-0.19
	14	0.55	0.50	0.33	0.55	0.24
OPERACIONES CON POLINOMIOS y RAÍCES de ECUACIONES	**13**	0.24	0.43	0.38	0.65	1.35
	15	0.27	0.45	0.24	0.55	1.65
	16	0.28	0.45	0.47	0.84	0.93
TRIGONOMETRIA	**19**	0.27	0.44	0.52	0.88	0.93
	20	0.22	0.41	0.38	0.61	1.54

Tabla: Resultados estadísticos de los 20 ítems del TCPM (ver texto).

El coeficiente de *punto biserial* representa la correlación, sobre toda la muestra, entre el ítem y el resultado global del test. Valores del coeficiente punto biserial de 0,20 o mayores se consideran aceptables. En nuestro caso tienen un coeficiente biserial menor de 0,30 solo ítems que son muy fáciles o muy difíciles, es decir aquellos que se espera no tengan una buena correlación con el resultado global del test.

La *discriminación* se refiere a cuan efectivamente un ítem distingue entre sujetos de bajo y alto rendimiento. El parámetro discriminación, está determinado por la pendiente de la curva de la opción correcta en la zona de probabilidad media.

El valor del índice *dificultad* está relacionado con el rendimiento global de los alumnos que alcanzan el valor medio en ese ítem. Se mide en unidades de la desviación estándar, a partir del rendimiento medio de la población. El desempeño o rendimiento así determinado constituye el eje horizontal de las figuras 2 y 3.

En la Tabla podemos observar que sólo 4 ítems tienen dificultad negativa (es decir son fáciles para esta población), mientras que en todos los restantes es positiva.

Para ejemplificar lo anterior y mostrar los atributos del software usado para un eventual uso en docencia o similar al presente, presentamos un análisis más detallado de los ítems 2 y 9.

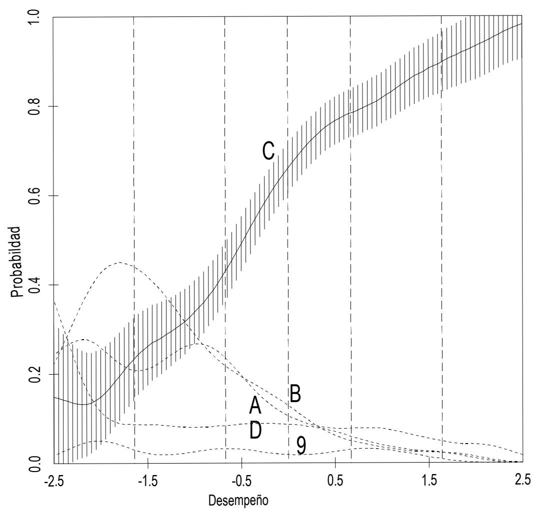


Figura 2: *Curvas de probabilidad de elección de cada una de las opciones de la Pregunta No.2. La opción correcta (C) se muestra con la banda de confianza.*

En la Figura 2 están representadas las curvas de probabilidad de elegir cada opción del ítem 2 en función del rendimiento o desempeño global del estudiante. El eje horizontal mide el desempeño en unidades de la desviación estándar, con el cero u origen en el valor medio de la población (es decir 38% de repuestas contestadas correctamente). A las izquierda de las líneas verticales de trazos se encuentran los estudiantes con rendimiento por debajo del 5%, 25%, 50%, 75% y 95 %, respectivamente

Se observa que la curva de la respuesta correcta (opción C) tiene valores de probabilidad importantes, aún para poblaciones de modesto desempeño global. Es por tanto una pregunta fácil, tal cual lo denotan los respectivos índices en la Tabla.

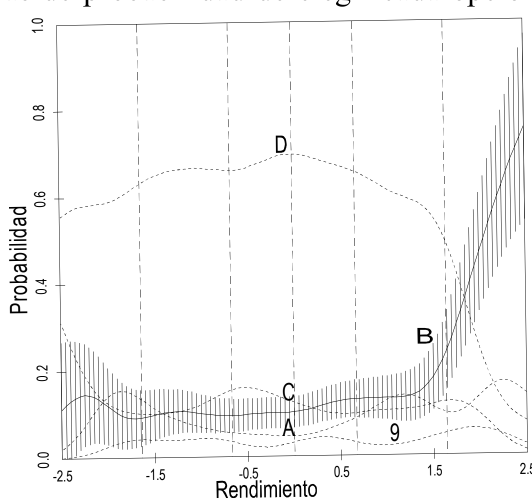


Figura 3: *Curvas de probabilidad de la pregunta No.9*

Además la curva de la Opción C es monótona creciente, con buena pendiente en casi todo el rango y por lo tanto separa (discrimina) adecuadamente las poblaciones de distinto rendimiento. De igual modo el análisis de las curvas de los distractores (opciones incorrectas) nos indica que estas opciones son atrayentes solo para los

alumnos de rendimiento inferior al 25%, mientras que la curva señalada con "9", que identifica a los alumnos que no responden la pregunta, tiene probabilidad prácticamente nula a lo largo de todo el eje de rendimiento.
En la Figura 3 se representan las curvas de rendimiento del ítem 9.
Este es el ítem de mayor dificultad del test, medido tanto en función del desempeño promedio (sólo el 13 % lo contestó bien), como por el índice de dificultad. Se ve que sólo los alumnos con rendimiento en el 5% superior de la población responden el ítem correctamente con alguna probabilidad significativa. El ítem discrimina bien, pero sólo en esa zona de alto rendimiento, mientras que para el resto de la población no discrimina.
Un análisis por opción en este ítem revela que la opción D es la preferida por los estudiantes en casi todo el rango de rendimiento. Si bien a efectos del diagnóstico la pregunta no parece de calidad suficiente, puesto que solo discrimina en el 5% superior de la población, desde el punto de vista de la instrucción es importante, ya que la elección de un distractor particular revela conductas de trabajo o errores sistemáticos de la población.
Es importante destacar que al repetir este análisis en el resto de los ítems, la opción "no contesta", identificada con el número "9" en las gráficas, ocurre solamente en los alumnos con rendimiento total inferior al 25%, lo que nos indica que las preguntas sin respuesta son producto de la ausencia de conocimiento en el tema involucrado y no de cansancio u otras causas. Por otro lado algunos distractores no son significativamente elegidos por los estudiantes (de cualquier nivel de rendimiento). Estos distractores deberían ser mejorados para aumentar la calidad global del diagnóstico.

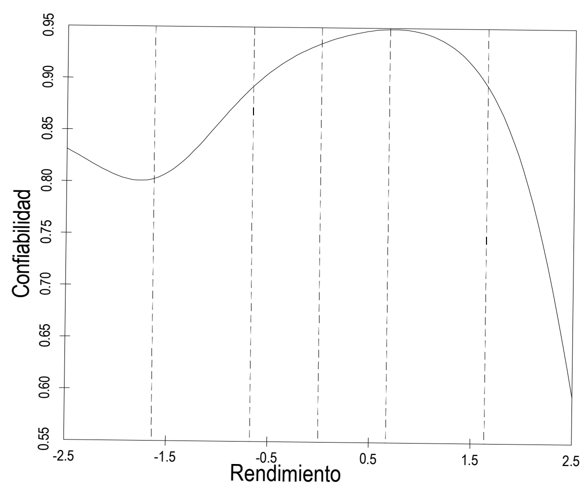


Figura 4: *Confiabilidad del TCPM para la población estudiada, según TestGraf (ver texto)*

A partir de un análisis similar realizado sobre todos los ítems, se encuentra que el diagnóstico en general tiene una adecuada variabilidad de dificultad de los ítems, valores aceptables de discriminación y buenos coeficientes punto biserial, lo cual permite afirmar que calidad global de los ítems del TCPM es aceptable.

b) Validez y confiabilidad del diagnóstico

Validez y confiabilidad son dos características que definen la calidad de un diagnóstico. En general la validez se establece a través del uso y la opinión de docentes y alumnos.
Las preguntas y sus distintas opciones de respuesta fueron propuestas por docentes dedicados a la enseñanza en cursos de introducción a la matemática universitaria y a

la formación y perfeccionamiento de docentes secundarios. Se tuvieron en cuenta pruebas anteriores y la experiencia del cuerpo de docentes. Posteriormente un grupo de docentes, distinto al que propuso las preguntas, también experimentado en la enseñanza de la matemática universitaria básica, analizó la pertinencia de las preguntas y sus respectivas opciones de respuesta. Este proceso de selección y corrección condujo a la versión del TCPM que se informa en este trabajo.
La confiabilidad de un diagnóstico es una medida de cuan consistentemente el test reproducirá el mismo resultado bajo las mismas condiciones. Las técnicas para establecer la confiabilidad son de tipo estadístico. Las más utilizadas en educación son la determinación del coeficiente α de Crombach [4] y del coeficiente denominado KR-20, que corresponde a la fórmula 20 de un trabajo de Kuder y Richarson [6]. El coeficiente de confiabilidad varía entre 0 y 1. En pruebas estandarizadas se considera aceptable un valor cercano a 0.8, mientras que en pruebas construidas por los docentes se considera aceptable un valor mínimo de 0.60.
El análisis de confiabilidad del Test de Conocimientos Previos en Matemática se realizó mediante el programa estadístico SPSS [7], que determinó un coeficiente de confiabilidad α=**0,73**. También se realizó un análisis por mitades del diagnóstico (split-half), donde aplicando la corrección de Spearman-Brown [3], se obtiene una confiabilidad de **0,74.** Estos resultados aseguran una aceptable confiabilidad del diagnóstico.
TestGraf [2]tiene un método quizás más completo para calcular la confiabilidad, ya que lo hace de manera dinámica, en función del rendimiento estudiantil.
En la Figura 4 se observa que la confiabilidad es máxima para estudiantes de rendimiento alrededor de 75% (4,5 puntos de un total de 10, para el presente ejemplo) y se mantiene buena para rendimientos entre 25% y 80%, aproximadamente, indicando su adaptabilidad para estudios como el presente.

Conclusiones

Nuestra metodología de análisis, apoyada con la utilización conjunta de los paquetes estadísticos SPPS y TestGraf, nos permitieron alcanzar las siguientes conclusiones sobre el TCPM. (Test de Conocimientos Previos en Matemática, aplicado a una muestra de 698 estudiantes ingresantes a carreras científicas y de ingeniería de la Universidad Nacional de San Luis).

a) El diagnóstico resultó difícil para la población que fue aplicado, que alcanzó una media de 38% de rendimiento, con un error estándar de 45% .
b) La confiabilidad de diagnóstico, medido según el coeficiente α de Crombach es buena, indicando una aceptable consistencia interna del instrumento. Las curvas dinámicas determinadas por TestGraf indican un máximo de la confiabilidad en la zona media de rendimiento.
c) Los ítems del diagnóstico son en general de buena calidad, con valores del coeficiente punto biserial aceptables y una buena discriminación.
d) Del análisis dinámico de las curvas de probabilidad de las opciones de cada ítem, en función del rendimiento colectivo, surge que algunos distractores pueden ser mejorados, ya que no son elegidos significativamente por los alumnos.

e) Los resultados generales del diagnóstico indican que puede usarse apropiadamente para determinar el estado inicial de conocimientos básicos de matemáticas a los efectos de programar la instrucción.

Bibliografia

Otero M.R, Fanaro M. A. Y Elichiribehety I., "El conocimiento matemático de los estudiantes que ingresan a la universidad" Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 4(3), p. 267-287, 2001.

Landazábal Ma.C., Bilbao F., Otero J. y Caballero C., "Formación inicial y rendimiento en Física del primer curso universitario". Revista de Educación (Madrid), en prensa, 2003.

Aubrecht G and Aubrecht J. "Constructing objective test" Am. J. of Phys. 51, 613-620, 1983.

Baranger, D. "Construcción y Análisis de Datos", Ed. Universitaria, UNM, 1992.

TestGraf, J.O. Ramsay, McGill University, Canada, 1995. Disponible en ftp://ego.psych.mcgill.ca/pub/ramsay/testgraf/.

Loewenthal K. M. "An Introduction to Psychological Test and Scales", 2nd edition, Physicological Press, Taylor & Francis, 2001.

SPSS, "Statistical Package for the Social", SPSS Inc. Chicago, Il. USA, 1999.

CONCEPCIONES ALTERNATIVAS QUE, REFERENTES AL COMPORTAMIENTO VARIACIONAL DE FUNCIONES, MANIFIESTAN PROFESORES Y ESTUDIANTES DE BACHILLERATO

Crisólogo Dolores Flores, Luis Arturo Guerrero Azpeitia
CIMATE de la UAG, CECyTEH, México
cdolores@uagro.mx, lguerrero271@hotmail.com

Resumen
En este artículo se reportan los resultados de una investigación que explora las concepciones alternativas de profesores y estudiantes de bachillerato acerca del comportamiento variacional de funciones. Para tal exploración se diseñó un cuestionario en el que se usan los sistemas de representación verbal, gráfico y analítico. En especial se exploraron concepciones relativas al comportamiento variacional de funciones [v. gr: Para qué x, $f'(x)>0$], comportamiento variacional y signo simultáneamente [v. gr: Para qué x se cumple que: $f'(x)>0$ y $f(x)<0$] y las relativas a los procesos de reversibilidad: [v. gr: Dada $f'(x)$ esbozar $f(x)$ y viceversa]. Los resultados indican que una cantidad significativa de encuestados, *creen* que $f(x)<0$ si su gráfica está en el semieje negativo de las x; consideran a $f'(x)$ como asociada a un punto y no al comportamiento de $f(x)$; la mayoría se muestra imposibilitado para transferir información variacional de la gráfica de $f'(x)$ a $f(x)$.

Elementos básicos de la investigación

Problema y objetivo. Varios trabajos de investigación (Dolores, 1996; Dolores, 1998; Dolores/Guerrero/Medina/Martínez, 2001; Dolores/Guerrero, 2002; Cáceres,1997) muestran que en situación escolar, el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional (PLV) en estudiantes universitarios y preuniversitarios es muy deficiente. En el marco de este problema global, adoptamos un problema específico: cómo se manifiestan en los profesores y estudiantes de bachillerato de un mismo subsistema educativo esas deficiencias, en especial cuando analizan el comportamiento de funciones. El análisis de funciones es muy importante en la escuela media y superior pues en él se sintetiza el objetivo primordial de la matemática de las variables. Por ello en esta investigación nos planteamos como objetivo, detectar y caracterizar las concepciones alternativas de profesores y estudiantes de bachillerato sobre los aspectos básicos del análisis de funciones.

Elementos teóricos. El PLV es parte del pensamiento matemático avanzado y comprende las relaciones entre la matemática del cambio por una lado y los procesos del pensamiento por otro; implica la integración de los dominios numéricos, desde los naturales hasta los complejos, conceptos de variable, función, derivada e integral, así mismo sus representaciones simbólicas, sus propiedades y el dominio de la modelación elemental de los fenómenos del cambio (Cantoral, 1997). Por otro lado, las representaciones semióticas juegan el papel de mediatizadores del conocimiento en la actividad matemática, a través de ellos, las representaciones mentales se exteriorizan para fines de comunicación y son al mismo tiempo esenciales para la actividad cognitiva del pensamiento, ya que aquellas dependen de la interiorización de las representaciones semióticas (Duval, 1998). Los rasgos característicos del comportamiento de las funciones de nuestro interés son: crecimiento, decrecimiento, puntos estacionarios; región donde la función es: positiva, negativa o nula; estos rasgos pueden ser expresados (o mediatizados) en forma verbal, numérica, gráfica, analítica, etc. y se constituyen en los medios que adoptamos para explorar concepciones de los profesores y estudiantes. En los medios escolares se cree que las gráficas son de gran ayuda para visualizar el comportamiento de funciones. Sin embargo, con frecuencia esas *visualizaciones* y los significados que los estudiantes atribuyen a las gráficas no son congruentes con los significados aceptados en textos o los que comparten los expertos. Esta incongruencia causa conflictos en la comprensión y aceptación de los significados, por ello ha recibido varias denominaciones: errores, errores sistemáticos, preconcepciones y concepciones alternativas. El término *error* enfatiza la incongruencia entre el conocimiento de los alumnos y el conocimiento científico aceptado, las *preconcepciones* se caracterizan por aquel tipo de conocimiento precientífico formado por las experiencias cotidianas y que está fuertemente arraigado en la mente, las *concepciones* pueden o no ser acordes con los significados aceptados por textos y expertos, por nuestra parte en este trabajo adoptamos el término *concepciones alternativas* en el sentido de Confrey (1990), Mevarech y Kramarsky (1997), porque enfatiza lo que las personas *piensan* o *saben* por sobre lo que no conocen.

Metodología. De acuerdo con los resultados obtenidos en la primera parte de esta investigación, (Dolores/Guerrero 2002) y que consistió en la aplicación de un cuestionario a 16 profesores integrado por 9 preguntas, se procedió al diseño de un segundo cuestionario para ser aplicado a los estudiantes del mismo subsistema educativo en el que imparten clase los profesores, esto con la finalidad de tener mayores elementos para describir la situación que prevalece al respecto. Dicho cuestionario se estructuró para que permitiera extraer información sobre las concepciones de los estudiantes al analizar el comportamiento de funciones por medio de los sistemas de representación gráfico, analítico y verbal. Se plantearon ocho situaciones diseñadas sobre la base de tres criterios: dadas las condiciones analíticas de $f'(x)$ construir o seleccionar $f(x)$, dadas las condiciones (en forma verbal) de $f'(x)$ seleccionar $f(x)$, y, dada la gráfica de $f'(x)$ construir $f(x)$.

CUADRO 1. CARACTERISTICAS DE LAS PREGUNTAS DEL CUESTIONARIO

PREGUNTAS	TRANSICIÓN	DADA LA CONDICIÓN VARIACIONAL EN FORMA:
1, 2, 3	Analítico-Gráfico	Analítica de $f'(x)$, seleccionar la gráfica de $f(x)$
4, 5	Verbal-gráfico	Verbal de $f'(x)$, seleccionar la gráfica de $f(x)$
7	Analítico-Gráfico	Analítica de $f'(x)$, construir gráfica de $f(x)$
6, 8	Gráfico-gráfico	Gráfica de $f'(x)$, construir la gráfica de $f(x)$

El cuestionario se aplicó a 100 estudiantes de 7 planteles de una institución de educación media superior del estado del centro del país que ya habían acreditado sus cursos de cálculo. A continuación se presenta el análisis de las respuestas, siendo importante aclarar que se retoman las concepciones alternativas manifestadas por los profesores, presentando simultáneamente los resultados cuando fue pertinente ante cuestionamientos iguales o similares; las gráficas correspondientes a cada una de las preguntas (cuando fueron proporcionadas) aparecen en el Cuadro 2.

Análisis de las respuestas dadas al cuestionario

Pregunta 1. **En qué gráfica se cumple que $f'(x) < 0$ para toda x?** El 52% de los estudiantes encuestados, asociaron como función decreciente a la gráfica 1B, misma que además es negativa, por otra parte, el 26% eligió la opción 1C (también negativa), en tanto que las gráficas 1ª, 1D y 1E, fueron consideradas en un 15, 14 y 14% respectivamente. Siendo preciso resaltar que los profesores, ante una pregunta similar, asociaron correctamente a la gráfica en cuestión en un 40% y sólo el 20% asoció con función decreciente a aquellas gráficas en las que $f(x) < 0$.

Pregunta 2. **En qué gráfica se cumple que $f'(x) > 0$ y $f(x) < 0$.** Los estudiantes consideraron en un 30%, que la gráfica mostrada en 2E satisface las condiciones solicitadas, sin embargo en esta gráfica se observa que $f'(x) > 0$ pero las abscisas son negativas, por otra parte, en un 28% de los casos eligieron a las opciones 2ª y 2D**,** en las cuales se tiene que en ambas $f(x) > 0$, la opción 2B fue seleccionada en un 25% por un 23% de la opción 2C; en estos dos últimos casos se tiene que $f(x) < 0$.

Pregunta 3. **En qué gráfica se cumple que $f'(x) <0$ y $f(x) > 0$.** Para las gráficas que satisfagan las condiciones de función decreciente pero de signo positivo, los alumnos asociaron a la gráfica 4B en el 34% de los casos, en esta gráfica se observa que $f(x) < 0$ y con abscisas negativas; en tanto que, el 33% eligió a la gráfica mostrada en 3C en la que $f(x) < 0$ y con abscisas positivas, por otra parte y en porcentajes menores, los estudiantes asociaron en un 28% y 23% respectivamente a 3D y 3ª ambas gráficas de funciones positivas, finalmente al inciso 3B, lo seleccionaron en un 10%.

Pregunta 4. **Escriba sobre la raya correspondiente: función creciente y positiva, o bien, función decreciente y negativa, según el comportamiento de sus gráficas.** Los profesores asociaron simultáneamente en un 66.7% a las gráficas 4ª y 4C con las condiciones *creciente y positiva*, en tanto que los estudiantes hicieron lo propio en un 48%. Por otra parte en el caso de las gráficas 4D y 4E, el 53% de los profesores considera que la gráfica mostrada es decreciente y negativa mientras que para los estudiantes la gráfica 4D cumple dichas condiciones en un 52% y para 4E, el 39% de los estudiantes considera que la gráfica es creciente y positiva. Finalmente para la gráfica 4B, los profesores y estudiantes consideraron que esta es decreciente y negativa en un 93% y 72% respectivamente, en tanto que para 4F, hicieron lo propio en un 80% y 51% correspondientemente.

Pregunta 5. **Escriba sobre la raya correspondiente: función creciente y negativa, o bien, función decreciente y positiva, según el comportamiento de sus gráficas.** La gráfica mostrada en 5D, es creciente y negativa para el 53% de los profesores y el 45% de los estudiantes, mientras que la gráfica 5E es decreciente y positiva para el 53% de profesores y 23% de los alumnos (afirmaciones correctas). Para el caso de la gráfica 5ª, el 60% y 39% de los profesores y alumnos respectivamente considera que es creciente y negativa, en tanto que para 5B asocian la misma característica el 13% y 40% de los encuestados; por otra parte, en relación a la gráfica 5F los porcentajes de asociación entre esta gráfica y la condición decreciente y positiva fueron del 20% para profesores y 41% para estudiantes. Del análisis de las asociaciones hechas en las preguntas 3 y 4, se observó que existe cierto sector de encuestados que consideran que una función es creciente si es positiva, aumentando el porcentaje de asociación en aquellas gráficas en las que $x>0$; en tanto que una función es decreciente si ésta es negativa privilegiando el caso en el que $x<0$.

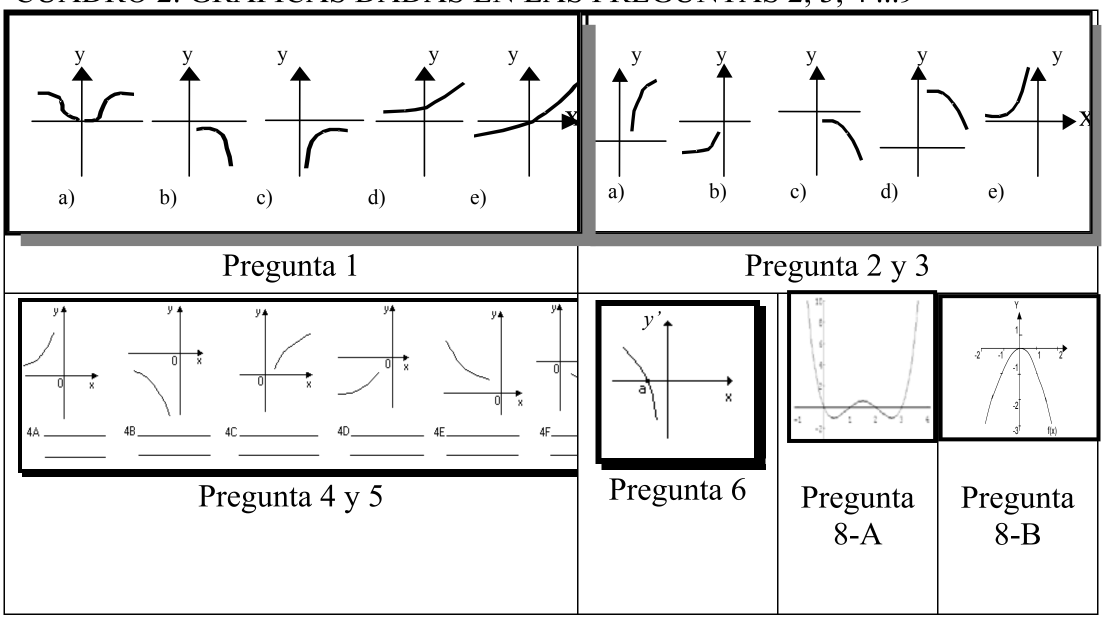
Pregunta 6. **Se muestra una porción de la gráfica de la función $f'(x)$ en torno de $x = a$, esboce la gráfica de $f(x)$ en torno a ese punto.** El 75% de los profesores realizaron producciones, mientras que los estudiantes lo hicieron en un 45% de los casos. De las producciones hechas por los profesores, tenemos que en el 83.4% de los casos, se consideró al punto $(a, 0)$ como un cero de $f(x)$, esta cifra contrasta con el 9% de los estudiantes que realizaron gráficas con iguales condiciones. En relación a la producción de los estudiantes que mayor frecuencia presentó, fue una reflexión respecto al eje de las ordenadas ($f(-x)$) con el 32% de la población. Solo uno de los profesores fue capaz de esbozar una gráfica que cumple con las condiciones solicitadas.

Pregunta 7 A. Si $f(x)$ tiene un solo punto estacionario en $x = -2$, $f'(x)> 0$ para $x<-2$ y $f'(x)>0$ para $x > -2$. Esboce una gráfica para $f(x)$ que satisfaga estas condiciones y de la fórmula de la función (pregunta para profesores). El 66.7% de los profesores que realizaron al menos un esbozo para las condiciones solicitadas, asoció al punto estacionario de la función con el cero de la misma. Con estos datos es posible considerar que existe confusión entre $f(x)$ y $f'(x)$, al menos en $x=a$. El 45.5%, esboza gráficas que cumplen con las condiciones de $f(x)>0$ para $x<-2$ y para $x>-2$, aunque estas condiciones debieron cumplirse pero para $f'(x)$. Un 27.3% bosquejó una gráfica que cumple las condiciones solicitadas para $f'(x)$, solamente un profesor no asoció al punto estacionario con el cero de la función. Solamente uno de los encuestados construyó una gráfica que cumple con todas las condiciones solicitadas. Existe proclividad a confundir a $f(x)$ con $f'(x)$ al menos en un 60% de los casos.
Pregunta 7 B. Trace la gráfica de $f(x)$, si se sabe que: tiene puntos estacionarios en $x=1$ y $x=3$; $f'(x) >0$ para $x<1$, $f'(x)<0$ en el intervalo $1< x <3$ y $f'(x) >0$ para $x >3$ (pregunta para alumnos). Para esta pregunta, el 47% de la población realizó alguna producción siendo 25 esbozos diferentes, sin embargo en 72% de ellos es manifiesto que los estudiantes confunden al menos un punto estacionario con la intersección de la gráfica con el eje de las abscisas, esbozando incluso una gráfica que cumple con las condiciones pero para $f(x)$ y no para $f'(x)$, es posible que para ellos sea cierto que $f(x_o)=f'(x_o)$.

Pregunta 8 A. **La gráfica siguiente corresponde a cierta $f'(x)$, esboce al menos una que corresponde a $f(x)$ (pregunta para profesores).** El 56.3% de los profesores realizó alguna producción, de las cuales, el 44.4% de los casos consistió en un esbozó de una gráfica creciente, mientras que el 22% pretendió realizar un análisis de $f'(x)$ a través de rectas tangentes en algunos puntos.

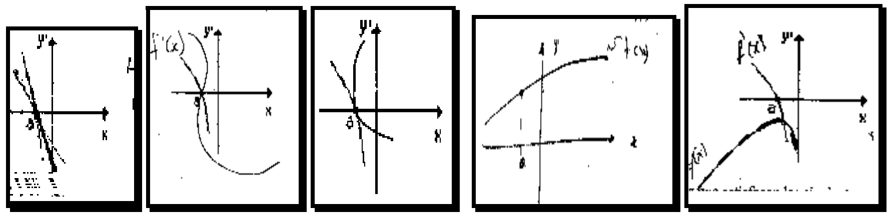
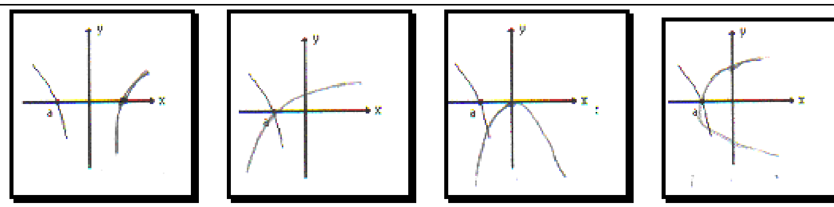
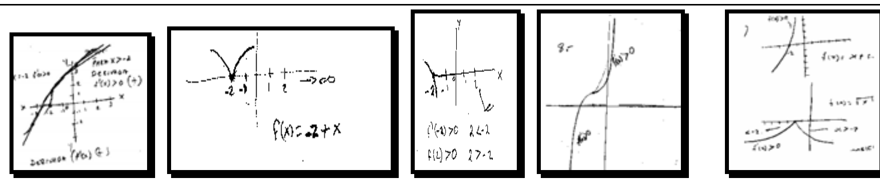
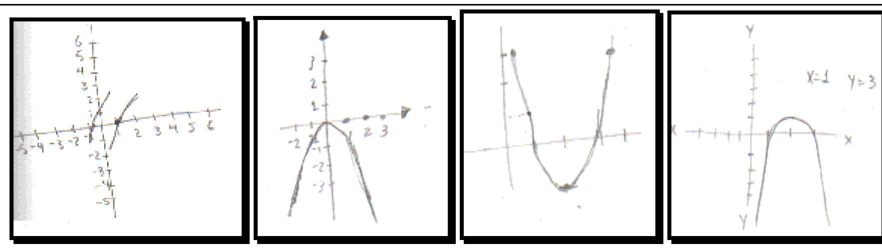
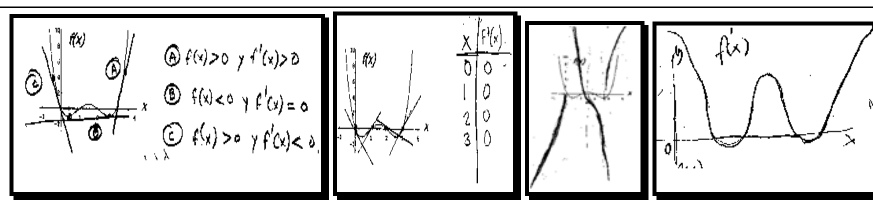
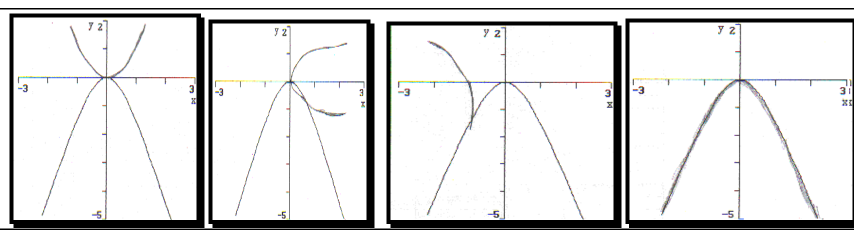
Pregunta 8 B. **Para la gráfica siguiente esboce la gráfica respectiva de $f'(x)$ (pregunta para alumnos).** El 48% de los alumnos esbozó alguna gráfica y fueron en total 12 gráficas diferentes, la más representativa fue, con el 25% de los casos una gráfica que en forma de parábola que la reflexión de la curva dada respecto al eje de las abscisas. Otras producciones aunque menos relevantes consisten en una parábola con el eje focal coincidente con el eje de las abscisas con el 5% de los casos y una gráfica idéntica a la mostrada en el cuestionario con el 4% de los esbozos. Ninguno de los alumnos dibujó una gráfica que satisfaga las condiciones solicitadas.

CUADRO 2. GRÁFICAS DADAS EN LAS PREGUNTAS 2, 3, 4 ...9



Concepciones alternativas encontradas

Cierto sector de los profesores y estudiantes cuestionados asocian consistentemente las condiciones de crecimiento y función positiva (expresadas en forma verbal-escrita) con las gráficas correspondientes (66.7% y 48% respectivamente), mientras que al pedirles que asocien las condiciones creciente y negativa (bajo las mismas condiciones) por un lado, y decreciente y negativa por otro, los porcentajes disminuyen sensiblemente (53% y 45%); sin embargo al realizar una revisión del resto de las respuestas hechas por los encuestados, se observan ciertas tendencias como la de confundir el crecimiento de una función ($f'(x)>0$) con su ubicación en el semieje positivo de las abscisas, en tanto que el decrecimiento de la función ($f'(x)<0$) es asociada con las gráficas cuya ubicación es el semieje negativo de las abscisas, por una parte y por otra y con mayor porcentaje (poco mas del 50%) se observa la proclividad a relacionar la expresión $f'(x)>0$ con una gráfica cuyas ordenadas sean positivas, mientras que, aquella función que posea ordenadas negativas, es asociada con la expresión $f'(x)<0$. En términos generales notamos la tendencia de sólo atender una condición cuando se planteaban dos simultáneamente. Es probable que esté fuertemente arraigada la idea de asociar crecimiento con *positividad* y de crecimiento con *negatividad* de la función.

CUADRO 3. ALGUNAS PRODUCCIONES DE LOS ENCUESTADOS	
Pregunta 6-A producciones profesores	
Pregunta 6-B producciones alumnos	
Pregunta 7-A producciones profesores	
Pregunta 7-B producciones alumnos	
Pregunta 8-A producciones profesores	
Pregunta 8-B producciones alumnos	

Se detectó gran proclividad tanto en los profesores como en los estudiantes a considerar que, gráficamente se cumple que $f(x_0)$ es equivalente con $f'(x_0)$, en virtud de que alrededor del 80% de los profesores y el 70% de los estudiantes, construyeron gráficas en las que hacen manifiesto que $f(x_o) = 0$ y $f''(x_o) = 0$ son la misma expresión, esto al menos en el tratamiento gráfico.

En referencia al proceso de reversibilidad, el paso de la gráfica de $f''(x)$ a $f(x)$, es escaso en profesores y prácticamente nulo para los estudiantes, esbozando gráficas en las que buscan satisfacer las propias condiciones de $f''(x)$ y no las correspondientes a $f(x)$, solo trabajan en un mismo plano de coordenadas pues se muestran imposibilitados para transferir información variacional del plano de coordenadas (x, $f''(x)$) al de coordenadas (x, $f(x)$) o viceversa. Generalmente el proceso de graficación de $f''(x)$ dada $f(x)$, es relativamente transitable (empíricamente) para los profesores, pero no así para los estudiantes quines se vieron imposibilitados de construir una gráfica que cumpliera con las condiciones solicitadas; además, en nuestra indagación, observamos que a los profesores al plantearles construir $f(x)$ dada $f''(x)$ esbozan rectas tangentes en algunos puntos de la gráfica de $f''(x)$. Solo un profesor construyó una gráfica aceptable.

Bibliografía

Cantoral R (1997). *Pensamiento y lenguaje variacional*. Seminario de Investigación, Área de Educación Superior, Cinvestav/IPN México D.F.

Confrey J. (1990). A review of the research on student conceptions in mathematics, science and programming. *Review of research in Education.* Vol. **16**. Pp. 3-56

Duval R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. *Investigaciones en Matemática Educativa II*. pp. 173-201. Grupo Editorial Iberoamérica.

Dolores C. (1996). *Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada en el bachillerato*. Tesis Doctoral. Biblioteca de la Facultad de Matemáticas de la UAG. Chilpancingo Gro.

Dolores C./Bello G./ Carvajal D. F (2002). *Concepciones alternativas sobre las gráficas cartesianas del movimiento. El caso de la velocidad y la trayectoria.* Articulo en proceso de revisión para la revista RELIME. Inédito.

Cáceres T. (1997). *Pensamiento y lenguaje variacional. Un estudio exploratorio de ideas variacionales entre jóvenes escolarizados de 17 a 24 años.* Tesis de Maestría. Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav del IPN, México D.F.

Dolores C./Guerrero L./Medina M./Martínez M. (2001). *Un estudio acerca de las concepciones de los estudiantes sobre el comportamiento variacional de funciones elementales*. Reporte de Investigación aceptado para su publicación en las Actas de RELME XV. Buenos Aires Arg.

Leinhardt, G. / Zaslavsky, O./ Stein M.K. (1990) Functions, graphs and graphing: Tasks, learning and teaching. *Review of Educational Research* Vol. **60**. Pp. 1-64

Mevarech Z. & Kramarsky B. (1997). From verbal description to graphic representation: stability and change in students' alternative conceptions. *Educational Studies in Mathematics*. Vol. **32** Núm. 3. pp. 229-263

Dolores C./Guerrero L. (2002). *Concepciones alternativas que referentes al comportamiento variacional de funciones, manifiestan profesores de bachillerato*. Reporte de Investigación aceptado para su publicación en actas de RELME XVI. La Habana Cuba.

Wainer H. (1992). Understanding graphs and tables. *Educational Researcher* Vol. **21**, pp.14-23

DIAGNÓSTICO DE EVALUACIÓN DEL APRENDIZAJE EN UN CURSO BÁSICO DE CÁLCULO DE UNA FACULTAD DE CIENCIAS. OPINIONES DE LOS DOCENTES

Patricia Villalonga de García y Leonor Colombo de Cudmani
Universidad Nacional de Tucumán. Argentina.
pvdg@unt.edu.ar

Resumen

El objetivo del presente trabajo fue efectuar un diagnóstico del sistema de evaluación del aprendizaje de Matemática 1 (asignatura de primer año de la Facultad de Bioquímica, Química y Farmacia de la Universidad Nacional de Tucumán. Argentina). Este diagnóstico se apoyó en un **modelo de evaluación alternativa del aprendizaje**, construido en base a criterios innovadores que surgen de corrientes pedagógicas constructivistas (teorías: psicogenética de Piaget, pedagógica de Ausubel y principios del Enfoque Histórico Cultural de Vigotsky, Leontiev, Galperin y otros). Los principios enunciados en este modelo, llevaron a la formulación de la siguiente **hipótesis crítica**: "la evaluación del aprendizaje de la asignatura, se realiza con una concepción reduccionista y desintegrada de los procesos de enseñanza y aprendizaje". Para contrastar esta hipótesis y efectuar un diagnóstico del sistema evaluativo de Matemática 1, se llevaron a cabo en trabajos anteriores, encuestas a alumnos de los años 2001 y 2002, y se realizó un estudio de los ítems de evaluación sumativa (exámenes parciales y finales) de la asignatura, analizados sobre la base de los principios de los estándares de evaluación del National Council of Teachers of Mathematics. En este trabajo, a fin de obtener más información para validar esta hipótesis, se estudió el resultado de una **encuesta dirigida a docentes de la asignatura**. Una triangulación de métodos y datos obtenidos de trabajos anteriores, aportarían elementos a favor de la confirmación de la hipótesis crítica. En consecuencia, se podría concluir que el sistema de evaluación implementado en Matemática 1, no condice con las características y criterios que derivan del modelo de evaluación alternativa construido.

Introducción

Este trabajo es parte de una investigación más abarcadora. Los objetivos de la misma son: a) diseñar criterios que sirvan de guía para orientar los procesos del sistema de evaluación del aprendizaje del cálculo de la asignatura Matemática 1, de primer año, primer cuatrimestre, de la Facultad de Bioquímica, Química y Farmacia de la Universidad Nacional de Tucumán; y b) efectuar el diagnóstico del sistema de evaluación del aprendizaje de la asignatura en base a los criterios identificados. Matemática 1 es una materia de carácter instrumental, tiene un currículo eminentemente técnico que contiene los principios básicos del cálculo diferencial e integral en una variable, sustentadores de otras asignaturas de las especialidades dictadas en la facultad. Se inicia aproximadamente con 960 alumnos y con una relación docente alumno 1/100. Finalizan el cursado de la materia alrededor de 420 estudiantes que son los que se evalúan. En las Memorias de VIII Conferencia Interamericana sobre Educación en la Física efectuada en La Habana-Cuba en julio de este año, se publicó el modelo de evaluación alternativa del aprendizaje construido con una serie de criterios que podrían ser empleados para orientar la evaluación del aprendizaje de la asignatura. Este modelo, fundado en teorías cognitivas de aprendizaje, se tomó como marco teórico de referencia a partir del cual se derivaron los indicadores para el diagnóstico (Colombo de Cudmani, Villalonga de García, y Raya, 2003). Para concretar el diagnóstico del sistema evaluativo se diseñaron dos encuestas efectuadas a alumnos de los años 2001 y 2002, una encuesta a docentes del año 2001 y se analizaron los items de las pruebas de papel y lápiz de evaluación sumativa, teniendo como referencia el marco teórico mencionado (Villalonga de García y Colombo de Cudmani, (a) 2002, (b) 2002, (a) 2003, (b) 2003). El objetivo de este trabajo fue presentar los resultados de la encuesta efectuada a los docentes de la asignatura. Los mismos permitirán complementar y triangular la información brindada por las otras fuentes de información empleadas para llevar a cabo el diagnóstico de la evaluación del aprendizaje de la asignatura motivo de estudio.

Marco Teórico

El modelo de evaluación alternativa adoptado como marco teórico para este estudio se construyó con los aportes de: a) principios que se derivan para la evaluación del aprendizaje de las teorías de Piaget, Ausubel y de la Escuela Histórico Cultural de Vigotsky, Leontiev, Galperin y otros seguidores; b) un estudio histórico del origen de los términos examen, acreditación y evaluación en el cual se destacaron también características de los modelos evaluativos contemporáneos; c) una investigación de los fundamentos propuestos para la evaluación del aprendizaje en los estándares del National Council of Teachers of Mathematics (N.C.T.M.) (N.C.T.M, 1989; N.C.T.M., 1995; N.C.T.M. (a), 2000; N.C.T.M. (b), 2000); d) una revisión de publicaciones de las tendencias actuales en enseñanza y evaluación de la matemática y de las ciencias efectuada en revistas de investigación, actas de congresos y una tesis (Pérez González, 2001; Noda Herrera, 2001; Otero y Fanaro, 2001; Fandiño Pinilla, 2003); y e) un estudio de las funciones de la evaluación del aprendizaje enunciadas por Gimeno Sacristán (1992) y González Pérez (2000) y otros aportes efectuados para la evaluación desde la pedagogía.

El modelo de evaluación alternativa construido con los aportes de las perspectivas teóricas recién mencionadas considera que la evaluación del aprendizaje se caracteriza por:

Mantener una estrecha relación con todos los otros componentes del modelo didáctico: objetivos, contenidos, metodología de enseñanza y recursos de enseñanza.

Ser un elemento valioso para la toma de decisiones que revitalicen cualitativamente la enseñanza y el aprendizaje, dado que sus resultados serán una guía que permitirá la reestructuración de cada uno de los componentes del modelo didáctico.

Estar centrada en la actividad del alumno, proveyendo a cada uno de ellos igualdad de oportunidades para que cada estudiante pueda demostrar su potencia matemática, además de percibir el incremento logrado en la misma (conforme al concepto de potencia matemática establecido en los estándares del N.C.T.M.).

Ser coherente con el nivel de desarrollo del alumno, con el proceso de enseñanza y aprendizaje y el currículo de la institución.

Incrementar el aprendizaje de los alumnos.

Tener carácter integral.

El empleo de múltiples fuentes de información que permitan la obtención de inferencias válidas acerca de aprendizajes significativos.

Ser un proceso abierto y transparente de manera que todos los agentes implicados en él tengan información sobre el mismo.

Los criterios que se derivaron de este modelo fueron enunciados en el trabajo presentado en la VIII Conferencia Interamericana sobre Educación en la Física en La Habana-Cuba op. cit. (Colombo de Cudmani, Villalonga de García, y Raya, 2003).

Metodología

Hipótesis. Recuérdese que este trabajo es parte de una indagación más amplia, en la que se planteó la siguiente hipótesis general: "la evaluación del aprendizaje de la asignatura, se realiza con una concepción reduccionista y desintegrada de los procesos de enseñanza y aprendizaje".

Precisiones conceptuales relativas a la hipótesis enunciada

La evaluación del aprendizaje de una asignatura es el diseño de las estrategias de evaluación del aprendizaje en el contexto de la asignatura. En referencia a la concepción con que se realiza la evaluación del aprendizaje, representa las características con que se implementa la misma en una asignatura según las ideas o conceptos de evaluación del aprendizaje que posean el o los docentes que participan como agentes activos de la misma. Una concepción reduccionista y desintegrada de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la evaluación del aprendizaje, significa en primer lugar, considerarla separada del proceso y equivalente a examen, medición o acreditación. Es decir, se implementa como un apéndice de la enseñanza y el aprendizaje y no como un componente estructural y dinámico que permite la introducción de cambios durante el proceso. En segundo lugar, limita la evaluación al rendimiento académico generalmente de conocimientos, y en el mejor de los casos de las habilidades o sea profundiza el aspecto cognitivo del sistema de contenidos de enseñanza (González Pérez, 2000). Las fuentes empleadas para contrastar esta hipótesis fueron encuestas a alumnos de los años 2001 y 2002, se realizó un estudio de los ítems de evaluación sumativa (exámenes parciales y finales) de la asignatura y una encuesta a docentes del año 2001.

La encuesta a docentes del año 2001

Se realizó una encuesta a diez docentes que tuvieron a su cargo el grupo de alumnos de la asignatura en el primer cuatrimestre de 2001. Los mismos respondieron un cuestionario, con cuatro preguntas semicerradas de respuestas con varias alternativas de elección, dos preguntas cerradas y una abierta. Las preguntas se diseñaron con los propósitos siguientes. Evaluar opiniones de los docentes acerca de su concepción de evaluación, de los recursos empleados para la toma de decisiones durante el proceso de enseñanza y aprendizaje, y de las causas de fracaso de los estudiantes. La construcción del cuestionario se fundó en el modelo de evaluación alternativa y sus criterios, en datos empíricos tomados de la experiencia docente de la investigadora y en los objetivos mencionados. Para tal fin se elaboró una encuesta piloto aplicada a una muestra de tres docentes con el fin de verificar la claridad de los interrogantes del cuestionario. Posterior al pilotaje se reestructuraron las preguntas del cuestionario conformando el definitivo. Se garantizó la validez de contenido de la encuesta, sometiéndola a juicio de cinco jueces expertos en el tema, quienes comprobaron que las preguntas respondían a los objetivos de la encuesta y al modelo de evaluación alternativa. Los jueces fueron docentes universitarios de física y matemática abocados a la investigación en educación en ciencias. Los jueces debían responder al siguiente interrogante ¿fueron los ítems de la encuesta, enunciados de manera tal de cubrir los aspectos considerados en los criterios del modelo de evaluación alternativa? La respuesta se daba escogiendo una de las opciones: "adecuado", "medianamente adecuado" e "inadecuado" para cada uno de los criterios enunciados en el modelo. Se testó mediante la prueba de rangos de Friedman la hipótesis nula de concordancia de los puntajes asignados por los jueces a los criterios enunciados en el modelo. Prefijando un nivel de significación significación $\alpha = 0{,}05$ se obtuvo p-value =0,1027, con lo que se aceptaría la hipótesis de concordancia de los puntajes asignados a los criterios del modelo por los cinco jueces. Además, en la concordancia de opiniones, primó en las respuestas la categoría "adecuado" en un porcentaje igual al 88 %. Para favorecer la confiabilidad de la medición, la respuesta al cuestionario fue anónima, suministrada en un ambiente agradable, y cada docente dispuso de todo el tiempo que necesitaba para responderla.

Las categorías de análisis

Para contrastar la hipótesis planteada se definió un sistema de categorías de análisis (Taylor y Bogdan, 1987). Las categorías de análisis se establecieron en base al marco teórico al que se hizo referencia, a los objetivos planteados y a datos levantados de las respuestas a la encuesta. El sistema de categorías fue establecido definiendo las siguientes categorías:

a) **Concepción de evaluación de los docentes**: contiene opiniones de los docentes acerca de algunas funciones que desempeña la evaluación del aprendizaje de los alumnos.
b) **Recursos para la toma de decisiones**: se refiere a todos los criterios e instrumentos utilizados durante el proceso de enseñanza y aprendizaje que permiten al docente tomar decisiones para mejorar la enseñanza. En esta categoría se estudiaron las siguientes **dimensiones**:

b_1: **Instrumentos de evaluación**: incluye opiniones de docentes relativas al tipo de instrumentos empleados para evaluar sus características y capacidades que evalúan. En esta categoría se consideraron dos dimensiones:

b_{1a}: Pruebas de papel y lápiz: encierra opiniones de los docentes inherentes a exámenes parciales y finales.

b_{1b}: Otros: contiene opiniones de los docentes acerca del empleo de otros tipos de instrumentos de evaluación que no sean pruebas de papel y lápiz.

b_2: Otros recursos: se refiere a opiniones de los docentes acerca de criterios empleados durante el proceso de enseñanza para la toma de decisiones que no impliquen los distintos tipos de instrumentos de evaluación.

c) Causas del fracaso de los estudiantes: son referencias efectuadas por los docentes a los motivos de fracasos de sus alumnos.

Indicadores de las categorías

Si la categoría agrupaba información proveniente de preguntas cerradas o de las opciones cerradas de preguntas semicerradas, se escogieron como **indicadores** a números enteros, correspondientes a la frecuencia con que las opciones de cada pregunta fueron escogidas por los docentes. Si la categoría reunía información de la opción abierta de una pregunta semicerrada, en este caso no se definieron indicadores y se analizaron con la técnica descripta para el análisis de preguntas abiertas en un trabajo presentado en VI Reunión de Didáctica de la Matemática del Cono Sur (Villalonga de García y Colombo de Cudmani (a), 2002).

Las Opiniones De Los Docentes

Los resultados de esta encuesta fueron plasmados en un trabajo aceptado para ser presentado en el congreso "Trabajo pesquisa em ensino en ciencias" a realizarse en San Pablo-Brasil en noviembre de 2003 (Villalonga de García, Colombo de Cudmani, 2003). En el mismo, conforme a opiniones volcadas por los docentes, se llegó a las siguientes conclusiones:

1. No se efectuaría evaluación sistemática en forma continua. La principal función que desempeñaría la evaluación sería acreditar.
2. Una concepción espontánea del docente sería que "la principal función de la evaluación es calificar" (Alonso Sánchez, Gil Pérez y Martínez Torregosa, 1992).
3. Se reconocería a la evaluación como medio para realizar ajustes durante el proceso de enseñanza y aprendizaje.
4. En el desarrollo de Matemática 1 se compartirían los objetivos con los estudiantes, aunque no se brindaría a los mismos información sobre criterios de evaluación.
5. No se concedería importancia a la evaluación de conocimientos previos
6. Se otorgaría importancia a la evaluación de las siguientes capacidades: adquisición de información, comprensión y aplicación, teniendo muy poca importancia la valoración de las capacidades de análisis, síntesis y evaluación.
7. La evaluación metacognitiva estaría ausente.
8. Los estudiantes no tendrían mayores oportunidades de autorregular su aprendizaje, debido a que no se implementan técnicas autoevaluativas en la enseñanza.
9. No se concedería relevancia al empleo de instrumentos que permitan evaluar conocimientos integrados.
10. Las pruebas de evaluación se limitarían a evaluar sólo estrategias cognoscitivas y no considerarían la amplia gama de dimensiones a evaluar propuestas por los estándares de evaluación del NCTM, lo que implicaría que no se valora el progreso de la potencia matemática de los estudiantes. La actitud hacia la matemática y capacidades generales del estudiante no se evaluarían.
11. La evaluación no sería concebida por los docentes como medio para optimizar la comunicación, motivar al alumno y mejorar su personalidad.
12. Tres factores influenciarían con mayor peso en el bajo rendimiento de los estudiantes: la carencia de conocimientos previos, la falta de estudio y la infraestructura inadecuada para grupos numerosos. Se atribuiría, aunque en menor escala, influencia a: factores personales, metodología empleada, escasa motivación, falta de hábitos de estudio, relación docente-alumno, factores socioeconómicos, y la preparación que reciben los estudiantes en escuelas paralelas a la universidad con criterios diferentes a los brindados en la asignatura.
13. Hay que destacar que los bajos rendimientos en Matemática 1, son asignados a causas externas a la didáctica de la asignatura. Esta concepción espontánea sobre evaluación que poseen los profesores, coincide con la señalada en una

investigación realizada por Alonso Sánchez, Gil Pérez y Martínez Torregosa (a) (1992).

14. La evaluación sería una tarea que es sólo responsabilidad del docente, y dicha responsabilidad no es transferida al estudiante, a fin de que él mismo sea capaz de reconocer sus aciertos y dificultades, debido a que no se practican técnicas autoevaluativas con los alumnos

La Triangulación Como Estrategia de Interpretación

Para contrastar la hipótesis planteada se recurrió a la triangulación como estrategia de interpretación. En investigación socioeducativa, es conveniente emplear conjuntamente varios métodos diferentes para triangular la verdad subyacente en un fenómeno. Para este fin cabe utilizar dos o más métodos. El empleo de métodos diferentes resulta mejor porque probablemente disminuirán las posibilidades de error (Álvarez Méndez, 1986). "*El principio básico subyacente en la idea de **triangulación** es el de recoger observaciones / apreciaciones de una situación (o algún aspecto de ella) desde una variedad de ángulos o perspectivas y después compararlas y contrastarlas*" (Elliott, 1980: 116). Denzin (1978) define triangulación como la combinación de metodologías en el estudio de un mismo fenómeno (Forni, Gallart y Vasilachis de Gialdino, 1992). Pueden triangularse métodos, contrastando las diferencias que aparecen en la descripción y valoración de la realidad realizada a través de ellos, pero Denzin efectúa un planteo mucho más integral llegando a hablar de **triangulación de datos, de investigadores, de teorías y de metodología** (Forni, Gallart y Vasilachis de Gialdino, 1992).

1. La triangulación de datos implica tres subtipos: tiempo, espacio y personas.
2. La triangulación de investigadores es someter un mismo objeto a la observación de múltiples expertos.
3. La triangulación de teorías consiste en utilizar múltiples perspectivas teóricas en relación a un mismo conjunto de objetos.
4. La triangulación metodológica puede implicar triangulación dentro de un mismo método o entre métodos distintos.

En esta investigación, de acuerdo a la clasificación desarrollada, **se triangularon métodos y datos**. La triangulación de datos se efectuó dentro de los subtipos personas y tiempo. Simultáneamente a la aplicación de distintos métodos, se efectuó el contraste de los puntos de vista de las opiniones de agentes activos en la evaluación del aprendizaje en el contexto áulico del año 2001 y 2002. De esta manera, la triangulación empleada como estrategia interpretativa, permitió enunciar proposiciones que obraron de argumentos que consolidaron la validación de la hipótesis planteada. El detalle de la construcción y enunciación de estas proposiciones se muestra en un trabajo de tesis (Villalonga de García, 2003).

Conclusiones: El diagnóstico de la evaluación del aprendizaje de la asignatura

La metodología escogida para lograr los propósitos planteados en esta indagación llevó a realizar dos procesos constructivos:

i) uno de tipo teórico, con el que se logró el modelo de evaluación alternativa, de donde se derivaron los criterios guía para la evaluación del aprendizaje de la asignatura, primer objetivo de este trabajo,

ii) otro de tipo metodológico que aportó:

- un sistema de categorías, construido con las categorías de las cuatro fuentes de información utilizadas (Villalonga de García, 2003). Este sistema de categorías fue empleado como instrumento que permitió organizar la información para obtener los resultados de la indagación, y
- una serie de proposiciones, logradas mediante triangulación de los resultados de la información de las distintas fuentes, que permitieron efectuar el diagnóstico del sistema de evaluación implementado en la asignatura, segundo objetivo de la indagación (Villalonga de García, 2003).

Seguidamente, en forma muy sintética, se detallan los resultados más prominentes obtenidos para el diagnóstico de la evaluación del aprendizaje de la asignatura logrados en esta investigación:

1. La evaluación del aprendizaje sería equivalente a examen, medición o acreditación. Es decir:

a) Al estar desintegrada de los procesos de enseñanza y aprendizaje, no sería implementada como un componente estructural y dinámico que permite el monitoreo de los avances de cada estudiante hacia las metas de aprendizaje, proporcionándole una retroalimentación relevante y útil sobre su trabajo que le permita apreciar el incremento de su potencia matemática, y

b) al no ser una estrategia constitutiva del proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática, en gran parte no favorecería aprendizajes significativos.

2. No se efectuaría evaluación integral del aprendizaje, dado que la misma se limitaría al aspecto cognitivo del sistema de contenidos de la enseñanza.

Bibliografía

Alonso, M., Gil, D. y Martínez, J. (1992). Concepciones espontáneas de los profesores de ciencias sobre evaluación: obstáculos a superar y propuestas de replanteamiento. *Revista enseñanza de la física.* Vol. 5. Nº 2. (pp. 18-38).

Alvarez, J. (1986). "Investigación cuantitativa/investigación cualitativa: ¿Una falsa disyuntiva?", en Cook T. y Reichardt Ch.(Eds.), *Métodos cualitativos y cuantitativos en investigación evaluativa* (pp.9-23). Ediciones Morata, S.A. Madrid.

Colombo de Cudmani, L, Villalonga de García, P. y Raya F. (2003). *Marcos teóricos de referencia para orientar la evaluación del aprendizaje en cursos básicos universitarios en ciencias.* Presentado en la VIII Conferencia Interamericana sobre educación en la Física. La Habana-Cuba.

Denzin, N. (1968). Citado por Forni F., Gallart M. y Vasilachis de Gialdino I. (1992). *Métodos cualitativos II. La práctica de la investigación.* Centro editorial de América Latina. Bs. As-Argentina.

Elliott, J. (1980). Citado por Santos, M. (1998). Hacer visible lo cotidiano. Teoría y práctica de la evaluación cualitativa de los centros escolares. 3ª edición. Ediciones Akal. Madrid - España.

Fandiño, M. (2003). *Currículo y evaluación en matemáticas: hipótesis de base.* Memorias del V Simposio de Educación Matemática. (pp.235-254). Chivilcoy- Argentina.

Forni F, Gallart M. y Vasilachis de Gialdino I. (1992). *Métodos cualitativos II. La práctica de la investigación.* Centro editorial de América Latina. Buenos Aires- Argentina.

Gimeno, J. y Pérez, A. (1992) *Comprender y transformar la enseñanza.* Ed. Morata. Madrid.

González, M. (2000). Evaluación del aprendizaje en la enseñanza universitaria. CEPES. U. de la Habana. Cuba.

Moreira, M. (1999). *Teorias de aprendizagem.* Sâo Paulo- Brasil. Editora Pedagógica Universitária.

N.C.T.M. (1989). Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática. Sevilla. 267 pp. Edición española de Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics (Tr. Thales).

N.C.T.M. (1995). *Assessment Standards for School Mathematics*. Editado en internet: http://standards.nctm.org/Previous/AssStds/index.htm .

N.C.T.M. (b), (2000). "The assessment principle", en N.C.T.M. (2000) (Eds) *Principles and Standards for School Mathematics.* Editado en internet: http://standards.nctm.org /document/chapter2/index.htm.

Noda , M.(2001) La resolución de problemas de matemáticas, bien y mal definidos. N° V. 47. pp. 3-18

Otero M.y Fanaro, M. (2001). El conocimiento matemático de los alumnos que ingresan a la universidad. *Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa.* V. 4. Nº 3 pp. 267- 287.

Pérez , O. (2000). La evaluación del aprendizaje como elemento del sistema de dirección del proceso docente. Tesis de doctorado. Universidad de Camagüey. Cuba.

Taylor S. y Bogdan R. (1987). Introducción a los métodos cualitativos de investigación. La búsqueda de significados. Editorial Paidós. Barcelona- España.

Villalonga, P. (2003). Un enfoque alternativo para la evaluación del aprendizaje del Cálculo en una facultad de ciencias. Tesis Magíster, Universidad Nacional de Tucumán. Tucumán-Argentina.

Villalonga de García P., Colombo de Cudmani, L. (a) (2003). *El aporte de la evaluación de los docentes en el diagnóstico de la evaluación de un curso básico de cálculo,* Ponencia para el 4^0 Encontro Nacional de Pesquisa em Ensino de Ciências a realizarse en noviembre de 2003, San Pablo- Brasil.

Villalonga de García, P. y Colombo de Cudmani, L. (b) (2003). Opinión de los alumnos sobre la dificultad e importancia de las tareas propuestas en los exámenes de matemática en una facultad de ciencias Memorias V Simposio Ed. Mat., pp. 1486-1506. ISBN nº 987-20239-1-3. Chivilcoy-Argentina.

DISEÑO Y VALIDACIÓN DE UN INSTRUMENTO PREDICTOR DEL ÉXITO ACADÉMICO DE ALUMNOS INGRESANTES A LA UNIVERSIDAD.

Walter Álvarez, Eduardo Lacués, Magdalena Pagano.
Universidad Católica del Uruguay (UCU)
walvarez@ucu.edu.uy, elacues@ucu.edu.uy, mapagano@ucu.edu.uy

Resumen

El presente artículo informa acerca de la elaboración y validación de un instrumento predictor del éxito académico de los estudiantes en el primer semestre de universidad. Es la tercera etapa de un trabajo cuyas dos primeras partes tuvieron como objetivos, respectivamente, la determinación de un perfil de los estudiantes ingresantes a la universidad y la evolución que experimentan al cabo del primer semestre. La perspectiva provista por el concepto de aprendizaje significativo de Ausubel reconoce la importancia decisiva que en los aprendizajes tienen los conocimientos previos de los aprendices; por otro lado, la noción de zona de desarrollo proximal de Vygotski establece la importancia de determinar no ya el desarrollo actual de los estudiantes, sino el potencial que tienen. Desde esta doble mirada teórica es que se plantea el tema de elaborar un instrumento que permita anticipar los resultados académicos de los alumnos en su primer año universitario, como forma de obtener información que facilite el proceso de instrumentar apoyos adecuados para aquellos alumnos que presumiblemente enfrentarán fracasos. La estructura del artículo es la siguiente. En una primera sección se describe la perspectiva teórica ya mencionada y se explica su relación con la estructura del cuestionario elaborado como instrumento y que figura en el Anexo I. En la segunda, se historia brevemente el proceso de las dos primeras etapas de este trabajo y se las vincula con ésta. En la tercera, se presentan los objetivos de esta etapa, se comentan los resultados de la aplicación del instrumento y se establecen algunas conclusiones. Finalmente, la cuarta resume el informe y propone posibles continuaciones de esta investigación.

Aprendizaje significativo, zona de desarrollo proximal y confección del cuestionario.

El conocimiento previo de los alumnos y su incidencia en los aprendizajes posteriores es, a la luz de algunas de las corrientes contemporáneas de la psicología educativa un punto de vital importancia (Ausubel, 2001, Novak, 1998, Bruner, 1968) En este sentido, Novak (1998) cita a Ausubel diciendo que "Si tuviera que reducir toda la psicología educativa en un único principio, diría que el factor más importante que influye en el aprendizaje es lo que el aprendiz ya sabe. Hay que determinarlo y enseñarle en consecuencia". Desde la teoría de Ausubel, cuando se habla de aprendizaje se está haciendo referencia al aprendizaje significativo, esto es, un aprendizaje que fomenta la creatividad de los estudiantes y el poder de transferencia, que los capacita para aprender a aprender. Para este tipo de aprendizajes resulta ser relevante un conocimiento previo que permita integrar los nuevos conocimientos con los conceptos ya existentes en la estructura cognitiva, a diferencia de lo que podría ser un aprendizaje meramente memorístico, donde los nuevos conocimientos se almacenan de una manera arbitraria en la estructura cognitiva y por lo tanto no se favorece la transferencia y la integración. Ausubel (2001) propone que la enseñanza proceda a introducir primeramente los conceptos inclusores que sirvan como ideas de anclaje, para luego deducir a partir de ellos los casos particulares. Insiste en que se ha de partir de lo más general para que luego pueda producirse la *diferenciación progresiva* (desarrollo y ampliación de los conceptos inclusores existentes en la

estructura cognitiva) y la *reconciliación integradora* (establecimiento de interrelaciones entre los conceptos inclusores e incluidos que permite detectar similitudes y diferencias). De esta manera, aún cuando se produzca el olvido se habrá logrado una mejora de la estructura cognitiva que es lo que el autor denomina *inclusión obliterativa*. La intención de detectar conocimientos previos relevantes que funcionen como ideas de anclaje para posteriores aprendizajes es la que explica la inclusión en el cuestionario usado como instrumento de los ítems referidos al cálculo diferencial. Se buscó a través de ellos diferenciar entre los aprendizajes memorísticos y los significativos.
En otro orden, Vygotsky (1979) introduce la noción de zona de desarrollo proximal como la diferencia entre lo que el aprendiz puede realizar por sí solo y lo que podría hacer con el apoyo de un profesor o un aprendiz más aventajado. Entre otras consecuencias la más relevante para este trabajo es que es precisamente el potencial de un aprendiz y no su grado de desarrollo actual, el que establece las expectativas que es razonable tener acerca de su desempeño futuro. En algunos relevamientos previos, se había detectado que una posible concreción de la zona de desarrollo proximal puede señalarse en relación con el asunto de construcción de demostraciones. En efecto, aún cuando un estudiante no pueda construir una demostración por sí mismo, puede hacerlo si se le suministran indicaciones y utiliza acertadamente reglas de inferencia. Es en este sentido que se incluyeron en el cuestionario los ítems referidos a las estructuras lógicas que manejan los ingresantes, tratando de determinar el grado de dominio de diversas forma de argumentación como un indicador del potencial del aprendiz. Otro elemento relevante que aporta Vygotsky (1987) es el del rol que juega el lenguaje como elemento organizador de tareas complejas. En particular, en Matemáticas el dominio del lenguaje algebraico y de los diferentes sistemas de símbolos es parte esencial de las necesidades para comprender formulaciones abstractas, realizar diversos tipos de cálculo o resolver problemas. Esto explica la inclusión de ítems relacionados con este aspecto en el cuestionario.

Etapas anteriores a esta investigación

En la primera instancia de este trabajo, se confeccionó una prueba de múltiple opción en la cual se indagaba sobre las estructuras lógicas que los alumnos manejan, el nivel de uso del lenguaje simbólico que poseen, y sus conocimientos en torno a algunos conceptos del cálculo diferencial. Para la elaboración del cuestionario se tuvieron en cuenta los aportes de la bibliografía existente así como la experiencia docente de los autores. Con este instrumento se trataba de determinar el perfil de los alumnos ingresantes a las carreras de Contador Público, Economía o Ingeniería (en Informática, Electrónica o Telecomunicaciones) de la Universidad Católica del Uruguay (UCU), con propósitos de diagnóstico. Se aplicó el cuestionario a los alumnos ingresantes en la primera semana de comenzado el semestre, como forma de relevar el estado de situación al ingresar. Los resultados de esta primera instancia se reportaron en un informe de investigación presentado en la RELME 15 (Álvarez, W., Lacués, E. y Pagano, M., 2001). Entre ellos se cuentan que es frecuente que los estudiantes confundan la validez de un enunciado con la de su recíproco, y que confundan también los conectivos lógicos “y” y “o”. Contra lo esperado a partir de

los resultados de otras investigaciones, mostraron un dominio adecuado del lenguaje simbólico, aunque en los ítems sobre temas de Cálculo que requerían un conocimiento más allá de lo simplemente algorítmico el desempeño fue más bien bajo.
En la segunda etapa, mediante la técnica de pre-post test, se comparó el desempeño de los estudiantes en la prueba de diagnóstico administrada al comienzo del semestre con el resultado de la aplicación del mismo cuestionario al finalizar el primer semestre, tratando de establecer si existía alguna evolución favorable. En general, éste fue la conclusión que se obtuvo, abriendo otras cuestiones a la discusión (Álvarez, W., Lacués, E. y Pagano, M., 2002). También en esta etapa se validó el cuestionario mediante un análisis de ítems basado en los índices de dificultad y de discriminación. Además de informar sobre dificultad global de la prueba y de su capacidad conjunta para discriminar entre buenos y malos desempeños, esta instancia permitió detectar errores en la formulación de algunos ítems, así como en la elección de algunos de los distractores. Como se verá en la sección siguiente, estos índices permiten una interpretación adicional de los resultados relacionados con la predicción. La tercera etapa que se describe a continuación, consistió en decidir si existe correlación entre las variables resultados de la prueba y rendimiento académico.

El cuestionario como instrumento predictor del éxito académico
Es claro que no es posible atribuir exclusivamente a los conocimientos previos y al grado de desarrollo de diversas capacidades el éxito académico. Sin pretender ser exhaustivos, factores que indudablemente influyen, son: el grado de adaptación que experimente el estudiante al entorno universitario (para él nuevo), la disposición personal a aceptar trabajar en proyectos prolongados, la capacidad para sobrellevar presiones derivadas de las diferentes instancias de evaluación que debe enfrentar, la habilidad para organizar su tiempo de acuerdo a las demandas de los plazos que se le establezcan. Ninguno de estos elementos puede ser detectado con el cuestionario elaborado. Sin embargo, sí parece razonable esperar que si un alumno tiene un desempeño insuficiente en la instancia de diagnóstico, está en condiciones desfavorables para encarar las actividades de los cursos (al menos los de Matemática) que debe tomar en las respectivas carreras. En primer lugar, es necesario establecer qué indicadores se eligieron para medir el éxito académico. Los estudiantes de las carreras de Contador Público o Economía comparten un curso de Matemáticas en el primer semestre, que trata fundamentalmente temas de Cálculo Diferencial e Integral en una variable. Estos son también los contenidos de uno de los dos cursos de las carreras de Ingeniería en Electrónica, Telecomunicaciones o Informática, en tanto el otro cubre cuestiones preliminares de Álgebra Lineal. La carrera en Informática incluye también un curso de Lógica en el primer semestre.
El procedimiento para medir el grado de éxito académico consistió en tener en cuenta si el estudiante perdió o aprobó el o los cursos del área lógico-matemática de la carrera a la que pertenece. Se hizo un estudio con tablas de contingencia que permite saber si el puntaje obtenido en el test de diagnóstico, medido como la cantidad de respuestas correctas, es o no independiente de aprobar o perder el o los cursos de las materias del área lógico-matemática en el primer semestre considerado. Se

construyeron tres franjas para clasificar el desempeño en el test de diagnóstico, y en el otro sentido si había aprobado o no el curso. A partir de la tabla de frecuencias se calculó la estadística U de Pearson que aproximada por χ^2 permite saber si el puntaje del test es independiente del hecho de aprobar o no el curso. Se consideraron tres poblaciones diferentes: la primera la constituyen los ingresantes a primer año de la Facultad de Ingeniería y Tecnologías (FIT), la segunda los ingresantes a primer año de la Facultad de Ciencias Empresariales (FCE), y la tercera es la unión de las dos anteriores (Total). Como se muestra en el Anexo II los resultados de los test de independencia aplicados a las diferentes muestras de las poblaciones de estudio, se encuentra una asociación significativa entre las variables resultados en la prueba y éxito académico en el primer semestre, en la muestra total y en la población correspondiente a la FIT. Esto parece confirmar que, en conjunto, un relevante aprendizaje previo y un adecuado potencial, que es lo que se pretendió medir a partir del cuestionario como se indicó en la primera sección, resultan ser variables que explican significativamente el posterior rendimiento académico de los estudiantes. Por otra parte, si bien no existe una asociación significativa para el caso de la FCE puede notarse sin embargo a partir de las tablas de contingencia que figuran en el Anexo II, que los resultados de aquellos alumnos que se encuentran en la clase 3 (franja superior) tienen un desempeño académico netamente superior al resto de los estudiantes en concordancia con lo que ocurre también en la FIT. Esto parece consistente con la teoría del aprendizaje significativo a partir de la evidencia suministrada por la tabla de índices de dificultad y discriminación que se presenta en el Anexo III. En efecto, muchos de los ítems que requerían un aprendizaje no memorístico (tales como 5, 6, 16 y 17) tuvieron un alto grado de dificultad y discriminación positiva; esto significa que fueron respondidos por muy pocos alumnos, y que, además, entre quienes los respondieron correctamente, fue mayor el número de alumnos del grupo superior que el de los del grupo inferior. Estos resultados van el en sentido de reafirmar la idea de que aquellos estudiantes que han logrado aprendizajes previos significativos logran utilizarlos como ideas de anclaje pertinentes para los nuevos conocimientos. Sin embargo, no pueden hacerse los mismos comentarios con respecto a los estudiantes ubicados en las otras dos franjas, la media y la inferior. Una posible explicación a la escasa asociación en el caso de la FCE entre las variables resultados de la prueba y rendimiento académico, puede encontrarse al considerar la proveniencia de los estudiantes. Los ingresantes a la FCE pueden provenir de cualquiera de las orientaciones del bachillerato que tengan alguna asignatura del área Matemática en su último año, lo que es causa de una gran heterogeneidad. A diferencia de esta situación, los alumnos de la FIT provienen todos de la orientación Ingeniería del bachillerato y por lo tanto han tenido tres asignaturas del área Matemática en su último año en secundaria. Esta diferente exigencia puede haber tenido como consecuencia que estos últimos hayan logrado una mejor aproximación a un aprendizaje significativo en el área Matemática que los estudiantes de la FCE. Otro conjunto de interpretaciones proviene de considerar los resultados obtenidos en algunas de las partes del cuestionario en relación con el éxito en ciertas asignaturas. En el caso de Cálculo Infinitesimal, existe asociación entre el resultado global en el cuestionario y el hecho de aprobar la asignatura. Pero además, si sólo se tienen en cuenta los ítems de Cálculo que figuran en la prueba, esta asociación es aún más clara. De nuevo en este caso, para estar en la franja superior de rendimiento en el test, un estudiante debió contestar correctamente ítems que requerían un conocimiento no sólo algorítmico sino más integrado en redes conceptuales complejas, lo que estaría reforzando la validez de los comentarios efectuados antes. Una situación diferente se registra en el caso de Lógica. En este caso no hay motivos estadísticos para afirmar que existe asociación entre el resultado global y el hecho de aprobar la asignatura, ni tampoco entre el desempeño particular en los ítems de Lógica del cuestionario y la aprobación del curso. Una posible explicación a este hecho es que esta asignatura es más bien autocontenida, de manera que el programa prescribe tratar los diferentes contenidos desde un punto de partida más bien elemental, por lo que el peso de los conocimientos previos aquí sería menor que en el caso de Cálculo Infinitesimal. Por otro lado, aún cuando la evidencia estadística no permite establecer asociación, es también cierto que los estudiantes de las franjas media y superior tienen un desempeño en esta asignatura bien diferente de los de la franja inferior. Un caso diferente a estos dos anteriores lo constituye Álgebra Lineal, dado que en el cuestionario no figuran ítems directamente relacionados con esta asignatura. A pesar de ello, también se registra una asociación entre el desempeño en la instancia de diagnóstico y aprobar el curso.

Resumen y conclusiones finales

Se ha presentado el proceso de construcción y validación de un instrumento predictor del éxito académico de los alumnos ingresantes a la universidad, poniéndolo en relación con otros dos temas, el de la determinación del perfil de estos alumnos y el de su evolución durante el primer semestre de las respectivas carreras. Se ha sustentado este proceso desde el punto de vista teórico en los conceptos de aprendizaje significativo de Ausubel y zona de desarrollo proximal de Vygotsky, explicando la elaboración de grupos de ítems a partir de la intención ya fuera de relevar conocimientos previos o el potencial de desarrollo de los estudiantes. Se ha obtenido como resultado que existe una asociación entre el resultado de la instancia de diagnóstico y el éxito académico, medido éste en términos de la aprobación del cursos del primer semestre, lo que resulta consistente con la posición teórica asumida, al poner de relieve, por un lado, la importancia del conocimiento significativo previo como anclaje para nuevos aprendizajes, y por otro, la de plantear la enseñanza de manera que se tenga en cuenta el potencial de los alumnos. Una cuestión a investigar a partir de estos resultados es qué tipo de apoyo suplementario puede instrumentarse para asistir a los estudiantes con un mal desempeño en la prueba de diagnóstico. Un indicio surge de la consideración hecha acerca de que los simples aprendizajes memorísticos o algorítmicos no explican el éxito académico. Parece, pues, que es necesario pensar en formas de estimular aprendizajes más significativos, posiblemente a partir del planteo de tareas complejas que requieran la integración de diversas redes conceptuales y el desarrollo de diferentes tipos de capacidades. En otro orden, las diferencias entre los resultados obtenidos entre los alumnos de las dos Facultades consideradas lleva a pensar en la necesidad de diseñar instrumentos independientes, más adecuados para tener en cuenta el conjunto de aprendizajes anteriores de los ingresantes, como forma de mejorar las posibilidades de anticipar los rendimientos académicos.

Bibliografía

Álvarez, W; Lacués, E; Pagano, M. (2000) Determinación del perfil de los ingresantes a la universidad, en relación con las estructuras lógicas que manejan, la capacidad que poseen en el uso del lenguaje simbólico y los conocimientos previos que tienen de Cálculo Diferencial. Reporte de investigación presentado en la RELME XV, julio 2000 Buenos Aires, Argentina.

Álvarez, W; Lacués, E; Pagano, M. (2001) Evolución de los estudiantes de primer año universitario, en relación con las estructuras lógicas que utilizan, el nivel de uso del lenguaje simbólico que alcanzan y su adquisición de conceptos de Cálculo Diferencial; Reporte de investigación presentado en VI Reunión de Didáctica de la Matemática del Cono Sur, julio 2001, Buenos Aires, Argentina.

Ausubel, David (2001) Adquisición y retención del conocimiento, Paidós, Madrid.

Bruner, J. (1968) El proceso de la Educación, U.T.E.G.A., México.

Novak, Joseph (1998) Conocimiento y aprendizaje, Alianza, Madrid.

Vygotski, L.S. (1979) El desarrollo de los procesos psicológicos superiores, Barcelona. Grupo editorial Grijalbo.

Vygotski, L.S. (1987). Pensamiento y lenguaje, Buenos Aires, Editorial La Pléyade.

Anexo 1: Cuestionario

ESTRUCTURAS LÓGICAS

1. Los integrantes de las barras bravas son personas inadaptadas y violentas.
   Entonces, es posible concluir que:

- ❑ Las personas violentas están en las barras bravas.
- ❑ Existen personas inadaptadas.
- ❑ Si no existen las barras bravas, entonces no hay personas inadaptadas o violentas.
- ❑ Si hay algún integrante de alguna barra brava, entonces hay alguna persona violenta.

2. Considere la siguiente afirmación:
   "Todos los presentes en esta sala son estudiantes de Electrónica".

   La negación de esta afirmación consiste en afirmar que:

- ❑ Nadie en esta sala es estudiante de Electrónica.
- ❑ Todos los estudiantes de Electrónica están en esta sala.
- ❑ Alguien en esta sala no es estudiante de Electrónica.
- ❑ Si alguien no está en esta sala, entonces no estudia Electrónica.

3. El recíproco de la afirmación:
   " Si llueve me mojo"

   es:

- ❑ No me mojo si no llueve.
- ❑ Si me mojo, llueve.

- [ ] Algunas veces que me mojo es porque llueve.
- [ ] Si no llueve, no me mojo.

4. Considere la siguiente proposición: Ningún abogado sabe matemáticas y todos los matemáticos saben matemática. Un contraejemplo de esta afirmación lo constituye el siguiente hecho:

- [ ] Fermat fue abogado y sabía matemáticas.
- [ ] Einstein sabía matemática y no era matemático.
- [ ] Los abogados y los matemáticos usan la lógica.
- [ ] No se conocen casos de personas que sean a la vez abogados y matemáticos.

5. Recuerde el teorema de límite para la suma:
"Si dos funciones tienen límite en a, entonces su suma tiene límite en a".

Por lo tanto:

- [ ] Si la suma de dos funciones tiene límite en a, entonces cada una tiene límite en a.
- [ ] Si dos funciones no tienen límite en a, entonces su suma no tiene límite en a.
- [ ] Si una de las dos funciones que se están sumando no tiene límite en a, entonces no puede afirmarse nada acerca del límite de la suma.
- [ ] Cuando una suma de dos funciones tiene límite en a, al menos una de ellas tiene límite en a.

6. Un teorema de dominio público establece que si una función f tiene un máximo relativo en a y f es derivable en a entonces f '(a)=0, de lo cual se puede deducir que:

- [ ] Si f no es derivable en a, entonces f no puede tener un máximo relativo en a.
- [ ] Si f '(a)=0 entonces f tiene un máximo relativo en a.
- [ ] Si f es derivable en a y f '(a)$\neq$ 0, entonces f no puede tener un máximo relativo en a
- [ ] Si f no es derivable en a, entonces f tiene un punto de inflexión en a.

LENGUAJE SIMBÓLICO

Sean U={x/x es un estudiante de la UCU}
E={x/x es un estudiante de la Licenciatura en Dirección de Empresas}
I={x/x es un estudiante de Ingeniería}.

Entonces el conjunto $C=(U\cap E^c)\cup I$ es:

C={x/x es estudiante de la UCU y no de la Licenciatura en Dirección de Empresas, o es estudiante de Ingeniería}.

C={x/x es estudiante de la UCU y no de la Licenciatura en Dirección de Empresas y sí es estudiante de Ingeniería}.
C={x/x no es estudiante de la UCU ni de la Licenciatura en Dirección de Empresas, o es estudiante de Ingeniería}.
C={x/x no es estudiante de la UCU o no lo es de la Licenciatura en Dirección de Empresas, o es estudiante de Ingeniería}.

2. Sean U={x/x es un estudiante de la UCU}
E={x/x es un estudiante de Dirección de Empresas}
I={x/x es un estudiante de Ingeniería}.
Entonces, el conjunto C de los estudiantes de Ingeniería o de Dirección de Empresas que no son de la UCU es:

$C=I\cap E\cap U^c$.
$C=(I\cup E)\cap U^c$.
$C=I\cup (E\cap U^c)$.
$C=(I\cup E)^c\cap U$.

3. Sean E={e/ e es buen estudiante}
M={m/ m gusta de la matemática}
S={s/ s estudia la carrera de Sicología}.
Marcos pertenece al conjunto $E\cap M^c\cap S$. Entonces:

Marcos es buen estudiante de sicología pero no le gusta la matemática.
Marcos no es buen estudiante y no le gusta la matemática, y estudia la carrera en sicología.
Marcos no es buen estudiante ni le gusta la matemática ni estudia la carrera en sicología.
Marcos es buen estudiante pero no le gusta la matemática ni estudia la carrera en sicología.

4. Sean E={e/ e es buen estudiante}
M={m/ m gusta de la matemática}
S={s/ s estudia la carrera de Sicología}.
Ismael es buen estudiante de Sicología a quien le gusta la matemática.
Entonces Ismael pertenece al conjunto:

$E\cup S\cup M$.
$E\cap S\cap M$.
$(E\cap S)\cup M$.
$E\cap (S\cup M)$.

1. El equipo de fútbol universitario de la UCU en su preparación para el próximo campeonato ha disputado tres encuentros. En el primero marcó tantos goles como la suma de los que hizo en los otros dos. En total convirtió ocho goles, y en el segundo hizo dos goles más que en el tercero. Si x, y y z designan respectivamente el número de goles convertidos en el primer, segundo y tercer partidos, ¿cuál de los siguientes sistemas permite hallar el número de goles convertidos en cada partido?.

❑ $\begin{cases} x = y + z \\ x + y + z = 0 \\ y + 2 = z \end{cases}$

❑ $\begin{cases} x = y + z \\ x + y + z = 8 \\ y + z = 2 \end{cases}$

❑ $\begin{cases} x+y+z=8 \\ x=y+z \\ y=z+2 \end{cases}$

❑ $\begin{cases} x+y+z=8 \\ x=y+z \\ y+z+2=0 \end{cases}$

2. Algunos modelos económicos explican con una ecuación lineal la evolución de la demanda q de un bien en función de su precio p. Si para determinado bien se sabe que cuando el precio aumenta una unidad la demanda bajará cinco y además que si se regala el producto la demanda será tres mil unidades.
   Indique cual de las siguientes ecuaciones representa esta situación.

$q = 3000 + 5p$
$q = 5p-3000$
$q = 3000-5p$
$p = 5q+3000$

CÁLCULO DIFERENCIAL

1. Sea $f(x)=\dfrac{1}{(x^2+1)\cdot L(x^2+1)}$, el dominio de f es:
   Dom f = R-{0}
   Dom f = R^+
   Dom f = R-{-1}
   Dom f = R^+-{1}

Sea f : A → R donde A = Dom f = R^+-{1}
Si $g(x) = f(x^2)$, entonces el dominio de g es:

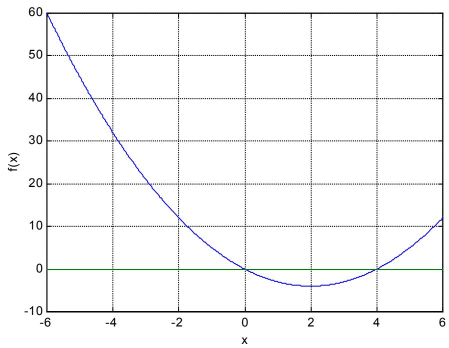
Dom g= R^+-{1}
Dom *g*= R^+
Dom *g*= R-{0,-1,1}
Dom *g* = R-{0}

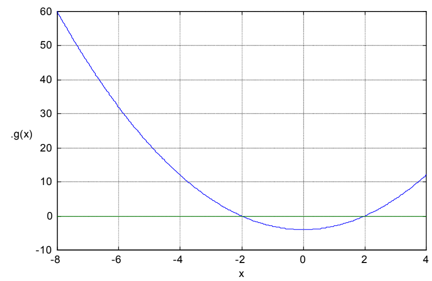
3. Considere las funciones f, g y h dadas por: $f(x)=e^x$, $g(x)=2x-1$ y $h(x)=f(g(x))$.
   Entonces h'(0) es igual a:
   0.
   $2e^{-1}$
   e^{-1}.
   $2e^2$.

Suponga que dos funciones f y g satisfacen f(1)=0, f '(1)=0, g(-1)=1 y g'(-1)=2.
Si $h=f\circ g$ y $k=g\circ f$ entonces resulta:

Ni h'(-1) ni k'(1) pueden calcularse con los datos suministrados.
h'(-1)=2 y k'(1) no puede calcularse con los datos suministrados.
h'(-1)=0 y k´(1) no puede calcularse con los datos suministrados.
h'(-1)=2 y k'(1)=0.

5. Si el primer gráfico corresponde a la función f y el segundo gráfico a la función g.

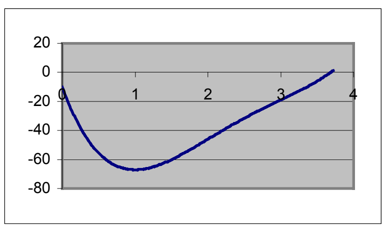




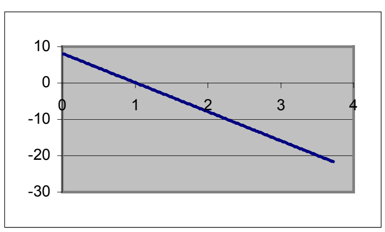
Entonces podemos afirmar:

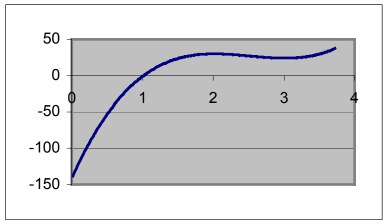
g(x)=f(x)
g(x)=f(x+2)
g(x)=f(x-2)
g(x)=f(2x)

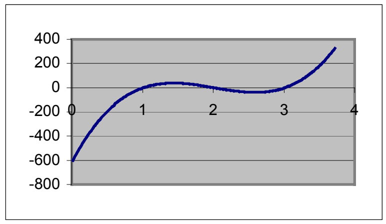
6. Se da la gráfica de una función f.
7.

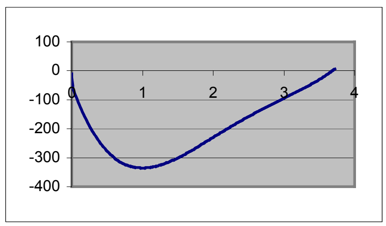


Indique cual de las siguientes corresponde a la gráfica de su derivada f ’.









Anexo II

1) Resumen de cursos aprobados o no según zona de puntaje del test de diagnóstico en el total de la muestra

	CLASE 1	CLASE 2	CLASE 3	
APROBADOS	40	114	14	168
NO APROBADOS	23	17	1	41
	63	131	15	209

Clase 1 se consideraron los puntajes hasta 8.

Clase 2 se consideraron los puntajes hasta 14.
Clase 3 se consideraron los puntajes hasta 18.

La estadística U de Pearson dio 16,656 que corresponde a una significación de 0,0002, lo que implica que se rechaza que el puntaje del test y el hecho de aprobar o no el curso sean independientes, por lo que podemos concluir que hay una asociación muy alta entre los factores considerados.

2) Resumen de cursos aprobados o no según puntaje del test de diagnóstico en la muestra correspondiente a la Facultad de Ingeniería y Tecnologías

	CLASE 1	CLASE 2	CLASE 3	
APROBADOS	16	94	13	123
NO APROBADOS	11	8	1	20
	27	102	14	143

Clase 1 se consideraron los puntajes hasta 7.

Clase 2 se consideraron los puntajes hasta 13.
Clase 3 se consideraron los puntajes hasta 18.

La estadística U de Pearson dio 19,81 que corresponde a una significación de 0,00005, lo que implica que se rechaza que el puntaje del test y el hecho de aprobar o no el curso sean independientes, por lo que podemos concluir que hay una asociación muy alta entre los factores considerados.

3) Resumen de cursos aprobados o no según puntaje de todo el test de diagnóstico en la muestra correspondiente a la Facultad de Ciencias Empresariales.

	CLASE 1	CLASE 2	CLASE 3	
APROBADOS	27	11	7	45
NO APROBADOS	15	6	0	21
	42	17	7	66

Clase 1 se consideraron los puntajes hasta 8.

Clase 2 se consideraron los puntajes hasta 11.
Clase 3 se consideraron los puntajes hasta 18.

La estadística U de Pearson dio 3,655 que corresponde a una significación de 0,161 lo que implica que no se rechaza que el puntaje del test y el hecho de aprobar o no el curso sean independientes, por lo que podemos concluir que no hay asociación entre los factores considerados.

4) Resumen de cursos aprobados o no según puntaje del test de diagnóstico teniendo en cuenta únicamente los items de Cálculo Diferencial en la muestra correspondiente a la Facultad de Ciencias Empresariales.

	CLASE 1	CLASE 2	CLASE 3	
APROBADOS	28	16	1	45
NO APROBADOS	19	2	0	21
	47	18	1	66

Clase 1 se consideraron los puntajes hasta 2.

Clase 2 se consideraron los puntajes hasta 4.
Clase 3 se consideraron los puntajes hasta 6.

La estadística U de Pearson dio 5,629 que corresponde a una significación de 0,0599, lo que implica que podemos rechazar que el puntaje del test en ítems de cálculo y el hecho de aprobar o no el curso sean independientes, por lo que podemos concluir que hay una asociación entre los factores considerados, si bien no es alta.

5) Resumen de cursos aprobados o no según puntaje de todo el test de diagnóstico en la muestra correspondiente a los alumnos que cursaron Cálculo Infinitesimal en la Facultad de Ingeniería y Tecnologías.

	CLASE 1	CLASE 2	CLASE 3	
APROBADOS	3	33	5	41
NO APROBADOS	3	3	0	6
	6	36	5	47

Clase 1 se consideraron los puntajes hasta 7.

Clase 2 se consideraron los puntajes hasta 13.

Clase 3 se consideraron los puntajes hasta 18.

La estadística U de Pearson dio 8,8364 que corresponde a una significación de 0,012 lo que implica que se rechaza que el puntaje del test y el hecho de aprobar o no el curso sean independientes, por lo que podemos concluir que hay asociación alta entre los factores considerados.

6) Resumen de cursos aprobados o no según puntaje del test de diagnóstico teniendo en cuenta únicamente los items de Cálculo Diferencial en la muestra correspondiente a los alumnos que cursaron Cálculo Infinitesimal en la Facultad de Ingeniería y Tecnologías.

	CLASE 1	CLASE 2	CLASE 3	
APROBADOS	2	25	14	41
NO APROBADOS	3	2	1	6
	5	27	15	47

Clase 1 se consideraron los puntajes hasta 1.

Clase 2 se consideraron los puntajes hasta 3.

Clase 3 se consideraron los puntajes hasta 6.

La estadística U de Pearson dio 11,214 que corresponde a una significación de 0,0037 lo que implica que podemos rechazar que el puntaje del test en ítems de cálculo y el hecho de aprobar o no el curso sean independientes, por lo que podemos concluir que hay una asociación muy alta entre los factores considerados.

7) Resumen de cursos aprobados o no según puntaje de todo el test de diagnóstico en la muestra correspondiente a los alumnos que cursaron Álgebra Lineal I en la Facultad de Ingeniería y Tecnologías.

	CLASE 1	CLASE 2	CLASE 3	
APROBADOS	7	39	5	51
NO APROBADOS	4	1	1	6
	11	40	6	57

Clase 1 se consideraron los puntajes hasta 7.

Clase 2 se consideraron los puntajes hasta 13.

Clase 3 se consideraron los puntajes hasta 18.

La estadística U de Pearson dio 10,773 que corresponde a una significación de 0,0046 lo que implica que se rechaza que el puntaje del test y el hecho de aprobar o no el curso sean independientes, por lo que podemos concluir que hay asociación alta entre los factores considerados.

8) Resumen de cursos aprobados o no según puntaje de todo el test de diagnóstico en la muestra correspondiente a los alumnos que cursaron Lógica en la Facultad de Ingeniería y Tecnologías.

	CLASE 1	CLASE 2	CLASE 3	
APROBADOS	6	22	3	31
NO APROBADOS	4	4	0	8
	10	26	3	39

Clase 1 se consideraron los puntajes hasta 7.

Clase 2 se consideraron los puntajes hasta 13.

Clase 3 se consideraron los puntajes hasta 18.
La estadística U de Pearson dio 3,5226 que corresponde a una significación de 0,1718 lo que implica que no se rechaza que el puntaje del test y el hecho de aprobar o no el curso sean independientes, por lo que podemos concluir que no hay asociación entre los factores considerados.

9) Resumen de cursos aprobados o no según puntaje del test de diagnóstico teniendo en cuenta únicamente los items de Lógica en la muestra correspondiente a los alumnos que cursaron Lógica en la Facultad de Ingeniería y Tecnologías.

	CLASE 1	CLASE 2	CLASE 3	
APROBADOS	2	16	13	31
NO APROBADOS	2	4	2	8
	4	20	15	39

Clase 1 se consideraron los puntajes hasta 1.

Clase 2 se consideraron los puntajes hasta 3.
Clase 3 se consideraron los puntajes hasta 6.
La estadística U de Pearson dio 2,6105 que corresponde a una significación de 0,2711 lo que implica que no podemos rechazar que el puntaje del test en ítems de lógica y el hecho de aprobar o no el curso sean independientes, por lo que podemos concluir que no hay asociación entre los factores considerados.

Anexo III

Índices de dificultad y discriminación de los ítems de la prueba

	Dificultad	Discriminación
Item 1	42,86%	50,00%
Item 2	81,25%	33,93%
Item 3	54,46%	26,79%
Item 4	25,89%	41,07%
Item 5	70,54%	51,79%
Item 6	67,86%	46,43%
Item 7	75,89%	41,07%
Item 8	45,54%	48,21%
Item 9	33,93%	53,57%
Item 10	55,36%	75,00%
Item 11	17,86%	14,29%
Item 12	36,61%	44,64%
Item 13	49,11%	62,50%
Item 14	62,50%	46,43%
Item 15	58,04%	41,07%
Item 16	86,61%	19,64%
Item 17	76,79%	17,86%
Item 18	48,21%	50,00%
Dificultad Promedio		54,96%
Discriminación promedio		42,46%

EL DOMINIO DE LAS OPERACIONES DE ADICION Y SUSTRACCIÓN CON FRACCIONES

Carmen Valdivé Fernández
Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado, Barquisimeto, Lara.
florca17@hotmail.com

Resumen

El presente estudio tiene como propósito determinar el efecto de la estrategia constructiva diseñada y aplicada para aprender a resolver operaciones de adición y sustracción con fracciones. Surge como una secuencia del trabajo de Vargas (2000) quien implementó una estrategia de diversificación de contextos representacionales para la enseñanza del concepto de fracción al mismo grupo experimental, trabajando con los contextos parte todo continuo, expresión verbal, a/b, expresión decimal, porcentaje, parte todo discreto, y recta numérica. La estrategia constructiva aplicada para las operaciones consistió en 9 sesiones de clases, una de concreción y las restantes para resolver situaciones del campo experiencial del alumno, en las que se relacionaban los diversos contextos de una fracción. Los resultados de este estudio demuestran que hubo riqueza de transferencia de contexto, presente en el desempeño de los alumnos del grupo experimental. La más frecuente fue la fracción como a/b, seguida de la expresión decimal. Todo esto ratifica la propuesta teórica de Duval (1993), de que la coordinación entre los registros (espontaneidad en la actividad de conversión y potencia de las transferencias alcanzadas por este grupo en el trabajo de Vargas) produjo rapidez en las actividades de tratamiento.

Antecedentes

La estrategia metodológica constructiva diseñada y aplicada en este estudio se elaboró tomando en cuenta el contenido de varios autores, entre los que podemos destacar Resnick (1987), de quien se consideró el análisis sobre el desarrollo de los conceptos matemáticos, análisis que estima relevantes los tipos de esquemas protocuantitativos de la parte y el todo, ya que permite a los niños entender estas relaciones -y por ende, la composición aditiva-, crear estrategias que los involucran en el conteo, y llevarlos a adquirir el concepto de adición y sustracción de una manera natural, por lo que estos esquemas pueden ser utilizados posteriormente en la enseñanza del concepto de fracción y de las operaciones con ellas.

El conteo y las operaciones aritméticas de adición y sustracción

En la edad escolar, el desarrollo conceptual del niño lo analizó Resnick (1983) a través de las estrategias que inventan los niños para hacer aritmética, específicamente para sumar o restar de una manera intuitiva:

a) Cuentan objetos reales (los dedos de las manos).
b) Crean conjuntos para la suma y los combinan para luego contar.
c) Para la resta, cuentan el conjunto inicial, sacando de dicho conjunto el número de objetos especificados y luego vuelven a contar.
d) El conteo mental.

Por otro lado Greenes, Schulman, L. y Spungin, R. (1993) indican que hay por lo menos siete habilidades de sentido de número que deberán ser desarrolladas en la escuela básica:

a) Reconocer los diversos usos de los números: algunos números son apropiados en algunas situaciones pero no en otras, y los estudiantes deberían reconocer qué tipo de número está relacionado a un contexto.
b) Reconocer la adecuación de los números: los estudiantes deberán ser capaces de juzgar cuáles números son más apropiados para describir algunas materias (el número que describe el porcentaje de agua en un jugo de naranja, no puede ser mayor de 100).
c) Estimar resultados de cálculos: estimar sumas, diferencias, productos y cocientes es útil para comprobar el resultado.
d) Identificar relaciones entre números y entre medidas: identificar que 36 es múltiplo de 6 y que en términos de medida, reconocer que mil metros es igual a un kilómetro y que una hora es igual a sesenta minutos.
e) Reconocer conjuntos y subconjuntos o relaciones parte-todo: reconocer relaciones parte-todo, facilita la toma de decisiones cerca de la magnitud de los números.
f) Comprender frases que establecen relaciones matemáticas también como relaciones temporales.
g) Asociar números de varias magnitudes con objetos, eventos y situaciones reales.

Por su parte, Mosquera (1995) cita una serie de investigadores que han centrado su atención en el estudio de los procesos de conteo y sus implicaciones en el desarrollo de los conceptos de adición y sustracción tal como lo hizo Resnick (1983), a saber: Houliham y Ginsburg en 1981, Moser y Carpenter en 1982, Secada, Fuson y Hall en 1983, Ibarra y Lindval en 1982, Behr y Wheeler en 1981. Estos autores destacan el proceso evolutivo del conteo de los niños así como la habilidad que poseen éstos para resolver problemas de adición y sustracción antes de cualquier estudio formal.

En el campo de las fracciones no existen parámetros tan claros como los descritos anteriormente para el concepto de número y las operaciones de adición y sustracción; existe una marcada complejidad en la construcción conceptual del concepto de fracción y por ende el de las operaciones con ellas. Los niños necesitan de experiencias que construyan sobre su conocimiento informal de las fracciones, antes de ser instruidos en los símbolos o representaciones del concepto de fracción.

Sin embargo, Sánchez y Llinares (1988) encuentran que la interpretación más natural para los conceptos de suma y resta con fracciones (similar a la asimilación natural de las operaciones de adición y sustracción con números naturales), es el aspecto medida caracterizado a través de la relación parte todo, sugiriendo utilizar el modelo de la recta numérica para vincular las interpretaciones parte todo, medida y fracción como símbolo (número). Teniendo en cuenta la familiaridad entre algunas interpretaciones y algunas operaciones es conveniente secuenciar el uso de las fracciones unitarias y el contar, a través de situaciones problemáticas.

Así mismo, siendo una fracción un número, se han de considerar las sugerencias de Greenes, Schulman y Spungin (1993) sobre las habilidades relativas al sentido del número que deben desarrollarse en el niño (sus usos, su adecuación, sus relaciones, la estimación) ya que ellas se pueden trasladar a la enseñanza del concepto de fracción, utilizando la estrategia propuesta por Sánchez y Llinares (1988) y ampliada por Vargas (2000), quien -en concordancia con Duval (1993)- aplica actividades cognitivas ligadas a la semiosis como lo es la actividad de conversión, que permite transformaciones entre diversos registros, bajo el supuesto de la necesidad de coordinar diversas representaciones semióticas (al menos dos) que debe manifestarse en:

a) La rapidez en las actividades de tratamiento
b) Espontaneidad en la actividad de conversión
c) La potencia de las transferencias

Vargas (2000) condujo un estudio sobre la aplicación de una estrategia denominada "Diversificación de los contextos representacionales de una fracción" a estudiantes de 6° grado con edades comprendidas entre 11 y 13 años. Esta estrategia contemplaba los siguientes contextos representacionales:

a) Parte todo continuo (PTC)-Expresión Verbal (EV)- Expresión simbólica (a/b)
b) Expresión decimal.
c) Porcentaje (%)
d) Parte todo discreto (PTD)
e) Recta Numérica

El autor enfatizó el trabajo con objetos concretos y prestó atención particular a la traslación entre las diferentes representaciones, tomando en un primer momento como eje los modelos concretos y luego, en una segunda fase, los diagramas. Inició la secuencia de instrucción con el contexto parte todo continuo, expresión verbal escrita y expresión simbólica. Realizó divisiones de un todo (hojas de papel) en partes iguales según el siguiente orden de fracciones: La familia de medios, cuartos y octavos .Luego haciendo dobleces, construye la familia de los tercios, sextos y novenos y finalmente, la familia de quintos y décimos.
Una vez aplicada esta estrategia al grupo experimental, éste logró superar al grupo al que se aplicó la estrategia tradicional, aún en los ítems relativos a los contextos parte todo continuo y símbolo, que eran comunes a ambas estrategias (tradicional y diversificación de contextos), corroborando con esto lo planteado por Duval (1993), pues se logró la conceptualización de la fracción debido al uso de los registros de representación, y a la realización de actividades de tratamiento y conversión. Sin embargo, la estrategia tradicional no desarrolló las habilidades necesarias para abordar los ítems donde había que aplicar el concepto de fracción.

Metodología

El presente estudio (Valdivé, 2000) surge como una extensión del trabajo de Vargas (2000), utilizándose la misma población (29 alumnos de sexto grado de una escuela básica de Cabudare, Venezuela, con edades comprendidas entre 11 y 13 años) para el desarrollo de la estrategia constructiva diseñada para enseñar a sumar y restar fracciones.
La secuencia de instrucción se desarrolló siguiendo las teorías de la Estrategia Didáctica Mediadora, pues toma las propuestas teóricas de la teoría cognoscitiva de procesamiento de información, el constructivismo, la psicología humanista y la

neurociencia (Ruiz, 1988).También se tomaron en cuenta los aportes de Flores (1994) quien menciona algunas condiciones necesarias para potenciar la enseñanza constructiva y, finalmente, un análisis didáctico efectuado en relación al constructivismo (García y García, 1989; Neale, Smith y Johnson, 1990; Stanbridge, 1990) con el fin de articular una alternativa metodológica para la enseñanza.
La Estrategia Metodológica Constructiva utilizada en este estudio para resolver problemas de adición y sustracción con fracciones aplicando transferencia de contextos se operacionalizó en dos fases: la primera se desarrolló en mes y medio antes de aplicar el tratamiento y cubrió una sesión de clase de 2 horas para aplicar el pretest y 5 semanas para reconstruir la estrategia. En estas semanas se consultó al profesor titular del grado acerca de la secuencia de los objetivos de las otras asignaturas que se iban a desarrollar paralelamente al tratamiento y las demás actividades planificadas para el grado. En la segunda fase (mes y medio después) se desarrolló la estrategia constructiva durante 9 sesiones de clases de 2 horas cada una. El objetivo de la primera sesión fue realizar transferencias entre los contextos representacionales de una fracción, utilizando material concreto y la secuencia del trabajo de Vargas (2000).

Resultados

Al término de la instrucción se aplicó una prueba final compuesta por diez ítems. Los resultados obtenidos por los 29 alumnos del grupo experimental y control se presentan en la siguiente tabla, la cual muestra distribución del número de respuestas por ítems:

Grupo Experimental Grupo Control

Item	C	%	I	%	O	%	C	%	I	%	O	%
1	20	68,9	6	20,6	3	24,1	0	0	24	82,7	5	17,2
2	24	82,7	3	10,3	2	6,9	4	13,8	20	68,9	5	17,2
3	18	62,1	11	37,9	0	0	21	72,4	7	24,1	1	3,4
4	28	96,5	1	3,4	0	0	6	20,6	23	79,3	0	0
5	22	75,8	5	17,2	2	6,9	20	68,9	8	27,6	1	3,4
6	21	72,4	6	20,6	2	6,9	2	6,9	20	68,9	7	24,1
7	26	89,6	0	0	3	10,3	2	6,9	18	62,1	9	31
8	17	58,6	9	31	3	10,3	0	0	18	62,1	11	37,9
9	25	86,2	4	13,8	0	0	14	48,3	14	48,3	1	3,4
10	13	44,8	14	48,3	2	6,9	2	6,9	8	27,6	19	65,5

Además, se presentan en la siguiente tabla las frecuencias de las diversas transferencias de contextos que dieron los alumnos del grupo experimental, por ítem:

Contextos/Items	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Total
Símbolo (a/b)	4	1	16	0	15	0	6	7	19	2	70
Expresión Decimal	4	0	2	0	6	8	0	0	1	0	21
%, a/b y PTC	0	0	0	7	0	0	11	0	0	0	18
a/b y Exp. Dec.	12	0	0	0	0	0	0	0	5	0	17

% y PTC	0	0	0	16	0	0	0	0	0	0	16
a/b y %	0	10	0	0	1	0	0	0	0	3	14
PTC	0	0	0	4	0	0	5	0	0	4	13
PTD	0	1	0	0	0	8	0	4	0	0	13
%, a/b y PTD	0	9	0	0	0	0	0	0	0	0	9
%	0	1	0	1	0	3	0	0	0	4	9
a/b y PTD	0	0	0	0	0	0	2	4	0	0	6
% y PTD	0	2	0	0	0	2	0	0	0	0	4
a/b y PTC-EV	0	0	0	0	0	0	2	2	0	0	4
Pto. en la Recta	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Totales	20	24	18	28	22	21	26	17	25	13	214

Las tablas indican las respuestas correctas©, incorrectas (I) u omitidas(O).Los resultados de este estudio demuestran que hubo riqueza de transferencia de contextos, presentadas en las respuestas de los alumnos del grupo experimental. La más frecuente fue la fracción como símbolo (70 veces), seguida de la expresión decimal (21 veces). Se pudo detectar que la expresión decimal sólo se asocia como respuesta con el símbolo (17 veces) y no lo hace con ningún otro contexto, ni siquiera con el de porcentaje, a pesar de su aparente afinidad.

La investigación arrojó que ningún alumno utilizó la transferencia hacia el contexto fracción como punto en la recta para dar la respuesta en ningún problema, de lo que se infiere que este contexto debe plantearse en su enseñanza de manera diferente, o bien no es en esta edad o grado donde deba mediarse, ya que implica nociones de geometría (conmensuración), área casi ignorada en el aula. Se pudo detectar que el algoritmo habitual –en el contexto simbólico- no funciona, porque no se enseña en relación con algún contexto socio-cultural y, así, el alumno no llega a la resolución de los problemas.

Los datos permiten también efectuar un análisis pormenorizado de los tipos de respuestas correctas obtenidas en cada uno de los items propuestos, se da un ejemplo.

Item 2: En un salón de clases de 35 alumnos, las dos quintas partes pertenecen a la Brigada de Orden y el 20% a la Sociedad Bolivariana.¿Cuántos alumnos intervienen en cada una de estas actividades?¿Qué fracción representa la cantidad de alumnos que no pertenecen a la Brigada de Orden?

Tipo 1: 1/5

7	7	7	7	7

20% 20% 20% 20% 20% **7 alumnos de la Sociedad Bolivariana**

14 alumnos de la Brigada de Orden

3/5 no pertenecen ala Brigada de Orden.

Tipo 2:

En la Brigada de Orden el 40% que son 14 alumnos.

En la Sociedad Bolivariana el 20% que son 7 alumnos.

No pertenecen a la Brigada de Orden el 60%.

Tipo 3:

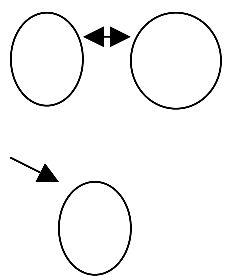
---------	--------			

2/5 Brigada de Orden 14 alumnos.
1/5 Sociedad Bolivariana 7 alumnos.
21 alumnos no pertenecen a la Brigada de Orden.

Tipo 4:
2/5 + 20% = 40/100 + 20% = 0,4 + 20% = 0,4 + 0,2 = 0,6 = 60%
2/5 es 14 alumnos y 1/5 son 7 alumnos.
21 alumnos no pertenecen a la Brigada de Orden.

Tipo 5:
40% a la Brigada de orden y 20% o sea 1/5 a la Sociedad Bolivariana
La fracción de los que no pertenecen a la Brigada de Orden son 3/5 y en porcentaje 60%.

Tipo 6:
a) 2/5 de 35 es 14



1/5 de 35 es 7

21 alumnos no pertenecen a la Brigada de Orden.
b) 2/5 de 35 es 14   y 7 alumnos a la Sociedad Bolivariana.

Tipo 7:
a) 35 . 2/5 = 70/5 = 14 ; 35 .1/5 = 35/5 = 7 Por lo que 3/5 no pertenecen a la Brigada de Orden.

Conclusiones

Este estudio demostró que la Estrategia Constructiva logró que el estudiante sea un sujeto activo en el proceso enseñanza-aprendizaje, ya que logró seleccionar los contextos representacionales de una fracción en cada uno de los problemas del instrumento, recordar el concepto de fracción en cada uno de ellos, integrar y organizar para combinarlos y poder resolver la suma o resta que se les estaba planteando, dando la fracción suma o diferencia en el contexto que para él tenía significado, aún cuando no se le estuviese pidiendo en el problema. Finalmente, cuando al dar estas respuestas lo hacía en diversos contextos como se muestra en el análisis de los tipos de respuestas en el item 2, mostrando con ello la comprensión del concepto que se estaba mediando. De este modo, se ratificó la propuesta teórica de Duval (1993), que la coordinación entre los registros (espontaneidad en la actividad de conversión y la potencia de las transferencias alcanzadas por este grupo en el trabajo de Vargas) produjo rapidez en las actividades de tratamiento.
Se recomienda complementar la estrategia presentada, con actividades de tipo algorítmico una vez se haya comprendido el concepto de suma y resta de fracciones, a

fin de que el estudiante tenga las dos modalidades de estrategia y pueda desenvolverse ante cualquier situación que se le presente en la vida diaria escolar. También se sugiere seguir esta investigación, utilizando fracciones en las que los denominadores no sean múltiplos ni primos entre sí, a fin de completar el diseño. Por último, se recomienda indagar acerca de la transferencia de la fracción decimal a porcentaje, ya que en las respuestas dadas por los alumnos no se asocian estos contextos, a pesar de su aparente afinidad.

Bibliografía

Carpenter, T., Moser, J. (1983). The Acquisition of Addition and Subtraction Concepts. En: R. Lesh, M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*, p. 7-39. New York, Academic Press.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et functionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et des Sciences Cognitives,* 5, 37-65. Strasbourg, IREM.

Flores, R. (1994). *Hacia una Pedagogía del Conocimiento.* McGraw-Hill, Colombia.

Garcia, J.E., Garcia, F..F. (1989). *Aprender investigando.* Sevilla, Díada.

Greenes, C., Schulman, L., Spungin, R. (1993). Developing sense about numbers. *Arithmetic Teacher*, 40, 5, 9-28.

Mosquera, J. (1995). Investigación en Matemáticas Básicas. Selecciones del Arithmetic Teacher, Research into Practice. Caracas, Autor.

Neale D.C., Smith D., Johnson V.G. (1990). Implementing conceptual change-teaching in primary science. *The Elementary School Journal,* 91, 2, 109-131.

Resnick, L.B. (1983). Learning complex concepts: The case of decimal fractions. *Paper presented at the 24th annual meeting of the Psychonomies Society*. PS, San Diego.

Resnick, L.B. (1987). Learning to understand arithmetic. En: R. Glaser (Ed.), *Advances in instructional psychology, Vol. 3,* p. 41-95.

Ruiz, C. (1988). La Estrategia Didáctica Mediadora: Una alternativa para el desarrollo de procesos en el aula. *Investigación y Posgrado,* Vol. 3, Nº 2, 57-73.

Stanbridge, B. (1990). A constructivist model of learning used in the teaching of junior science. *The Australian Science Teachers Journal*, 36, 4, 20-28.

Sanchez, V. Y Llinares, S. (1988). *Fracciones. La relación parte-todo*. Madrid, Síntesis.

Szczurek, M. (1978). La Estrategia Instruccional. Trabajo que propone un modelo para planificación de la Estrategia Instruccional. Autor, Mimeo.

Valdivé, C. (2002). *El dominio de las operaciones de adición y sustracción con fracciones*. . Barquisimeto, Maestría Interinstitucional en Matemática (Trabajo de Grado).

Vargas, A. (2000). Efecto del uso de la diversificación de contextos representacionales en el aprendizaje del concepto de facción. Barquisimeto, Maestría Interinstitucional en Matemática (Trabajo de Grado).

EVENTOS MUTUAMENTE EXCLUYENTES Y EVENTOS INDEPENDIENTES: CONCEPCIONES Y DIFICULTADES

Adriana D'Amelio de Tari
Universidad Nacional de Cuyo, Argentina
adamelio@fcemail.uncu.edu.ar

Resumen

El presente trabajo tiene como objetivo profundizar en el estudio y caracterización de los errores en estudiantes de nivel superior acerca de los conceptos de eventos mutuamente excluyentes e independientes. Ciertamente observaciones previas de actitudes y respuestas a exámenes en los alumnos de nivel universitario que aprueban un primer curso de Estadística, han detectado confusiones entre eventos mutuamente excluyentes e independientes, e indicado algunas de las ideas espontáneas que tienden a elaborar acerca de ambos conceptos en las diferentes situaciones en las que esta noción entra en juego .En primer lugar es usual que asocien eventos ajenos a eventos independientes. En segundo lugar la independencia se confunde con experiencias independientes, sin que se explicite la diferencia entre ambas nociones. En tercer lugar la confusión se debe a la causalidad. Si bien el concepto de eventos independientes y mutuamente excluyentes es aparentemente sencillo, las ideas espontáneas de las personas dan lugar a respuestas equivocadas. Aquí entra en juego la relación entre la realidad y el objeto matemático puesto en juego. En este trabajo se analizan las concepciones erróneas del sujeto frente a determinadas situaciones, cuando se ha tenido acercamiento a discusiones de la definición del concepto de eventos independientes y mutuamente excluyentes en un curso de probabilidad, qué tan persistentes son esas ideas, qué ocurre en el proceso en el que el sujeto confronta sus concepciones erróneas con los resultados de la aplicación de los conceptos teóricos, con el fin de proporcionar elementos para su mejor tratamiento e implementación en la enseñanza.

Introducción

En estadística el problema parte de la realidad y para el alumno es un problema relacionar la realidad con el objeto matemático. Ernesto Sánchez dice: "en educación cabe preguntarse en qué condiciones y cómo un sujeto cambia una concepción, una creencia , una intuición o idea espontánea sobre una situación determinada , en virtud de la utilización de un instrumento científico". Ante esto y como es común en un curso de probabilidad es muy fácil confundir el concepto de eventos mutuamente excluyente con el de eventos independientes, según Sánchez E. (tesis doctoral sobre eventos independientes) el problema surge de:

la creencia que eventos independientes son lo mismo que eventos ajenos

la confusión entre eventos independientes y experiencias independientes.

Además se interpreta la independencia como algo sólo cuantitativo comprobado por la regla del producto.

Estos conceptos son sencillos o aparentemente simples en su definición, pero sin embargo la confusión persiste en los alumnos universitarios que toman un curso de Estadística 1. El fenómeno se da en carreras matemáticas y no matemáticas.

Este trabajo pretende entender las confusiones entre eventos mutuamente excluyentes e independientes con el fin de proporcionar elementos para su mejor tratamiento e implementación en la enseñanza.

Problema de Investigación

En primer lugar es usual la confusión que asocia ajeno a independientes, y ya se sabe que sólo si uno de ellos es vacío se verifican ambas cosas.
En segundo lugar el concepto de eventos independientes se da cómo una pareja de eventos definida mediante la regla condicional o la regla del producto y en el caso en que la probabilidad sea cero y no necesariamente el evento sea vacío, da lugar aplicando la regla del producto a pensar que se verifica la independencia.
En tercer lugar la independencia se confunde con experiencias independientes. Sin que se expliciten la diferencia entre ambas nociones.
En cuarto lugar como dice Sánchez en su tesis la confusión se debe a la causalidad.
El problema empieza en probabilidad que siempre ha sido considerada por los docentes en su experiencia de dictado un tema difícil de entender de parte de los alumnos Si bien el concepto de eventos independientes y mutuamente excluyentes es aparentemente sencillo las ideas espontáneas de las personas dan lugar a respuestas equivocadas.
Estas preconcepciones han tenido interés en investigadores tanto en psicología cómo en didáctica. Es por eso que de las preguntas de (Hawkins, A. Kapadia, R., 1984, p.351) he seleccionado las siguientes:
¿Cuáles son las relaciones entre las concepciones subjetivas o intuitivas y aquellas concepciones que son transmitidas en el salón de clases y que constituyen el conocimiento formal de probabilidad?
¿Hay técnicas de enseñanza y aprendizaje óptimas que tomen en cuenta las concepciones espontáneas de las nociones de probabilidad de los sujetos mientras que desarrollan su conocimiento formal?
Ciertamente observaciones previas de actitudes y respuestas a exámenes nos han indicado algunas de las ideas espontáneas que tienden a elaborar acerca de eventos independientes y mutuamente excluyentes en las diferentes situaciones en las que esta noción entra en juego, pero no se sabe en detalle que relación guardan estas concepciones con las definiciones formales.
Según las preguntas de Sánchez. E. pag 11.
¿Qué pasa con las concepciones erróneas del sujeto sobre independencia frente a determinadas situaciones, cuando se ha tenido acercamiento a discusiones de la definición del concepto de eventos independientes y mutuamente excluyentes en un curso de probabilidad?
¿Qué ocurre en el proceso en el que el sujeto confronta sus concepciones erróneas con los resultados de la aplicación de los conceptos teóricos?
Los sujetos adjudican a la situación un contexto, convocado por la palabra independencia, en donde incluyen elementos a experiencias perceptivas o empíricas: relaciones de incidencia en el primer caso, relaciones temporales en el otro.

Marco Teórico

El estudio de las concepciones de los alumnos sobre los hechos ha sido motivado en gran medida, por el fracaso que sistemáticamente han tenido en materias científicas. Cornu (1983) denomina concepciones espontáneas de una idea matemática al conjunto de intuiciones, imágenes y conocimientos que se forman en el sujeto a partir de su experiencia diaria y a partir del significado coloquial que poseen los términos utilizados en la expresión formal de la idea matemática, estas concepciones espontáneas se forman con anterioridad a los procesos formales de enseñanza. Szydlik (2000), por su parte, se refiere a creencias sobre contenidos y sobre fuentes de convicción. Para esta autora, las creencias son presunciones personales acerca de la naturaleza de la realidad, que orientan la actividad individual en la búsqueda de las metas propuestas. Probablemente el mejor marco teórico para ubicar estas concepciones, modelos o creencias de los alumnos es el referido a los obstáculos epistemológico. Bachellard (1987) introdujo esta expresión al escribir: “El problema del conocimiento científico debe proponerse en términos de obstáculos. ....Es en el propio acto de conocer, íntimamente, cuando aparecen, por una especie de necesidad funcional, los retardos y las dudas. Ahí es donde encontramos las causas de la paralización e incluso del retroceso, donde descubrimos las causas de la inercia, que llamaremos obstáculos epistemológicos” (p.13). El planteamiento de Bachelard en el comienzo de su obra *La formación del espíritu científico* es sobre la noción de obstáculo epistemológico para la explicación de la aparición inevitable de errores en los estudiantes. :

“En el acto mismo de conocer, íntimamente, es donde aparecen, por una especie de necesidad funcional, los entorpecimientos y las confusiones; es ahí, donde discerniremos causas de inercia que llamaremos obstáculos epistemológicos.”

“La noción de obstáculo epistemológico puede ser estudiada en el desarrollo histórico del pensamiento científico y en la práctica de la educación”

La noción de obstáculo epistemológico y las sucesivas tipificaciones y caracterizaciones de la misma, se han utilizado cómo clave para el estudio, sistematización, análisis y explicación de los errores que se presentan en el pensamiento científico.

Brousseau (1983) precisa por su parte que un obstáculo epistemológico es un conocimiento que funciona exitosamente en un determinado dominio de actividad, pero no así en otros a los que se intenta trasponer y en los que conduce a errores y contradicciones. Percibir con claridad ese conocimiento y rechazarlo es una parte esencial del propio conocimiento.

Historia y epistemología

Steinbring analiza el desarrollo histórico de la independencia estocástica en una perspectiva epistemológica, con el fin de encontrar elementos para una perspectiva didáctica. En el desarrollo histórico se es testigo de una inversión del contenido del concepto y de su definición matemática. El desarrollo debería ser organizado en una relación permanente entre lo matemático y la realidad.

La dificultad en el caso de la independencia, es poner de acuerdo dos concepciones en contraposición. Por una parte, hay una definición matemática teórica:

Sea (Ω ,*A, P)* un espacio de probabilidad. Los sucesos A, B pertenecientes a Ω son independientes sí y sólo sí: $P(A \cup B) = P(A) . P(B)$

Por otra parte hay numerosas representaciones intuitivas, fundamentadas sobre las experiencias más diversas, que hacen decir qué observaciones resultados de experiencias, fenómenos, etc, son independientes unos de otros.

Mark Kac ha insistido sobre la relación entre definición matemática y representación intuitiva de la independencia.

Von Mises (1964, p.38) objeta la definición formal de independencia alegando que en la teoría axiomática de Kolmogorov hay acontecimientos que son independientes pero que no pueden en ninguna forma sentirse como independientes unos de otros, en un sentido intuitivo como " no se influencian " o " son diferentes unos de otros": "Cuando se consideran dos caracteres que se influencian o no, se da un sentido a la noción de independencia. Sin embargo, una definición basada en la regla de la multiplicación no es mas que la generalización debilitada de un concepto lleno de significado" .

Ese problema de la inversión del contenido y de la definición matemática juega un papel importante en la enseñanza. En algunos libros aparece la deducción de la fórmula de independencia, por el sesgo de las probabilidades condicionales. Esto genera consideraciones de analogía con la incompatibilidad y el teorema de la adición.. Engel ha constatado que, para las aplicaciones, la independencia no es definida (por la regla de la multiplicación) sino postulada.

Boge dice: " La dificultad reside en la traducción entre matemática y realidad."

Estas dificultades aparecen también en el desarrollo histórico del concepto.

Desde la antigüedad con los juegos de azar surge la noción de independencia. la teoría de las probabilidades se presenta en forma concisa, explicaban matemáticamente la probabilidad (casos favorables sobre casos posibles); y en ese marco se derivaban las reglas más importantes de la teoría de las probabilidades, el teorema de la adición, el de la multiplicación, los conceptos de probabilidad condicional y de independencia.

La independencia surge en los juegos de azar en los tiros "sin reposición" dados por de Moivre (1718 / 1756) y por Bayes (1763).

El concepto de independencia que estaba en juego se concebía sólo en el contexto de experiencias independientes y se constata en las definiciones de los autores clásicos como De Moivre(1756):

"Dos eventos son independientes cuando no tienen conexión uno con el otro y lo que ocurra en uno ni fomenta ni obstruye la ocurrencia del otro"

"Dos eventos son independientes cuando están conectados de manera que la probabilidad de que ocurra cualquiera de ellos es alterada por la ocurrencia del otro"

Expone el siguiente ejemplo:

Suponga que hay una pila de 13 cartas de un color (pinta)y otra de 13 cartas de otro color .

¿Cual es la probabilidad de que tomando una carta al azar de cada mazo tomemos los dos ases?

"tomar o no tomar de la primera no tiene ninguna influencia en tomar o no tomar en la segunda [...] por lo tanto siendo los dos eventos independientes, la probabilidad de ocurrencia de ambos será (1/13). (1/13)".

Laplace no define de manera explícita los eventos independientes da por conocido lo que son y enuncia sus propiedades (1788).

Lo que se debe marcar en esta etapa la extracción con reposición y sin reposición que representan respectivamente, el caso de independencia y dependencia de sucesiones de pruebas. En la actualidad se presentan dificultades derivadas de estas concepciones de los autores clásicos.

Feller (1983) comenta:

Generalmente, en la práctica se tiene la intuición correcta de que ciertos eventos deben ser estocásticamente independientes, pues, de no ser así, el modelo probabilístico sería absurdo. Sin embargo [...] existen situaciones en las cuales la independencia estocástica se descubre sólo por los cálculos. (pág.137)

Turán-Turán (1996) dice: la dificultad se debe a que en la primera definición se consideran dos o más experimentos aleatorios, mientras que la definición actual en textos elementales sólo considera eventos de un mismo espacio muestral, generalmente asociados a un solo experimento.

Con el análisis anterior podemos ver que existen obstáculos epistemológicos que persisten en la actualidad en la sala de clases.

Colección de concepciones espontáneas en alumnos

Las siguientes concepciones fueron extraídas de cuestionarios de probabilidad resueltas por alumnos de carreras humanísticas que cursan Estadística. Ejemplo:

Un estudio de la conducta después del tratamiento de un gran número de drogadictos, sugiere que la reincidencia dentro de los dos años siguientes al tratamiento podía depender de la clase socio-económica a la cual pertenece dada en la siguiente tabla de contingencia:

		Condición dentro del período de dos años después del tratamiento	
		Reincide®	No reincide(NR)
Clases Socio-Económicas	Superiores (S)	10	50
	Inferior (I)	30	10

a) ¿Cuál es la probabilidad de que éste reincida y sea de clase superior?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que pertenezca a la clase socio-económica I o no reincida?
c) Son los sucesos R y S independientes? Justifique.
d) Si el entrevistado que se selecciona pertenece a la clase socio-económica superior, cuál es la probabilidad de que reincida?
e) Son los eventos R y S mutuamente excluyentes? Justifique con la definición.

Estas fueron las respuestas de algunos alumnos a las preguntas c y e:

1) c) No porque dos eventos son independientes porque cuando ocurre S no modifica para que ocurra R
   e) No son mutuamente excluyentes porque ocurre el evento S, no puede ocurrir el evento R. $S \cup R = \emptyset$
2) c) No porque la ocurrencia de uno depende de la ocurrencia del otro
   e) No porque tienen elementos en común
3) c) justifica con $P(S \cup R) \neq P(S)$. P®
   e) no son mutuamente excluyentes porque son distintos $S \neq R$
4) c) No porque influye sobre el total
   e) Varía el total
5) c) no son independientes porque no son iguales
   e)son porque no ocurren simultáneamente

6) c) No son ya que la intersección no es vacía
   e) R y S son mutuamente excluyentes porque no pueden ocurrir simultáneamente $S \cup R = \varnothing$

7) c) No son independientes porque no se cumple la regla P (S∪R) = P(S) . P®.
   e) Son mutuamente excluyentes porque no hay intersección entre S y R

Sólo 8 alumnos contestaron los items c) y e) bien aplicando la fórmula.
Observaciones:

- Se pudo observar que gran parte de los alumnos confundieron la regla de la multiplicación, con la regla de la adición queriendo demostrar la independencia.
- Generalizaron otros la regla de la multiplicación considerando que todos los sucesos
- son independientes P (A∪B) = P(A)P(B)

Cabe destacar que en ninguno de los casos usaron la condicional P(A/B) = P(A) para demostrar la independencia
En el caso de las justificaciones de eventos mutuamente excluyentes se detectó el error de P (A∪B) = ∅

Sugerencias
Mostrar al alumno la diferencia entre eventos independientes y experiencias independientes, y no asociar la independencia a sucesión de extracciones "con reposición".
Indicar que sólo los eventos son mutuamente excluyentes e independientes si uno de ellos es un suceso imposible (∅).

Conclusión
Se ha demostrado que las dificultades y confusiones de los conceptos de eventos mutuamente excluyentes e independientes persisten en los alumnos. Hemos visto que los conceptos surgen en los juegos de azar y siguen una relación más compleja del cálculo de probabilidades. Se debería contemplar que una posible causa de tales confusiones es la falta de referentes adecuados para tratar estos temas, proponiendo situaciones adecuadas para los objetivos de los cursos introductorios de probabilidad y estadística.

Bibliografía
Feller, W. (1950) An Introduction to probability Theory and its Aplications Vol.1) (1975*) Introducción a la teoría de probabilidades y sus aplicaciones. Vol 1*. Limusa . México.
Guzmán I."*Fundamentos Teóricos de la Didáctica de las matemáticas*" (1999) Lecciones para un curso del Programa de Magister ECDIMAT (Magister en Enseñanza de las ciencias con mención en Didáctica de la Matemática.
Hernández R. Joffre M (2000) C*oncepciones de los estudiantes de educacion superior acerca de la nocion de limite* .Tesis de Magister en Matemática,Mención Enseñanza de la Matemática República bolivariana de Venezuela Ucla-Upel-Unexpo
Kilpatrick J., Gómez P., Rico, L. .(1995). *Educación Matemática* Grupo Ed. Iberoamericana.
Sánchez, E. (1996) Conceptos teóricos e ideas espontáneas sobre la noción independencia estocástica en profesores de bachillerato: Un estudio de casos. Tesis de Doctorado, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

Sánchez, E(1996) *Dificultades en la comprensión del concepto de eventos independientes* . In F. Hitt (ed) Investigaciones en Matemática Educativa. (pp.389-404) Grupo Ed. Iberoaméricana .Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav- IPN, México.

Sánchez, E (2000) Investigaciones Didácticas sobre el concepto de eventos independientes en probabilidad. Recherches en Didactique des Mathématics, Vol. 20 Nº3,pp. 305 - 330 .2000.

Sánchez, E, Teaching Independence and Conditional Probability.

Steinbring, H. (1986) L´Independance Stochastique. Recherches en Didactique des Mathématiques, 7(3), 99-118.

LA COVARIACIÓN DE PROGRESIONES EN LA RESIGNIFICACIÓN DE FUNCIONES

Marcela Ferrari Escolá y Rosa María Farfán
Cinvestav, IPN, México
mferrari@mail.cinvestav.mx, @mail.cinvestav.mx

Resumen
En este artículo se aborda la función logaritmo desde una visión socioepistemológica. Se presenta y desarrollan las ideas base para el diseño de secuencias de aprendizaje que respeten la hipótesis de que la covariación entre progresiones, que halla un robusto sustento en el devenir histórico de la noción de función, es un argumento que nos permitirá crear un puente entre la operatividad y la funcionalidad de los logaritmos, es decir, lograr su construcción escolar así como remirar la naturaleza de ciertas funciones.

Introducción

Nuestro trabajo de investigación busca profundizar en la construcción social del conocimiento matemático partiendo de la necesidad de reorganizar la obra matemática con base en la reconstrucción de significados y pensando a la matemática como una actividad humana, por tanto cultural e históricamente determinada, como aspectos básicos a tener en cuenta al estudiar un fenómeno didáctico.

De trabajos como Trujillo (1995), Soto (1988), Confrey (1995, 2000), Lezama (1999), Ferrari, (2001) y de exploraciones con profesores y alumnos, surge la necesidad de profundizar en la problemática de la enseñanza de los logaritmos lo cual nos lleva, de manera natural, a cuestionar modelos de difusión de conocimientos, concepciones, elementos que siendo útiles en determinados momentos perturban en otros niveles, es decir, devienen en obstáculos epistemológicos o didácticos.

La revisión bibliográfica realizada nos permitió localizar una dicotomía entre dos posturas: aquellos que, como Dubinsky (1991, 1992, 2000), supeditan la construcción del logaritmo al de función y aquellos que, como Confrey (1995, 2000), Ferrari (2003) respetan la naturaleza propia de cada función. Por nuestra parte, pensamos que mediante una dialéctica entre ambas posturas e introduciendo como eje la relación entre las progresiones aritmética y geométrica, se podría resignificar el concepto de logaritmos a la par de robustecer el concepto mismo de función.

La problemática que abordamos requiere por tanto de un análisis a profundidad de este fenómeno desde los cuatro polos que consideramos fundamentales, el epistemológico, el didáctico, el cognitivo y el sociocultural, para lo cual se utiliza la Ingeniería Didáctica como metodología de investigación y la Socioepistemología como marco para este trabajo.

Antecedentes

La indagación epistemológica reportada en Ferrari (2001) sobre logaritmos, que pretende dar evidencias de la construcción social de este conocimiento matemático, establece que se pueden distinguir, tres etapas en el desarrollo de los logaritmos si se toma como eje central la relación entre las progresiones aritmética y geométrica, argumento utilizado por Napier para su primera definición.

Como primer momento, se considera a *los logaritmos como transformación*, etapa que se desarrolla antes de su definición formal y que se refleja en las distintas exploraciones en torno a la formulación y extensión de las progresiones y en la búsqueda de facilitar engorrosos cálculos producto de las necesidades sociales de la navegación, artillería y astronomía. Se desarrollan fundamentalmente en el contexto numérico comenzando con ideas intuitivas de transformar para facilitar operaciones intentado regresar a la aritmética, es decir, utilizar sólo sumas y restas. Así, de la confluencia de las primitivas formulaciones de las progresiones y de la relación entre ambas surge la definición de los logaritmos. Los elementos matemáticos utilizados son trabajados, en nuestras aulas, desde los niveles iniciales. La búsqueda de patrones numéricos, la relación entre ellos, la economía de recursos para expresar ideas matemáticas son abordados en las currícula y libros de texto actuales, pero no relacionados y utilizados a la hora de introducir los logaritmos.

Su exploración en otros contextos, producida principalmente en el siglo XVIII, lleva a considerar como segundo momento el de *los logaritmos como modelizadores* pues en esta etapa se determinan sus características geométricas y por tanto logran pertenecer al discurso matemático de principios del siglo XVIII; se les dota de una gráfica al adecuarlos al nuevo registro "algebraico-geométrico" que se estaba desarrollando; logran completar un modelo matemático de la cuadratura de curvas representativas de funciones potencia encontrando otro lenguaje para ser descritos ingresando así en los avatares de un cálculo en plena gestación; permiten describir fenómenos físicos y se descubren nuevas formas para calcularlos a partir de su desarrollo en serie de potencias lo cual les abre las puertas para acceder al discurso matemático del siglo XVIII y adquirir el status de función.

Todos estos argumentos y exploraciones que giran en torno a descubrir las características logarítmicas en distintos contextos mediante el uso explícito de la relación entre progresiones está absolutamente fuera del discurso matemático de nuestros días. Aparece en los libros de difusión de conocimiento del siglo XVII, para desaparecer completamente a partir de las ideas eulerianas y de su vinculación definitiva con las funciones exponenciales mediante el concepto de función inversa.

Comienza así, un tercer momento que se identifica como la etapa de *los logaritmos como objetos teóricos,* conceptos trabajados en la enseñanza actual y que los encuentra escindidos de las argumentaciones dadas anteriormente, las cuales pueden contribuir a dotarlos de un mayor sentido, apartándolos de su tratamiento actual que los reduce a una aplicación algorítmica de sus propiedades apareciendo en el aula sin ningún antecedente analítico que pudieran haber adquirido los estudiantes hasta ese momento.

Esta visión del devenir de los logaritmos como objetos de saber lleva a proponer como hipótesis epistemológica la incorporación en el diseño de las nociones de progresión aritmética y geométrica y su fuerte vinculación con los logaritmos. Se considera entonces, que son elementos que pueden resultar útiles, al igual que en el desarrollo histórico de los logaritmos, para facilitar el pasaje desde las características aritméticas de esta noción hasta las funcionales permitiendo la exploración en distintos registros y su correspondiente vinculación.

Función lineal como relación entre progresiones aritméticas

A partir de las ideas presentadas en los parágrafos anteriores para logaritmos y que pueden profundizarse, para el concepto de función, con la lectura de Youschkevitech (1996) o Farfán (1997) en los cuales el desarrollo de la noción de función es tema central, surge evidente la importancia de la que consideramos como primera instancia de uno de los mecanismos de la construcción social del conocimiento, esto es, su uso. Efectivamente, el concepto "función" no surge espontáneamente dentro de una estructura teórica, sino que conlleva un proceso de evolución en el cual la necesidad de responder a una pregunta surgida, por ejemplo, de las inquietudes por "matematizar" la naturaleza provoca la aparición de ideas preliminares en las cuales se comienza a percibir la que, luego de un largo proceso, se convertirá en pieza fundamental de la estructura teórica de la matemática actual.

En este apartado, retomaremos el tratamiento y uso que en épocas anteriores a la definición formal del concepto de función jugaron un papel interesante en el desarrollo del mismo. Nos referimos a los intentos de describir el movimiento de los cuerpos en el espacio surgidos desde la antigüedad. Entre las primeras formulaciones que encontramos en la literatura científica sobre el movimiento de los cuerpos se hallan las de Galileo quien en su tratado: *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze. Attentin alla Mecanica y Movimenti locali* de 1638 define distintos movimientos, llegando a describir la caída libre de un cuerpo.

Efectivamente, como definición de "movimiento uniforme" hallamos la siguiente sentencia:

> *Por movimiento igual o uniforme entiendo aquel en que los espacios recorridos por un móvil en tiempos iguales, cualesquiera que éstos sean, son iguales entre si* (en Cantoral, 1993, p.15).

El mismo Galileo llega a la definición de "movimiento naturalmente acelerado" luego de exponer la necesidad de describir la caída libre de los cuerpos pesados como esencia del movimiento acelerado. En este sentido, establece:

> *... un móvil que cae partiendo de una situación de reposo recorre, en tiempos iguales, espacios que mantienen entre sí la misma proporción que la que se da entre los números impares sucesivos comenzando por la unidad...* (en Cantoral, 1993, p.14).

Percibimos entonces, en estos primeros intentos por describir matemáticamente el movimiento de los cuerpos en el espacio, ideas que llamaremos de "funcionalidad", es decir, de dependencia o correspondencia entre cantidades, en este caso, espacio-tiempo o velocidad-tiempo.

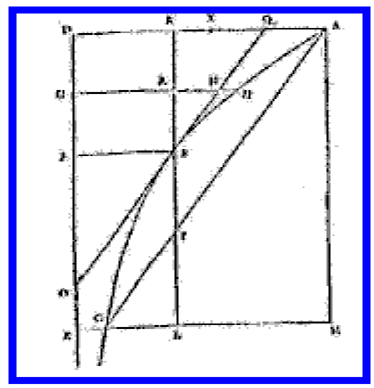
Si analizamos las ideas de Galileo, podemos considerar que la herramienta que utiliza en sus explicaciones es la relación entre las que hoy conocemos como "progresiones aritméticas" es decir, aquellas sucesiones numéricas en las que dos términos consecutivos difieren en una misma constante.

Sistema logarítmico como relación entre progresiones aritméticas y geométricas.

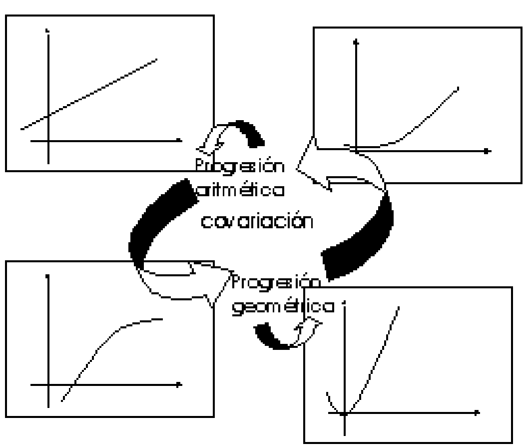
> *Si un cuerpo es resistido en la razón de su velocidad, y se mueve por su sola inercia a través de un medio homogéneo, y los tiempos se toman iguales, las velocidades en el comienzo de cada uno de los tiempos están en una progresión geométrica, y los espacios descritos en cada uno de los tiempos son como las velocidades.*
>
> (Newton, 1993, p. 286)

Hemos visto que para describir ciertos movimientos, tales como el uniforme (velocidad constante) o la caída libre de un cuerpo (aceleración constante), basta con utilizar la relación entre progresiones aritméticas. Sin embargo, para describir el movimiento de un cuerpo cuando entra en juego la resistencia que un medio le ofrece es necesario utilizar otro tipo de progresiones, las llamadas geométricas pues la velocidad del cuerpo va disminuyendo en forma proporcional.
Newton, en el siglo XVIII, intenta describir el movimiento de un cuerpo esférico en un medio que le ofrece resistencia y publica el resultado de estas investigaciones en su tratado: *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (Principios matemáticos de la Filosofía Natural), publicado en 1687.
Por ejemplo, en el *Libro Segundo: El movimiento de los cuerpos (En medios resistentes)* encontramos la Proposición II. Teorema II.
O Huygens que en su tratado sobre la luz establece que.....

... para encontrar los espacios recorridos en ciertos tiempos, cuando caen los cuerpos o suben perpendicularmente, y para conocer las velocidades al cabo de estos tiempos, había una línea curva, que he examinado largo tiempo antes, que es de gran uso en esta investigación. Se le puede llamar "*Logaritmique*" o "*Logistique*", no veo que se haya dado algún nombre aunque otros la hayan considerado antes. Estando ABC, que tiene una línea recta DE como asíntota, en la cual si se toman partes iguales cualesquiera, como DG, GF, etc. y por los puntos D, G, F; etc. se trazan perpendiculares a la curva, se ve que las líneas DA, GH, FB serán proporcionalmente continuas.



A la luz de estos argumentos construidos por científicos de siglos anteriores, con el afán de describir ciertos fenómenos de la naturaleza, podemos discutir acercamientos a la construcción escolar de la función logaritmo y otras posibles maneras de mirar el concepto de función que podrían favorecer una apropiación más robusta de la misma.



Pensar en las funciones polinómicas, exponenciales, potencia y logarítmica como la covariación de progresiones aritméticas y geométricas es una argumento de discusión y construcción de las mismas no generalizable a otras funciones tales como las trigonométricas. Esto reafirma nuestra idea de la importancia de reconocer la naturaleza propia de cada función.

Cabe ahora buscar evidencia, mediante el diseño de secuencias de aprendizaje que respeten esta hipótesis, que halla un robusto sustento en el devenir histórico de la noción de función, como el argumento que nos permitirá crear un puente entre la operatividad y la funcionalidad de los logaritmos, es decir, lograr su construcción escolar.

Bibliografía

Confrey, J. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. *Journal for Research in mathematics education 26*(1), 66-86.

Confrey, J. & Dennis, D. (2000). La creación de los exponentes continuos: un estudio sobre los métodos y la epistemología de John Wallis. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Eduativa 3*(1), 5-31.

Dubinsky, E. (1991). Constructive aspects of reflexive abstraction in advanced mathematics. En L. P. Steffe (Ed.), *Epistemological foundations of mathematical experience* (pp. 159-202). New York, EE. UU.: Springer-Verlag.

Dubinsky, E. (1992). The nature of the process conception of function. En E. Dubinsky & G. Harel (Eds.), *The concept of function. Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 85-106). EE. UU.: Mathematical Association of America. Vol 25.

Dubinsky, E. (2000). De la investigación en matemática teórica a la investigación en matemática educativa: un viaje personal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 3*(1), 47-70.

Farfán, RM (1997). *Ingeniería Didáctica. Estudio de la variación y el cambio*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Ferrari, M. (2003). Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Huygens, C. (1690). *Discours de la cause de la pesanteur.* Reeditado por IREM de Dijon (abril-1981)Lezama, J. (1999). Un estudio de reproducibilidad: El caso de la función exponencial. Tesis de Maestría no publicada. Cinvestav-IPN, México.

Newton, I. (1968). Further logarithmic calculation. En D. Whiteside (Ed.), *The mathematical papers of Isaac Newton Vol 2*. Cambridge, Gran Bretaña: University Press. (Trabajo original publicado en 1667).

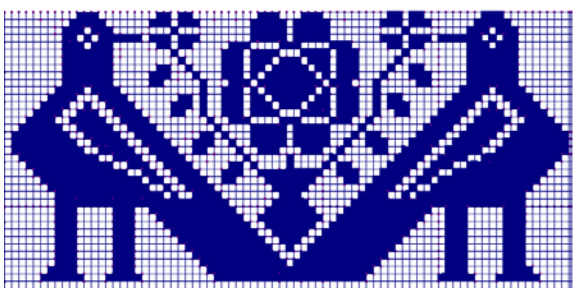
Newton, I. (1693). Principios matemáticos. (A. Escohotado & M. Saenz, Trad.). Barcelona, España: Altaya. (Trabajo original publicado en 1686).Soto, E. M. (1988). Una experiencia de redescubrimiento en el aula: Acerca de los logaritmos de los números negativos y los orígenes de la variable compleja. Tesis de maestría no publicada. Cinvestav-IPN, México.

Trujillo, R. (1995). Problemática de la enseñanza de los logaritmos en el nivel medio superior. Un enfoque sistémico. Tesis de maestría no publicada. Cinvestav-IPN. México.

PENSAMIENTO MATEMÁTICO EN LA CULTURA OTOMÍ

Erika Barquera Pedraza
Cinvestav – IPN, México
erikabarquera@hotmail.com; barquera@mail.cinvestav.mx

Resumen
La investigación se centra en la forma en que se manifiesta el pensamiento matemático en uno de los grupos mas antiguos de México establecido en el centro del país, específicamente en el Valle del Mezquital en el estado de Hidalgo, las matemáticas en el valle se observan en las actividades cotidianas como: bordados sobre telas diversas, tejido de canastos, ayates[4], siembras, construcción de viviendas, técnicas de cultivo y pastoreo, todo esto tiene un parámetro de medición así como de número y otras situaciones que vienen a conformar un mundo de conocimiento matemático relacionado con la cultura Otomí. Se toma como referencia a Bishop (1988)[5], con las actividades: *diseñar, localizar, medir, contar, jugar, explicar.* El diseño viene a ser una de las actividades centrales del grupo por la gran creatividad que se tiene y que muchas veces sirve como parte de un ingreso económico de las familias, en ella se tiene mucho de un conocimiento matemático, se tiene una forma de medir, distribuir, contar, ubicar, y socializar el conocimiento.



"Primero aquí le cuenta el primero, que va empezar tiene que contar aquí, (señala el bordado que realiza, tiene dos filas de bordado)...aquí, tiene este....creo 11 acá, 6..este 8, acá, aquí 1 nada mas, pero abajo tiene este dos par, el primero tiene dos y un par, luego 8, y luego 11 de vuelta"[6]

La numeración se da contando dos hilos, es decir dos hilos hacen uno, cuatro hilos son dos, posiblemente la tela interfiera y no fuese mas compleja en el momento de la elaboración, más el motivo sitúa a buscar y establecer la medida que son dos unidades haciendo una, las equivalencias las muestran en el momento que se establece la medida y la cantidad de figuras que se realiza porque inicia el conteo de los hilos, como lo menciona la bordadora es lo mas complejo, "*Primero el que va empezar lo tiene que contar*[7]" .

Entre más puntadas tenga más complejo es, esta actividad denota la capacidad imaginativa que tiene la bordadora de retener una serie numérica de puntos, porque a lo largo de toda la bata[8] mide de 20 a 25cm, y la serie de figuras tiene un proceso inalterable que cambia o se repite de acuerdo a la figura, se trabaja con un espacio en una superficie pero con puntos ordenados, todo tiene un inicio y precisamente se da un punto en el espacio, cuando dice: "*aquí inicia*", la interpretación de cada palabra

[4] Tejido que se elabora por medio de la fibra de maguey y esta funciona como bolsa para la cosecha ó cubrirse de las inclemencias del sol.
[5] Coloca a la matemática en un contexto cultural, que extrae del mundo "real", menciona que en toda cultura posee un conocimiento matemático en las actividades que se desarrollan.
[6] observaciones realizadas a una bordadora.
[7] Comentario de la bordadora (observación-entrevista).
[8] Nombre que se le da al bordado de la blusa de la parte de la sisa delantero y espalda.

de la bordadora nos transporta a conjeturas de un pensamiento matemático, ver como expresa el pensamiento en cada palabra, una conjetura sobre la acción de los objetos, es importante preguntarse ¿cómo se da el desplazamiento de un número a otro?, porque menciona 6,8,1, la sucesión no tiene un orden en cuestión, porque la figura tiene forma y coherencia que parte de su realidad cotidiana, no tiene una pata mas grande por así decirlo, existe una estética, que proyecta sensibilidad, lleva implícito el pensamiento matemático que viene a ser el factor importante de toda manifestación humana y del cual se desea indagar en el grupo cultural Otomí.

Introducción

Lo ideal a lo largo de la historia es tener una fórmula mágica para proporcionar los conocimientos que el alumno, o aquel que se interese por adquirir tal cúmulo de experiencias, resulte una tarea fácil o por lo menos con resultados favorables, el interés a la transmisión de los conocimientos siempre ha estado, se ha adaptado estrategias por dominar o intentar controlar está situación.

Lo que es indudable es la necesidad que se ha tenido y se tiene por proporcionar de manera real un conocimiento matemático que permita que el individuo se sepa conducir en su vida, desenvolver o desempeñar en todas las situaciones en que se enfrenta, buscar formas que nos permita compartir tales conocimientos referente a las matemáticas en el Valle del Mezquital con los niños otomíes[9], nos lleva a vivir junto con el habitante como es que se da tal conocimiento ¿cómo es que el padre transmite o ha adquirido el conocimiento que desempeña? El conocimiento se encuentra en todos los individuos de manera diferente y de un grado diverso, muestra de ello analizaremos uno de los grupos más antiguos de México, los otomíes, situados en el centro en los estados de México, San Luis Potosí, Veracruz e Hidalgo, en este ultimo es donde se centra el recorrido para ver como es que el conocimiento matemático se encuentra entre los habitantes ó como se utiliza las matemáticas en esta cultura para con ello tener un punto de referencia en la manera de transmitir el conocimiento que demanda la Educación Nacional.

Las matemáticas en el valle del mezquital se observan en las actividades cotidianas como: bordados sobre telas diversas, tejido de canastos, ayates[10], siembras, construcción de viviendas, técnicas de cultivo y pastoreo, todo esto tiene un parámetro de medición así como de número y otras situaciones que vienen a conformar un mundo de conocimiento matemático relacionado con la cultura Otomí.

Aúnque en muchas ocasiones se desvincule las matemáticas de la realidad, es comprobado que pertenecen como primera instancia en este espacio de la vida del hombre, solo miremos, por supuesto con un mirar matemático y encontraremos toda situación que amerite el reconocimiento del conocimiento empírico matemático como primer momento de la ciencia y al paso de los años llega a una sistematización

[9] No hay certeza sobre el significado preciso del vocablo otomí. En otomí, otho significa no poseer nada y mi, establecerse. Estas dos palabras podrían interpretarse como pueblo errante. También se puede considerar que otomí proviene del náhuatl otocac, el que camina, y mitl, flecha; asimismo, se puede derivar de totomitl, flechador de pájaros o aves. Si tomamos en cuenta los distintos significados, el término otomí se puede definir como "cazadores que caminan cargando flechas". En su lengua, los otomíes se autodenominan hña hñu, que significa hablantes de otomí o gente otomí.

[10] Tejido que se elabora por medio de la fibra de maguey y esta funciona como bolsa para la cosecha ó cubrirse de las inclemencias del sol.

científica como se tienen ahora. Teniendo la aceptación de que las matemáticas se encuentran a nuestro alrededor, daremos paso a la aventura que se vive en el valle, en donde al parecer sus mismas características resaltan: cactus, mezquites, magueyes, flores silvestres, acompañadas de las montañas que dan la composición única de un valle habitado por los Otomíes.

En las observaciones y entrevistas realizadas con los habitantes se toma como referencia a Bishop (1988)[11], con las actividades: *diseñar, localizar, medir, contar, jugar, explicar.* Por las características de publicación se presenta únicamente el diseño como fuente importante del pensamiento matemático.

Se vive el conocimiento matemático en el diseño

El diseño es considerado fuente importante de grandes aportes matemáticos como la forma, el tamaño, la escala, la medida, formas geométricas (planas y sólidas); propiedades de las formas, semejanzas, congruencia, proporción, razón, es la imaginación de las formas, es el concepto abstracto y la idea concebida, el producto acabado del diseño no es matemáticamente importante, lo importante se encuentra en el desarrollo de las ideas, es el plan, la estructura, la forma imaginada, toda creación sin excepción alguna parte de las estructuras cognitivas, la relación espacial percibida entre el objeto y el propósito, es la forma abstracta y el proceso de abstracción (Bishop, 1988).

Desde el momento de crear una imagen mental de los espacios, tamaños, de un bordado que debe cumplir con medidas exactas se tiene una concepción preliminar para después llevarlo a la materialización, ese es el lapso que interesa fijar la atención en el contexto cultural. Los caminos, casas, iglesias, jardines, artesanías, danzas, cantos, religión, su vestir, en fin es prolongada la lista todo ello parte de la transformación de la realidad, convierte la penca en ayate, el lienzo blanco de tela en bordados plasmando su naturaleza, fauna y flora; el carrizo en canastas, lechuguilla en lazos, escobetillas; barro en una esférica olla, madera en una cuchara, es "imponer una cierta estructura sobre la naturaleza" [12], es una abstracción de formas para cubrir una necesidad una vez lograda.

El diseño debe tener coherencia entre sus proporciones, formas, tamaño, color, material, y la necesidad que se desea cubrir, "es una acción intencional que se convierte en una acción creadora cuando se idea algo nuevo por alguna razón y este cumple con su finalidad" (Aldaz Isaías 1992 p52*)*[13]*,* es decir imaginar a la naturaleza sin las partes innecesarias, resaltando algunos rasgos más que otros como es el caso del tallado de las pencas de un maguey para llevar todo el proceso transformativo que lleva, hasta ser la prenda que caracteriza al otomí, el preciado ayate, su manera, su cosmovisión del mundo se ha ido expresando, porque su espíritu queda en el diseño, además se pude decir que viene a ser un factor importante de desarrollo y supervivencia en el otomí.

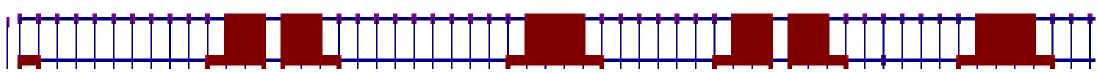
---

[11] Coloca a la matemática en un contexto cultural, que extrae del mundo "real", menciona que en toda cultura posee un conocimiento matemático en las actividades que se desarrollan.

[12] Bonilla , Elisa (1987). "La dimensión de la cultura en la investigación en Matemática Educativa", memorias de la primera reunión de profesores e investigación en matemática educativa. Pp13-31.

[13] Aldaz H. Isaías. Algunas actividades de los Mixes de Cacalotepec relacionadas con las Matemáticas. Un acercamiento a su cultura. Tesis para obtener el grado de maestro en Ciencias. Cinvestav, 1992.

En la labor como le nombran las artesanas del Valle, las medidas de la blusa, vestido, mantel, a falta de cinta métrica la cuarta (Kula 1970) viene a sustituirla, medida que viene variando de acuerdo a la persona, sin embargo como referencia nos indican la necesidad que tienen los pueblos por utilizar las partes del cuerpo humano para cuantificar o establecer relaciones que satisfacen la necesidad inmediata. La bata que es el bordado que lleva la blusa y el hombro es la mitad de la bata, esto quiere decir que basta con tomar la medida de la bata para obtener los hombros, es de suponerse que se tiene un conocimiento establecido, una imagen mental que permite materializar en el transcurso de sus experiencias, (Kula 1970)[14].
Una vez que se tenga la medida la elaboración del tejido, su conteo se manifiesta contando la cantidad de hilos que lleva la figura seleccionada, para la bordadora es necesario cuando va a bordar desarrollar un conteo:
"Primero aquí le cuenta el primero, que va empezar tiene que contar aquí, (señala el bordado que realiza, tiene dos filas de bordado)...aquí, tiene este....creo 11 acá, 6..este 8, acá, aquí 1 nada mas, pero abajo tiene este dos par, el primero tiene dos y un par, luego 8, y luego 11 de vuelta"[15]

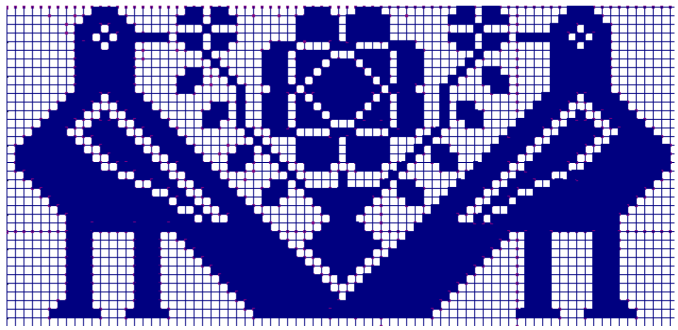


La numeración se da contando dos hilos, es decir dos hilos hacen uno, cuatro hilos son dos, posiblemente la tela interfiera y no fuese mas compleja en el momento de la elaboración, más el motivo sitúa a buscar y establecer la medida que son dos unidades haciendo una, las equivalencias las muestran en el momento que se establece la medida y la cantidad de figuras que se realiza porque inicia el conteo de los hilos, como lo menciona la bordadora es lo mas complejo, "*Primero el que va empezar lo tiene que contar*[16]" .
Entre más puntadas tenga más complejo es, esta actividad denota la capacidad imaginativa que tiene la bordadora de retener una serie numérica de puntos, porque a lo largo de toda la bata[17] mide de 20 a 25cm, y la serie de figuras tienen un proceso inalterable que cambia o se repite de acuerdo a la figura, se trabaja con un espacio en una superficie pero con puntos ordenados, todo tiene un inicio y precisamente se da un punto en el espacio, cuando dice: "aquí inicia", la interpretación de cada palabra de la bordadora nos transporta en conjeturas de un pensamiento matemático, es ver como expresa el pensamiento en cada palabra, una conjetura sobre la acción de los objetos, es importante preguntarse ¿cómo se da el desplazamiento de un número a otro? porque menciona 6,8,1, la sucesión no tiene un orden en cuestión, porque las figuras tienen forma y coherencia que parten de su realidad cotidiana, no tiene una pata mas grande por así decirlo, existe una estética, que proyecta sensibilidad, lleva implícito el pensamiento matemático que viene a ser el factor importante de toda manifestación humana.

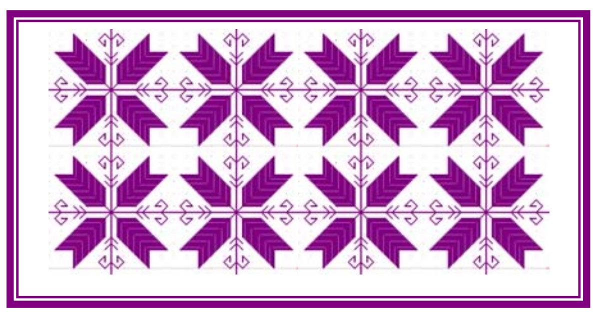
---

[14] Kula, Witold. "Las medidas y los hombres". Polonia 1970.Siglo veintiuno editores.
[15] observaciones realizadas a una bordadora.
[16] Comentario de la bordadora (observación-entrevista).
[17] Nombre que se le da al bordado de la blusa de la parte de la sisa delantero y espalda.

Solo miremos las siguientes figuras y veamos que el pensamiento no es tan simple como decir “que bonito es”, “que arte”, ¡no! Es una visión plasmada desde todo un vivir, como se dijo anteriormente es una manipulación de puntos en un plano, en donde se tiene la noción de proporción, forma, congruencia, número, medida, simetría, segmento, semejanza.



Otra forma de plasmar la naturaleza Otomí, se encuentra en la labor[18] cuya característica se manipula por pieza, y cuenta con el mismo proceso mental que una labor.



Otro de los diseños es la elaboración del ayate realizado en telar de cintura, prenda que utilizan las mujeres como tocado, para cubrirse de los rallos del sol, para cargar su hijo y en los hombres para guardar sus semillas de siembra.
Se inicia con la cocción de pencas, que posteriormente se talla para obtener la fibra del maguey que por medio de un malacate se hila el Shande, una de las situaciones que llama la atención es el momento en que se dan cuenta que la cantidad de fibra es suficiente para la elaboración del ayate, el tamaño varia de 12 cm de diámetro y algunos otros de 7 cm de diámetro[19], son cuatro malacates llenos para tener la cantidad suficiente para el ayate, otra de las medidas a utilizar son las manos que abarcan la bola de sandhe más cuatro dedos[20]
Interesante ver como a partir de la experiencia las personas mantienen estáticamente la cantidad de fibra que se pretende tejer, se percatan de lo que llega a ser una

[18] Labor recibe el nombre de los bordados que se utiliza el relleno en las figuras, porque el bordado es por puntos.
[19] Rescatado de las observaciones con una tejedora San Andrés
[20] Tejedora de Orizabita.

repetición benéfica en el artesano, existe una cuantificación de la cantidad, hay una relación del volumen y el espacio, la naturalidad de los dedos cuando se calcula la cantidad de fibra que se requiere para el ayate.

Existe una "conservación de la cantidad"

malacate = bola *para un ayate* $\longrightarrow$

Se conserva porque el espacio de las manos más cuatro dedos determina la suficiencia de fibra para el ayate, debo mencionar que la cantidad de fibra determina el grosor del ayate y también de acuerdo a la utilización que se le pensaba dar, es decir si el ayate se realiza de 6 fibras (sandhe) es grueso y mas fácil de elaborar, por el contrario se realiza de 3 fibras el tejido es mas cerrado y la complejidad incrementa, por la manipulación de hilos de escasas dimensiones.

No se puede negar que la importancia de esta actividad es conocida como imaginación espacial, siendo aquella habilidad de recrear cierto suceso para tener una imagen mental que nos representa lo que se pretende materializar.

Es así como a través de esta actividad logramos ver el pensamiento manifestado en las diversas actuaciones del otomí, para tener las herramientas suficientes para la conexión de los conocimientos inmersos en un Plan y Programas que son los que demanda la Educación Nacional, y cuales son aquellos conocimientos empíricos que surgen de la experiencia, para un buen aprovechamiento en la Educación Matemática del niño, no basta que el niño repita lo que se le enseña, sino que llegue a esa aprensión real del conocimiento y viva de acuerdo a sus necesidades.

Bibliografía

Aldaz H. Isaías. (1992). *Algunas actividades de los Mixes de Cacalotepec relacionadas con las Matemáticas. Un acercamiento a su cultura*. Tesis para obtener el grado de maestro en Ciencias. CINVESTAV

Bishop, Alan J (1988). Mathematical Enculturation. A Cultural perspective on *Mathematics Education*, Cambridge, U.K: Kluwer Academic Publishers.

Bonilla, Elisa (1987). La dimensión de la cultura en la investigación en Matemática Educativa. *Memorias de la primera reunión de profesores e investigación en matemática educativa*. Pp13-31.

SEP Dirección General de Educación Preescolar. *Programa de Educción Preescolar para Zonas Indígenas*. Septiembre (1994), del Departamento de Materiales y Apoyos Didácticos de la Dirección General de Educación Indígena.

Kula, Witold. (1970) *Las medidas y los hombres*. Polonia. Siglo veintiuno editores.

LA TRANSFERENCIA DEL CONOCIMIENTO:ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES HACIA UNA CUERDA QUE VIBRA

Patricia Camarena Gallardo
Instituto Politécnico Nacional, México
pcamarena@ipn.mx

Resumen

La transferencia del conocimiento es una catalogada como una de las habilidades de orden superior . Esta habilidad, correlacionada directamente con el modelar matemáticamente problemas de otras disciplinas, está en tierra de nadie curricularmente hablando, situación que provoca la reflexión entre los docentes de matemáticas, de los niveles educativos medio superior, superior y de posgrado. Tal problemática es enfrentada por el grupo internacional de investigación en *matemáticas en el contexto de las ciencias* . En el presente investigación, se muestra el caso de transferencia del conocimiento de las ecuaciones diferenciales parciales hacia la cuerda vibrante. La metodología a seguir constó de dos bloques el primero de tipo descriptivo en donde se contextualiza a las ecuaciones diferenciales parciales a través de la cuerda vibrante para detectar los indicadores del proceso de transferencia de conocimiento. La segunda de tipo experimental en donde se pone a prueba la estrategia didáctica de la matemática en contexto, para lo cual se selecciona un grupo de estudiantes, se les diagnostica respecto a su infraestructura cognitiva, tomando en cuenta los indicadores detectados referentes a esta etapa, se instrumenta la didáctica de la matemática en contexto y se analiza el grado de transferencia que han logrado los alumnos sobre el eje de los indicadores.

Introducción

La presente investigación se fundamenta en la fase didáctica de la teoría de la matemática en el contexto de las ciencias, cuyo objetivo es el estudio de la matemática en el contexto de la ingeniería como didáctica para la enseñanza de las matemáticas en escuelas de ingeniería (Camarena). En otros foros académicos se han presentado trabajos similares en el contexto de la ingeniería (Zúñiga, Camarena y Muro). En esta ocasión se han elegido a las ecuaciones diferenciales parciales por ser un tema problemático para los estudiantes y por representar modelos complejos de la física e ingeniería. En esta presentación se ofrece un caso particular de las ecuaciones diferenciales parciales, la llamada ecuación de onda, la cual, entre otros, modela la cuerda vibrante.

Una de las asignaturas difíciles para el estudiante es el correspondiente análisis matemático para funciones de varias variables, el cual se hereda de la propia matemática, ya que dentro de ésta el tema correspondiente a funciones de varias variables es de los más complejos. Por lo que las ecuaciones que se derivan de este tópico también resultan complejas para los alumnos, en particular las ecuaciones diferenciales parciales.

Luego, se puede decir que si el tratar con derivadas parciales es complejo, más complicado el aplicarlas y el formular ecuaciones diferenciales parciales a partir de un problema dado, es decir, el modelar problemas de la ingeniería o de la física, en donde este modelaje se lleva a cabo a través de las ecuaciones diferenciales parciales es prácticamente imposible para los estudiantes, sobre todo ya que existe el antecedente de que los profesores de matemáticas (Camarena), estadísticamente hablando, no presentan a la matemática contextualizada en el área de la ingeniería en donde la imparten.

En general los libros de texto que abordan ecuaciones diferenciales parciales no modelan situaciones de la física o la ingeniería, y cuando llegan a hacerlo lo único que aparece es la ecuación que describe el fenómeno, pero no se muestra cómo se llegó a la ecuación.

Por lo antes expuesto es que en esta investigación se ha elegido la contextualización de las ecuaciones diferenciales parciales. Por otro lado, la matemática en el contexto de la ingeniería proporciona una didáctica específica para impartir clases a futuros ingenieros ya que favorece el proceso de la enseñanza y el aprendizaje según Camarena.

La Contextualización de la ecuación de onda

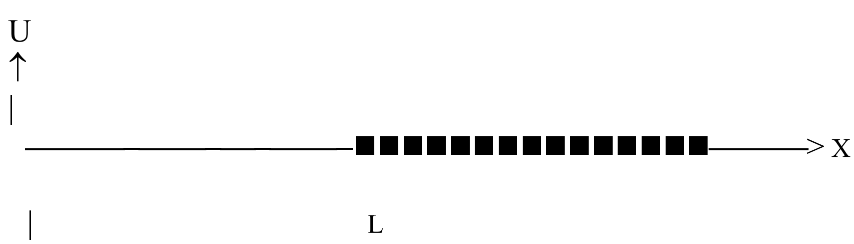
Las ecuaciones diferenciales parciales tienen aplicaciones en varias áreas de la ingeniería, no todo tipo de ecuaciones en derivadas parciales son necesarias en una ingeniería en particular (Camarena). Para el caso de la ingeniería en electrónica y ramas afines son unas cuantas las ecuaciones diferenciales parciales que se emplean, entre éstas se encuentra la ecuación de onda la ecuación de calor, la ecuación de Laplace, etc. Para la ingeniería mecánica se requiere de la ecuación de onda y otras ecuaciones en derivadas parciales del tipo parabólico. La ecuación de onda también es utilizada en ingeniería civil. Lo anterior conduce a elegir la ecuación de onda por ser utilizada en varias ingenierías.

Como lo marcan las etapas de la matemática en contexto, al contextualizar un tema específico irán surgiendo los temas matemáticos que deberán ser tratados para la solución del modelo matemático que nace de la contextualización. Se tiene una cuerda que se pone a vibrar, la cual da origen a la ecuación de onda, al tener que resolver esta ecuación para enfrentar el problema planteado, se tendrá que introducir el método de variables separadas para ecuaciones diferenciales en derivadas parciales y la clasificación de este tipo de ecuaciones. También se tendrán que definir las condiciones iniciales y las de frontera del problema que se aborda.

Sea una cuerda de densidad uniforme, la cual se tensa y se sujeta de sus extremos y por alguna razón se pone a vibrar, el problema que se tiene es el de conocer la forma del movimiento de la cuerda, es decir, cómo vibrará la cuerda.

Si se representa geométricamente la cuerda tensa, ésta se verá como un segmento de línea, para poder llevar a cabo el modelaje del problema, una de las etapas de la contextualización, se ubican los ejes coordenados en tal representación geométrica, por comodidad se coloca el origen en uno de los extremos del segmento y se hace coincidir el eje horizontal de la variable independiente con la cuerda.

Véase la gráfica No.1.



GRÁFICA No. 1. Ubicación geométrica en los ejes coordenados XU de una cuerda tensa de longitud L.

Al ser una cuerda que está vibrando la posición de los puntos sobre la cuerda respecto a los ejes coordenados variará en función del tiempo, por lo que la ecuación que describe el movimiento de la cuerda vibrante será una función u que dependerá de la variable independiente x y de la variable tiempo t, luego, u=u(x,t).

Para determinar la ecuación que describe el movimiento tómese un diferencial de arco de cuerda, el cual se muestra en la figura No. 1.

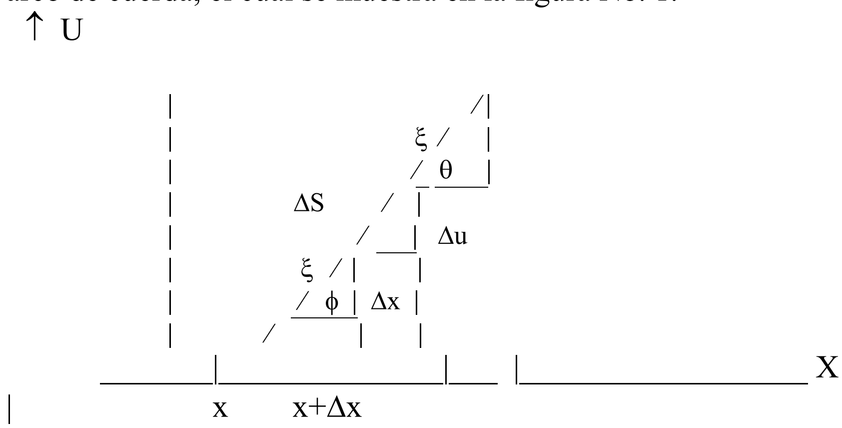


FIGURA No. 1 Arco de cuerda ΔS.

En el diferencial de arco de cuerda ΔS de la figura anterior, la fuerza vertical que actúa sobre el segmento ΔS está dada por una fuerza ξ sen θ que tira hacia arriba y otra ξ sen ϕ hacia abajo, por tanto, la fuerza vertical es: ξ sen θ - ξ sen ϕ

Por otro lado, como se trata de un diferencial de arco, entonces, los ángulos θ y ϕ son muy pequeños, lo cual induce las siguientes relaciones, válidas solamente para ángulos muy pequeños: $\theta \approx \text{sen}\,\theta \approx \tan\theta$ y $\phi \approx \text{sen}\,\phi \approx \tan\phi$

Además: $\tan\theta = u_x(x+\Delta x,t)$ y $\tan\phi = u_x(x,t)$

Aplicando la segunda ley de Newton, la cual establece que la fuerza es igual a la masa por la aceleración, se tiene que: Masa de la cuerda: f ΔS; Aceleración: $u_{tt}(x,t)$

Luego, $f\,\Delta S\, u_{tt}(x,t) = \xi\, u_x(x+\Delta x,t) - \xi\, u_x(x,t)$

Como la cuerda está tensa las vibraciones serán muy pequeñas, por lo que $\Delta S \approx \Delta x$. Así:

$u_{tt}(x,t) = (\xi/f)\,[u_x(x+\Delta x,t) - u_x(x,t)] / \Delta x$

Tomando el límite cuando $\Delta x \to 0$ y haciendo $a^2=(\xi/f)$, se obtiene la ecuación diferencial parcial: $u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t)$ ....(1), llamada ecuación de onda.

Las condiciones del problema. Se mencionó en el planteamiento del problema que la cuerda estaba sujeta de sus extremos, lo cual se representa matemáticamente de la siguiente manera: Si u=u(x,t) es la posición de la cuerda en un tiempo t, en donde la variable x es tal que $0 \leq x \leq L$, véase la gráfica No. 1, entonces: a) La cuerda está sujeta en su primer extremo, significa que x=0 & u=0 para cualquier tiempo t, luego, u(0,t)=0. b) La cuerda está sujeta en su otro extremo, significa que x=L & u=0 para cualquier tiempo t, luego, u(L,t)=0. A estas condiciones se les conoce con el nombre de condiciones de frontera, ya que limitan físicamente a la cuerda, es decir, es su frontera (los extremos de la cuerda).

Por otro lado, si la cuerda tiene cierta posición al inicio del problema, por ejemplo la forma $u=f(x)$, entonces, lo que se está diciendo es que cuando el tiempo es igual a cero (tomando por convención que al inicio del problema se hace correr el tiempo desde cero) se tiene la condición: $u(x,0)=f(x)$. Y si en ese momento por alguna razón se pone a vibrar la cuerda, lo que se tiene es una velocidad $g(x)$ en esa cuerda, la que produce el movimiento, luego: $u_t(x,0)= g(x)$. Estas condiciones son semejantes a las condiciones iniciales de las ecuaciones diferenciales ordinarias, y efectivamente, también se les llamarán condiciones iniciales.

Solución de la ecuación diferencial parcial[21].

Primero se le hace observar al estudiante que la ecuación diferencial parcial (1): $u_{tt}(x,t) = a^2u_{xx}(x,t)$, es una ecuación diferencial parcial del tipo lineal homogénea: $u_{tt}(x,t) - a^2\ u_{xx}(x,t) = 0$.

Que para este tipo de ecuaciones existe un método de solución denominado: variables separadas. A diferencia con el método de variables separadas para las ecuaciones diferenciales ordinarias en donde se aplica cuando la expresión de la ecuación diferencial posee separadas las variables, es decir, cuando es de la forma: $P(x)\ Q(y)\ dx + R(x)\ S(y)\ dy = 0$, en las ecuaciones diferenciales parciales el método de variables separadas consiste en suponer que la que tiene separadas las variables no es la ecuación diferencial sino la función solución de la ecuación diferencial parcial.

Luego, para poder resolver la ecuación de onda se presupone que la función solución tiene separadas sus variables, o sea, que: $u(x,t) = X(x)\ T(t)$ ....(2) Después se sustituirá esta propuesta en la ecuación de onda, obteniéndose: $T''(t) / T(t) = a^2 X''(x) / X(x)$ ....(3)

Esta última relación solamente puede ser cierta si cada término de la igualdad es constante, luego, se deben satisfacer al mismo tiempo las dos ecuaciones que dan origen al sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias y lineales formado por las ecuaciones: $T''(t)/T(t)=K$ y $a^2X''(x)/X(x)=K$. La constante K se denomina constante de separación, ya que a la ecuación (3) la separó en dos ecuaciones. Como es del conocimiento del alumno la solución para cada una de estas ecuaciones es:

i) Para $K=0$, $T(t) = At+B$ y $X(x) = Cx+D$ dando origen a $u(x,t) = (Cx+D)(At+B)$

ii) Para $K>0$, se puede suponer que $K=s^2$, $T(t) = Ae^{st} + Be^{-st}$ y $X(x) = Ce^{sx/a} + De^{-sx/a}$, generándose $u(x,t) = X(x)T(t) = (Ce^{sx/a} + De^{-sx/a})(Ae^{st} + Be^{-st})$

iii)Para $K<0$, se puede suponer que $K=-s^2$, $T(t) = A\cos st + B\operatorname{sen} st$ y $X(x) = C\cos sx/a + D\operatorname{sen} sx/a$, obteniéndose $u(x,t) = X(x)T(t) = (C\cos sx/a + D\operatorname{sen} sx/a)(A\cos st + B\operatorname{sen} st)$

Por otro lado, se tienen cuatro constantes de integración y se conocen cuatro condiciones del problema, a saber, dos condiciones de frontera y dos condiciones iniciales, por tanto, será posible determinar una solución particular de la ecuación de onda para esas condiciones. Sustituyendo las condiciones de frontera en las propuestas i) y ii) se observa que la solución que las satisfacen es la solución trivial, la cual implica que no hay movimiento. Para la propuesta iii) después de aplicar las condiciones de frontera se genera la solución: $u_n = u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = (\operatorname{sen} n\pi x/L)(E_n \cos an\pi t/L + F_n \operatorname{sen} an\pi t/L)$. Habrá tantas funciones solución $u=u(x,t)$, de

[21] Por razones de espacio se redujo el desarrollo de la solución de la ecuación diferencial parcial.

la ecuación de onda, como valores tomen las n. En las ecuaciones diferenciales parciales lineales y homogéneas la suma de soluciones también es solución. Por tanto, es solución de la ecuación diferencial parcial (1) la siguiente: $u = u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \text{sen}\,(n\pi x/L)(E_n \cos an\pi t/L + F_n \,\text{sen}\, an\pi t/L) \quad ....(4)$$

Obsérvese que esta ecuación posee solamente dos constantes de integración y faltan dos condiciones para determinar de manera única la solución de la ecuación de onda. Al sustituir las condiciones iniciales se determinan las constantes de la ecuación (4), en donde los E_n y F_n son los coeficientes de la serie de senos de Fourier dados por las ecuaciones (5) y (6):

$$E_n = (1/L)\int_0^L f(x)\,\text{sen}\,(n\pi x/L)\,dx \quad ....\ (5) \qquad F_n = (1/an\pi)\int_0^L f(x)\,\text{sen}\,(n\pi x/L)\,dx \quad ....\ (6)$$

La transferencia del conocimiento

La transferencia del conocimiento es una de las habilidades catalogadas entre las de orden superior (Nickerson, Perkins y Smith). Entendida como la habilidad que tiene un individuo para plasmar su bagaje matemático en la resolución de un problema, así como saber emplear las habilidades formativas que ofrece la matemática en la resolución de problemas de toda índole científica, esto es, desde transitar entre el lenguaje natural y el lenguaje matemático (en ambas direcciones) cuando se trata de fenómenos o problemas de otras áreas científicas, hasta hacer uso del espíritu científico, crítico y analítico que desarrolla la matemática en cualquier tarea profesional.

El término de transferencia del conocimiento también empleado por Ausubel, lo sustenta en su teoría sobre aprendizajes significativos, entendidos como aquellos que tienen significado o sentido para el estudiante.

Para determinar la significancia del contenido a enseñar, Ausubel establece que el nuevo conocimiento deberá de ser relacionado con otros conocimientos familiares, en donde los elementos sustanciales son en relación con la disciplina que está en tratamiento. Se considera que la forma de dar esta relación no necesariamente es a través de la misma disciplina, sino a través de algo que sea atractivo para el alumno, como lo son las propias asignaturas de su carrera profesional. De hecho, este supuesto es un elemento de la teoría de la matemática en el contexto de las ciencias, en donde se ha demostrado que la vinculación de la matemática con las áreas de estudio de la carrera en cuestión es un gran elemento motivador y significante.

La detección de los indicadores de la transferencia del conocimiento se lleva a cabo buscando todos los factores de asociación con el tema o concepto involucrado.

Si observamos que lo planteado es un problema y se toman en cuenta las etapas de Polya se puede decir que la transferencia del conocimiento se presenta en la primera, segunda y cuarta etapas, ya que la primera requiere de representar el problema en otros registros para pasar a la segunda etapa y construir el modelo matemático, mientras que la cuarta etapa lleva a cabo el proceso inverso al de la primera etapa, es decir, los resultados matemáticos ahora se traducen al lenguaje del problema para darle la solución requerida, llevándose a cabo nuevamente transferencia del conocimiento.

En la primera etapa está presente el tránsito entre los diferentes registros de los objetos involucrados, para que se favorezca el conocimiento es necesario transitar según sea el caso entre los registros aritmético, algebraico, analítico, visual y contextual, siendo un primer indicador de la transferencia del conocimiento.

La segunda etapa, que corresponde a la construcción del modelo matemático pone de relieve los diferentes enfoques que debe tener un concepto matemático. En la matemática en el contexto de las ciencias se ha hecho mucho hincapié en el hecho de que cada concepto o tema matemático posee diferentes enfoques y que es necesario conocer aquellos que son empleados en la carrera de estudio. Constituyéndose un segundo indicador de la transferencia del conocimiento.

En esta segunda etapa también se muestra la necesidad de hacer "consideraciones" para poder realizar la modelación matemática, es decir otro indicador de la transferencia del conocimiento está dado por las equivalencias de conceptos matemáticos bajo ciertas condiciones.

Un indicador que garantiza el que los conocimientos matemáticos sean aplicados a cualquier tipo de problema es la descontextualización de los temas y conceptos matemáticos cuando se usa la didáctica de la matemática en contexto, siendo éste otro indicador más para la transferencia del conocimiento.

No significa que sean los únicos los indicadores aquí mencionados, sino que son los que han salido a la luz en esta investigación. Se está en la búsqueda de más indicadores.

La etapa experimental

Para la selección de los estudiantes y para que se pudiera medir la variable transferencia del conocimiento se controlaron las variables relativas a la infraestructura cognitiva, en la nomenclatura de Ausubel (conocimientos previos) de tal forma que la selección de la muestra se dividió en dos estratos: los que poseían "buenos conocimientos" y los que no los poseían. Los conocimientos elegidos, de acuerdo a la contextualización fueron los conceptos sobre derivación, ecuación diferencial, solución de una ecuación diferencial, condiciones iniciales y solución de ecuaciones diferenciales parciales por separación de variables. Cabe mencionar que otra variable que se tomó en cuenta fue el conocimiento acerca del problema sobre la cuerda vibrante.

El grupo experimental constó de catorce estudiantes de tercer a quinto semestres de la carrera de Ingeniería en Comunicaciones y Electrónica. Se les comentó lo que se perseguía con la experimentación. Se les planteó el problema de la cuerda vibrante, se les pidió que lo resolvieran, para lo cual trabajaron en equipos de dos personas.

Después del análisis de la información se concluyó, con diferentes grados de profundidad, que: la transferencia del conocimiento está íntimamente relacionada con los conocimientos previos que posee el estudiante. Los estudiantes con buenas bases obtienen la transferencia del conocimiento, mientras que los estudiantes con malas bases no lo logran. Nuevamente se observó la motivación que ofrece la matemática en contexto a los alumnos.

Conclusiones

Los alumnos al saber para qué les van a servir las matemáticas que estudian se ver motivados hacia el curso de matemáticas, incidiendo en su buen desempeño escolar. La matemática en contexto favorece la transferencia del conocimiento.

Bibliografía

Ausubel David P., Novak Joseph D. y Hanesian Helen (1990). *Psicología educativa, un punto de vista cognoscitivo*. Editorial Trillas.

Camarena G. Patricia (1988). Reporte del proyecto de investigación titulado: Propuesta curricular para la academia de matemáticas del Departamento de ICE-ESIME-IPN.

Camarena G. Patricia (1990). Especialidad en docencia de la ingeniería matemática en *electrónica*. Editorial ESIME-IPN, México.

Camarena G. Patricia (1995). La enseñanza de las matemáticas en el contexto de la ingeniería. XXVIII Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana, México.

Camarena G. Patricia (1996). El contexto y las ecuaciones diferenciales lineales. Memorias del 6º Coloquio Académico de la ESIME-IPN, México.

Camarena G. Patricia (2000). Reporte de investigación titulado: *Los modelos matemáticos como* tapa de la matemática en el contexto de la ingeniería. ESIME-IPN, México.

Camarena G. Patricia (2001). Reporte de investigación titulado: *Registros cognitivos de la* matemática en el contexto de la ingeniería. ESIME-IPN, México.

Camarena G. Patricia (2002). La formación de profesores de ciencias básicas en ingeniería. *Memorias del* 3º nacional y 2º internacional: Retos y expectativas de la Universidad, México.

Camarena G. Patricia (2002). La matemática en el contexto de las ciencias: fase didáctica. *Acta*Latinoamericana de Matemática Educativa. Vol. 16, tomo I, Cuba.

Hsu W. (1970). *Análisis de Fourier*. Editorial Iberoamericana.

Muro U. Claudia y Camarena G. P. (2002). La serie de Fourier en el contexto del proceso de *transferencia de masa*. Revista "Científica" The Mexican Journal of Electromechanical Engineering. Volumen 6, No. 4.

Nickerson Raymond S., Perkins David N. y Smith Edward E. (1994). *Enseñar a pensar, aspectos* de la aptitud intelectual. Editorial Paidós.

Zúñiga S. Leopoldo (2003). Sobre las funciones cognitivas en el aprendizaje del cálculo diferencial de dos variables en el contexto de la ingeniería. XVII Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, Chile.

LAS ACTITUDES HACIA LA MATEMÁTICA Y EL RENDIMIENTO ACADÉMICO EN ALUMNOS DE CÁLCULO DIFERENCIAL

Margarita Véliz de Assaf y María Angélica Pérez de Negro.
Universidad Nacional de Tucumán. Argentina
mveliz@herrera.unt.edu.ar; mperez200@hotmail.com

Resumen

Como parte de un trabajo de investigación para la búsqueda de nuevas estrategias, con el fin de optimizar el aprendizaje de la Matemática, se abordaron una serie de actividades para evaluar las Actitudes hacia la Matemática (AHM) de los alumnos que cursaron Cálculo Diferencial en el año 2002, asignatura correspondiente a 1º año de nuestra Facultad. Se seleccionó una muestra al azar de 250 alumnos sobre un total de 1100 y se trabajó con una Escala Likert para las mediciones.
En este trabajo se muestra el grado de asociación entre el rendimiento y las AHM de los estudiantes, los niveles de asociación entre el rendimiento y cada uno de los aspectos mencionados, como así también la relación existente entre el rendimiento y los perfiles actitudinales construidos sobre la base de dichos aspectos.

Introducción

Como punto de partida para el estudio de las AHM, se indagó sobre los siguientes aspectos actitudinales: la dificultad percibida para el aprendizaje de la Matemática, el temor del alumno para trabajar en Matemática y para participar en clase, el gusto por la Matemática, percepción de comprensión, percepción de competencia para el aprendizaje, utilidad de la Matemática y la percepción del profesor.
En los resultados se presentan los niveles de asociación hallados entre el rendimiento y cada uno de los aspectos mencionados, como así también la relación existente entre el rendimiento y los perfiles actitudinales construidos sobre la base de dichos aspectos (desfavorable, neutro y favorable).
La evaluación de las actitudes se realizó en los mismos alumnos que la evaluación del rendimiento académico, con la finalidad de poder llegar a conclusiones que se puedan complementar. Sobre este tema existe abundante bibliografía internacional que sustenta la asociación entre rendimiento y actitudes. Esta bibliografía permite respaldar y guiar el proceso de evaluación, además de dar referentes para comparar los resultados.

Actitudes. Definición

Las actitudes son definidas como "la tendencia psicológica que se expresa a través de la evaluación favorable o desfavorable de una entidad en particular. Dicha entidad puede ser un objeto, una persona, un suceso o cualquier evento capaz de ser valorado" (Eagly y Chaiken, 1998: 269). El *objeto de actitud* en este caso es la Matemática.
La primera dificultad a que se enfrenta toda investigación en actitudes, se refiere al hecho de que éstas "son entidades no observables y no se traducen necesariamente en conductas" (Summers, 1976: 14)**.** Las actitudes son adquiridas; la forma en que se presentan es variada, proviniendo de experiencias positivas o negativas con el objeto

de la actitud, y/o modelos que pueden provenir de compañeros de clase, docentes, padres, materiales de estudio, etc.

La relevancia de las actitudes reside en la consistencia que tienen con la conducta. Lo que se espera es que si una persona tiene una actitud favorable hacia un determinado objeto, se comportará favorablemente hacia dicho objeto. Sin embargo, las actitudes, positivas o negativas, no siempre resultan en conductas consistentes con las mismas.

El estudio de las actitudes ha sido objeto de atención en el campo de la Psicología, y en especial entre los psicólogos sociales de las últimas décadas. Auzmendi (1992: 16) resalta que "las actitudes deben su fuerza motivacional a que producen ciertos sentimientos, placenteros o displacenteros en el sujeto".

Componentes de las actitudes

Las respuestas mensurables de la actitud se llaman componentes y son tres:

*componente cognoscitiv*o, definido por las creencias y percepciones de una persona sobre el objeto de la actitud.

*componente afectiv*o, definido por los sentimientos que el individuo tiene hacia el objeto de la actitud y la intensidad de los mismos. Este componente considera el aspecto esencial de una actitud, a tal punto que algunos investigadores lo tratan como si fuera la actitud misma.

componente de voluntad o conductual, definido por la respuesta que el sujeto tendría en reacción al objeto de la actitud. Tiene que ver con la probabilidad o con la tendencia de que un alumno emprenda una acción específica o se comporte de una forma particular.

"Una visión amplia del tema de las actitudes como campo de investigación, debe tener en cuenta los tres componentes básicos de toda actitud: cognoscitivo, afectivo y conductual" (Auzmendi, 1992: 17).

Instrumento

Para evaluar actitudes pueden considerarse varios tipos de instrumento. En este trabajo se utilizó el de informes acerca de sí mismo o autoevaluaciones, aplicado colectivamente, con descripción del sujeto. Esta forma de aplicación es la más popular según Summers (1976: 25), ya que con un instrumento se recogen las expresiones de cada uno de los sujetos en una toma colectiva de datos.

Variables

Respecto a las variables que se miden, una actitud puede considerarse una variable continua. Las variables de actitud, como creencias, preferencias e intenciones, son medidas con escala de clasificación. Tales escalas proporcionan a los entrevistados un conjunto de categorías numeradas que representan el rango de juicios de posiciones posibles. En este trabajo, utilizamos la Escala Lickert para las mediciones, llamada "*escala totalizada o aditiva"* porque los resultados de las afirmaciones individuales se suman para presentar un puntaje total. Es una escala graduada que va del "Totalmente desfavorable o en desacuerdo" al "Totalmente favorable o de acuerdo", utilizando el intervalo del "1 al 5".

Investigaciones sobre actitudes hacia la Matemática y rendimiento académico
Estudios internacionales han mostrado que existe una relación significativa y directa entre las actitudes de los alumnos y el rendimiento en Matemática. Entre ellos, el estudio del TIMSS (Third Internacional Math and Science Study) realizado entre 1994 y 1995 con la participación de más de 40 países, en el que se concibieron las actitudes como un insumo para facilitar el aprendizaje cognoscitivo y como un producto deseable de cualquier sistema educativo. Los resultados varían por países y niveles educativos. En conjunto, se muestra una relación positiva entre el gusto por la Matemática y las puntuaciones obtenidas en pruebas de esta asignatura.
Los estudios del Nacional Assesment of Education Progress (NAEP) realizados entre 1994 y 1996 en EE.UU. revelaron que existe asociación entre el gusto por la Matemática y la disposición de los alumnos para estudiarla.
Si bien en los estudios mencionados, y en general en la literatura que trata sobre el tema, se muestra la asociación de las actitudes con el desempeño de los estudiantes. Es preciso considerar que puede darse el caso de un alumno que alcance un nivel de rendimiento satisfactorio, y tenga una actitud desfavorable frente a la asignatura. De esta manera, una actitud favorable no garantiza un mejor rendimiento, aunque sí eleva la probabilidad de que éste se dé.
Es importante mencionar que la relación entre actitud y rendimiento es bidireccional y compleja. Desde la psicología educativa se postula que la participación activa del alumno en clase favorece su involucramiento en el proceso educativo y, por tanto, su nivel de desempeño y logro.

Desarrollo
Este estudio se llevó a cabo mediante una muestra de tamaño 250, seleccionada aleatoriamente de los 1100 alumnos inscriptos para cursar Introducción al Análisis Matemático (Cálculo Diferencial) en el año 2002. Se aplicó el instrumento para medir actitudes al comienzo y al final de cursada de la asignatura, que contenía los componentes cognoscitivo, afectivo y conductual. Los resultados de las afirmaciones individuales se sumaron para presentar un puntaje total para cada alumno. A cada reactivo se le dio la misma dirección, en todos los casos “hacia la Matemática”, obteniéndose los distintos niveles actitudinales que se utilizaron en esta investigación (Veliz y Pérez, 2003).

Cuadro Nº 1: Distribución conjunta del gusto por la Matemática observada al comienzo y final del dictado de Introducción al Análisis Matemático. Año 2002.

Gusto por la Matemática—Al final	Gusto por la Matemática—Al comienzo. %			Total
	Agrado	Indiferente	Desagrado	
Agrado	25.0	14.1	13.0	52.1
Indiferente	8.2	11.7	18.7	38.6
Desagrado	0.0	2.3	7.0	9.3
Total	33.2	28.1	38.7	100.0$_{(250)}$

La concordancia en las respuestas al comienzo y al final de esta variable categórica ordinal se midió con el estadístico no paramétrico Somer's (Siegel, 1995: 346), que nos indica el grado de concordancia entre el gusto por la Matemática observado en dos momentos (al comienzo y final del dictado de la asignatura). En este caso, el estadístico Somer's D = 0,3473 nos indica una leve concordancia. Las frecuencias porcentuales indicadas en la diagonal principal del cuadro son las que manifiestan permanencia o acuerdo entre el gusto antes y después. Podemos decir que los que tuvieron una actitud positiva al comienzo (33.2 %) en un pequeño porcentaje (8.2 %) no la mantuvieron declarándose al final indiferentes. Los que se manifestaron inicialmente indiferentes (28.1%), en un porcentaje considerable (14.1%) se ubicaron luego en el agrado, el (11.7%) permanecieron en la indiferencia, y el resto (2.3%) pasó al desagrado. Los que manifestaron al comienzo una tendencia negativa hacia la Matemática, en su gran mayoría la dirigieron al final hacia una actitud más positiva.
De igual modo se analizaron todos los aspectos actitudinales considerados.
Este estudio, nos llevó a analizar también la relación existente entre los aspectos actitudinales y el rendimiento académico de los alumnos.

Rendimiento académico

El rendimiento académico es una expresión valorativa particular del logro alcanzado por los alumnos, correspondiente a un período dado en el proceso educativo, que se presenta en el área del conocimiento, y en el marco de una institución. Se eligió como indicador del rendimiento académico, las calificaciones obtenidas por los alumnos en las tres pruebas parciales y la calificación final del curso de Introducción al Análisis Matemático, porque se consideró que éstas pueden reflejar el avance que tuvieron los alumnos en lo explícito, en el cuatrimestre en que se dictó la asignatura, bajo las condiciones que institucionalmente se fijaron.

Relaciones entre variables

En el Cuadro Nº 2 se muestra los porcentajes de los alumnos que se ubican en cada uno de los aspectos actitudinales estudiados, así como el rendimiento académico en las medias de las calificaciones de los exámenes parciales y final para cada uno de esos aspectos. Se observa que los mayores porcentajes se encuentran en las categorías consideradas como favorables y que los promedios de las calificaciones en cada uno de los exámenes considerados para las categorías favorables se encuentran por encima de la media general de cada uno de los exámenes. Por lo que se puede apreciar que el rendimiento está asociado positivamente con las respuestas a las preguntas consideradas para el estudio.

Cuadro Nº 2: Distribución de los alumnos y medias de las calificaciones en los exámenes según las categorías de los aspectos considerados. Introducción al Análisis Matemático. Año 2002.

Aspectos Actitudinales	Categorías---- %		Calificación Promedio 1º parcial μ= 6.9	2º parcial μ=5.3	3º parcial μ=6.0	Examen final μ=5.7
Temor	No manifiesta	**87.0**	7.0	5.5	6.5	5.9
	Si manifiesta	**13.0**	5.8	4.5	5.1	4.9
Gusto	Agrado	**33.1**	7.3	5.8	6.4	5.9
	Indiferente	**28.4**	6.8	5.0	5.6	5.6
	Desagrado	**38.4**	6.5	4.9	5.3	5.1
Percepción de competencias para el aprendizaje	Alta	**72.0**	7.0	5.4	6.2	5.7
	Baja	**18.0**	6.5	4.8	5.4	5.2
Percepción del profesor	Buena	**86.0**	7.0	5.3	6.3	6.0
	Mala	**14.0**	6.5	4.8	5.4	4.6
Dificultad percibida para el aprendizaje	Sin dificultad	**51.0**	7.3	5.9	6.3	6.0
	Alguna dificultad	**40.0**	6.2	5.1	5.6	5.3
	Con dificultad	**9.0**	5.8	4.9	5.1	5.2
Percepción de comprensión	Buena	**84.0**	7.3	5.9	6.0	6.6
	Mala	**16.0**	6.7	5.2	5.5	5.8

Se determinó que en cada una de las categorías del rendimiento en el examen final (malo, regular, y bueno), las frecuencias decrecen con respecto a las categorías del gusto excepto los de rendimiento malo que su gusto se manifiesta en la indiferencia y el desagrado.

Otro aspecto importante estudiado es la percepción del profesor con respecto al rendimiento.

Es significativamente diferente el rendimiento de los alumnos con experiencias de buenos profesores que los que manifiestan experiencias con malos profesores. Para ellos se realizó un test estadístico de rangos no paramétrico de Kruskal-Wallis entre los dos grupos independientes (con experiencia de buenos y malos profesores). Se testó la hipótesis nula "No existen diferencias entre los rendimientos de ambos grupos". El estadístico de prueba KW = 10,2423 P-Value = 0,0013, con lo que se rechaza la hipótesis nula aceptando que el rendimiento en ambos grupos es diferente.

En el Cuadro Nº 3 se puede observar la relación existente entre el rendimiento y los niveles actitudinales construidos sobre la base de dichos aspectos.

Cuadro Nº 3: Medias de los Rendimientos en los Exámenes según los niveles actitudinales. Introducción al Análisis Matemático. Año 2002.

Examen	Niveles Actitudinales Desfavorable (18,3%)	Neutro (36,6%)	Favorable (45,1%)	Anova F	Prob
1º Parcial	5.36	5.94	6.53	3,26	0,039
2º Parcial	5.02	5.08	5.72	3,03	0,050
3º Parcial	5.18	5.83	6.1	6.14	0.002
Final	5.1	6.0	6.6	3,26	0,039

El test Anova realizado en cada uno de los niveles actitudinales, indica para cada uno de los exámenes, que existen diferencias significativas entre las medias de cada uno de ellos, siendo la del nivel favorable diferente a la del desfavorable.

Conclusiones

Del estudio de la variable Actitud hacia la Matemática, y de su relación con el rendimiento académico de los alumnos, se desprende que:

Los aspectos actitudinales analizados son muy relevantes en el rendimiento, ya que las respuestas que denotan una actitud favorable se relacionan de manera directa con el nivel de logro académico alcanzado por los alumnos.

Los resultados encontrados, sugieren la importancia de la dimensión afectiva del aprendizaje sobre el rendimiento académico de los estudiantes.

La recepción de los contenidos por parte de los alumnos, la comprensión de la información que reciben, el sentimiento de competencia para el aprendizaje expresado por su seguridad, y el gusto por la materia, tienen una asociación significativa con el rendimiento, aunque la magnitud de cada aspecto sobre la variable rendimiento es diferente. Esto nos sugiere que para lograr un mejor rendimiento, es necesario que los alumnos se sientan competentes para aprender, comprendan los contenidos que se trabajan en clase, cuenten con un ambiente en el aula que estimule y motive sus participaciones.

Este estudio sugiere la existencia de una fuerte relación entre el rendimiento académico de los alumnos y el gusto por la Matemática, como así también con la percepción del profesor.

Los alumnos con buen rendimiento académico tienen una actitud más positiva hacia la Matemática.

Bibliografía

Auzmendi Escribano, E. (1992). Las actitudes hacia la Matemática – estadística en las enseñanzas media y universitaria. Características y medición, Editorial Mensajero, Bilbao, España.

Eagly, A. y Chaiken, S. (1998)"Attitude Structure and Function", en Gilbert, D.T.; Fiske, S.T. y Lindzey, G., *The handbook of Social Psichology,* vol 1, pp. 269 – 322, Mc. Graw Hill, 4º edición, New York.

Morales, F. (1994). *Psicología Socia*l. Madrid: Mc Graw-Hill/Interamericana, España.

NAEP *(The National Assessment of Educational Progress).* (1994) NAEP 1994 Trends in Academic Progress http://nces.ed.gov/nationsreportcard/site/home.asp

Rodríguez, A. (1990). *Psicología Social,* Editorial Trillas, México.

Siegel, S. y Castellan, N. J. (1995). *Estadística no paramétrica,* Editorial Trillas, México.

Summers, G. F. (1976). Medición de actitudes, Editorial Trillas. México.

TIMSS (Third International Mathematics and Science Study). (1998). Mathematics and Science Achievement in the final year of secondary school: *Third International Mathematics and Science Study.* http://timss.bc.edu/TIMSS1/Achievement.html

Valdez Coiro, E. (2000). *Rendimiento y actitudes*, Grupo Editorial Iberoamérica, México.

Veliz, M. y Pérez, M.A. (2003). Estudio diagnóstico: las actitudes hacia la Matemática en alumnos de primer año del nivel superior, trabajo presentado en el *VSEM, V Simposio de Educación Matemática*, Chivilcoy, Buenos Aires.

LAS CREENCIAS DE LOS ALUMNOS Y SU PROCEDER FRENTE A LA RESOLUCION DE PROBLEMAS DE APLICACIÓN

Lucía Martín de Pero y María Angélica Pérez de del Negro.
Universidad Nacional de Tucumán- Argentina.
lmartin@herrera.unt.edu.ar - mperez200@hotmail.com

Resumen

Este trabajo surge como una necesidad de mejorar la predisposición de los estudiantes de cálculo diferencial hacia la resolución de problemas. El marco teórico del trabajo se basa en la actual Psicología Cognitiva y en los aportes que a la teoría constructivista realizaron Piaget, Vigostky, Bruner, Ausubel y otros. Para la investigación se pidió a los alumnos que respondieran un cuestionario, diseñado con el propósito de captar sus creencias y concepciones espontáneas frente a la resolución de problemas, y que resolvieran una situación problemática donde debían aplicar conceptos aprendidos en el curso anterior correlativo de la asignatura, con el propósito de analizar el procedimiento empleado para arribar a la solución pedida. Las respuestas al cuestionario permitieron conocer sí el alumno: posee hábitos para resolver problemas, tiene dificultades en la resolución de los mismos, reconoce su estructura, y si utiliza toda la información contenida en el enunciado del mismo para resolverlo. En la evaluación del procedimiento seguido para solucionar la situación problemática propuesta, se determinó sí el alumno: plantea el problema, identifica los conocimientos previos necesarios y si utiliza un razonamiento válido para arribar a la solución. Del análisis de las variables se puede concluir que *no hay concordancia* entre las creencias de los alumnos y los procedimientos que emplean para resolver problemas. Por ello se considera que la tarea docente debe realizarse teniendo en cuenta los conocimientos previos adquiridos por los estudiantes para construir aprendizajes significativos. La investigación realizada sirve como soporte para explorar que estrategias son necesarias ofrecer a los alumnos con el propósito de ayudarlos a resolver problemas.

Introducción

La tarea docente a lo largo de los años permite observar que los alumnos no se manifiestan motivados frente a la resolución de situaciones problemáticas. Con deseos de mejorar la práctica en el aula se lleva a cabo una investigación que permita conocer algunas de las causas que provocan esta situación. En nuestro país en los últimos años, docentes e investigadores en el área de la matemática se han preocupado por incorporar entre sus temas de análisis la resolución de problemas, sus experiencias permiten afirmar que las principales causas de la incapacidad de los estudiantes para la resolución de problemas, no están localizadas en la asimilación del contenido sino que sus limitaciones se centran principalmente en la imposibilidad de aplicar o transferir el conocimiento adquirido a la solución de problemas. Es por ello que se trabaja con las creencias que los alumnos tienen sobre la matemática y los conocimientos previos con que ingresan a las aulas, con el fin de facilitar su aprendizaje.

Los alumnos, sus creencias e ideas previas

Las creencias que los alumnos tienen sobre el aprendizaje de la matemática inciden desfavorablemente en su calificación. Entre ellas pueden mencionarse:
La matemática es cálculo por lo tanto implica seguir y memorizar reglas.
Los problemas de matemática deben ser resueltos rápidamente y en pocos pasos.
Los problemas de matemática tienen una sola respuesta.

El papel del estudiante en la clase de matemática es recibir los conocimientos del profesor.
Los estudiantes normales no son capaces de comprender la matemática, solo pueden aspirar a memorizarla.
La matemática que se enseña en la escuela no tiene nada que ver con el mundo real.
(Adaptación de la tabla presentada por Schoenfeld, 1992:359, según María del Puy Perez Echeverría en “La Solución de Problemas”, 1997:58).
Es frecuente que los docentes organicen sus clases considerando el punto de vista de la disciplina y sólo teniendo en cuenta que unas cuestiones preceden a otras como si todas ellas tuvieran la misma dificultad para el alumno y olvidando considerar lo que el estudiante ya sabe sobre el tema a enseñar, puesto que el nuevo conocimiento se asentará sobre el viejo. Por lo tanto, será fundamental para el docente no sólo conocer las representaciones que poseen los alumnos sobre lo que se les va a enseñar, sino también analizar el proceso de interacción entre el conocimiento nuevo y el que ya poseen.
Según Pozo, (1990): “Se produce aprendizaje cuando hay un cambio relativamente permanente en la conducta o en los conocimientos de una persona como consecuencia de la experiencia”. Si adoptamos esta definición de aprendizaje, resulta entonces fundamental partir de los conocimientos previos de los alumnos para poder organizar las estrategias de enseñanza que permitan el aprendizaje de nuevos contenidos. Para comprobar si éste se produjo, es indispensable evaluar las diferencias entre lo que el alumno sabía y lo que ha podido asimilar, con la consiguiente modificación de sus conocimientos previos.
Otro aspecto que presenta esta definición de aprendizaje es la permanencia del cambio generado. Es decir, para lograr un verdadero aprendizaje, el cambio debe ser lo más duradero posible. Esto sólo ocurre cuando se produce un aprendizaje significativo.
Según Ausubel, un aprendizaje es significativo cuando se cumplen ciertas condiciones:
los contenidos por enseñar deben tener significado en sí mismos, es decir, deben estar organizados en una estructura lógica. Esta estructura contiene conceptos generales, amplios llamados inclusores, los que vienen a construir los conocimientos previos indispensables para alcanzar otro aprendizaje significativo.
el que aprende debe estar predispuesto a hacerlo y poseer ideas que puedan activarse para comprender los nuevos contenidos.
Es así como construimos significados cada vez que somos capaces de establecer relaciones trascendentes y no arbitrarias entre lo que aprendemos y lo que ya conocemos.
Si tenemos en cuenta el Diseño Curricular Base (1989:31-34) del Ministerio de Educación, observamos que se establecen una serie de principios generales, actividades y elementos que conciernen a las capacidades y disposiciones del individuo que aprende. Se hace referencia a:
Partir del nivel de desarrollo del alumno.
Asegurar la construcción de aprendizajes significativos.
Posibilitar que los alumnos realicen aprendizajes significativos por sí solos.
Procurar que los alumnos modifiquen sus esquemas de conocimiento.

Establecer relaciones ricas entre el nuevo conocimiento y los esquemas de conocimiento ya existentes.
Citado por Carretero, M. (2001:19-20).
Estos principios se basan en las teorías constructivistas, de Piaget, Vigotsky, Ausubel y la actual Psicología Cognitiva. Según el Constructivismo, el conocimiento no es una copia de la realidad sino una construcción del ser humano que se realiza con los esquemas que ya posee, que construyó en su relación con el medio que lo rodea.
El profesor debe prestar atención a las ideas previas de los alumnos, tanto a las que poseen antes de que comience el proceso de aprendizaje como a las que se irán generando durante ese proceso. De tal forma que no es tan importante el producto final que emite el alumno como el proceso que lo lleve a dar una determinada respuesta. A menudo los profesores sólo prestamos atención a las respuestas correctas que nos dan nuestros alumnos y no consideramos *los errores*, que son precisamente los que nos informan sobre como se está reelaborando el conocimiento que ya poseen a partir de la nueva información que reciben. Generalmente los errores que los alumnos cometen tienen una clara regularidad y se deben a procesos de comprensión inadecuada que se suceden curso tras curso. De ahí la importancia que el docente debe dar a las llamadas *"ideas previas"* de los alumnos.

La investigación

Para la investigación se seleccionó una muestra conformada por 672 alumnos de una población de 1100 alumnos que cursan el primer año en la Facultad de Ciencias Económicas de la U.N.T. El instrumento de medición fue un cuestionario, implementado al inicio de las clases, diseñado con el propósito de captar las creencias y concepciones espontáneas de los alumnos frente a la resolución de problemas. Además se pidió a los alumnos que resolvieran una situación problemática donde debían aplicar conceptos aprendidos en el curso anterior correlativo de la asignatura, con el objetivo de analizar el procedimiento empleado para arribar a la solución pedida.

Las creencias de los alumnos sobre la resolución de problemas.

Las preguntas que conforman el cuestionario y los resultados obtenidos se muestran a continuación:
¿En cursos anteriores se ha ejercitado en resolución de problemas de matemática?
¿La resolución de problemas de matemática le presentó dificultades?
Dado el enunciado de un problema, ¿reconoce los datos y las incógnitas?
¿Utiliza toda la información del enunciado del problema para resolverlo?

Cuadro Nº 1: Resultados de la captación de las creencias de los alumnos

Resultados del cuestionario	%
Dice que se ha ejercitado en resolución de problemas en cursos anteriores	79
Dice que tuvo dificultades en la resolución de problemas	70
Dice que reconoce los datos e incógnitas del enunciado de un problema	72
Dice que utiliza toda la información del enunciado para resolver un problema	78

Entre las creencias de los estudiantes se observa que una gran mayoría se ha encontrado frente a situaciones de resolución de problemas en sus estudios anteriores y que también han tenido dificultades en las mismas a pesar de que aseguran reconocer los datos e incógnitas e utilizar toda la información disponible en el problema.
Las respuestas a estas interrogaciones se cotejaron con la predisposición de los alumnos frente a la resolución de un problema de contexto realista. En la elaboración del problema presentado se tuvieron en cuenta los conceptos adquiridos en cursos anteriores.

Aspectos de la evaluación de un problema

En la selección del problema se consideraron los siguientes aspectos:
La motivación a través de una aplicación a la economía.
La aplicación de conocimientos vistos en asignaturas precedentes de la disciplina matemática, a saber: identificación de ecuaciones de curvas, sus elementos y las operaciones algebraicas necesarias para su empleo en aplicaciones.
La capacidad de razonamiento lógico – matemático para su resolución.
En la evaluación de la situación problemática se puso énfasis en determinar sí el alumno realiza las siguientes secuencias:
Plantea el problema.
Identifica los conceptos previos necesarios.
Utiliza un razonamiento válido.
Cuando se evalúa el planteo del problema se hace referencia a la identificación a través de expresiones algebraicas de las condiciones, contenidos y exigencias presentadas en el enunciado, es decir, la transformación del enunciado al lenguaje matemático.
Por razonamiento válido, se acepta cualquier procedimiento correcto utilizado por el alumno que le permita arribar a la solución pedida.

Cuadro Nº 2: Resultados de los aspectos de la evaluación del problema

Aspectos de la evaluación del problema	%
Plantea el problema.	66
Identifica los conceptos previos necesarios	49
Utiliza un razonamiento válido	15

A medida que se avanza en el análisis de los aspectos de la evaluación del problema propuesto se observa un aumento en las dificultades para resolver la situación planteada.

Relaciones entre las creencias de los alumnos sobre como resuelven problemas y los aspectos de la evaluación de la resolución del problema propuesto

Los resultados obtenidos de las respuestas del cuestionario, referido a las creencias de los alumnos sobre como resolver un problema, se contrastaron con los aspectos considerados en la evaluación del problema propuesto. Para medir si existió o no acuerdo entre lo que los alumnos creen y lo que realizaron, se utilizó el índice de concordancia Kappa, propuesto originalmente por Cohen (1960) para el caso de dos

criterios de evaluación. Es el estudio de fiabilidad por equivalencia entre observadores. Sieguel y Castellán (1995 p: 325).
Los resultados del análisis de concordancia se muestran a continuación, en él se detallan el valor del coeficiente Kappa y de la prueba de hipótesis: H_0: Kappa = 0 (ausencia de concordancia), contra la hipótesis alternativa H_1: Kappa >0 (existe alguna concordancia). Esta prueba de hipótesis se realiza teniendo en cuenta que en muestras grandes, Kappa se distribuye de manera aproximadamente normal con media cero y varianza Var (Kappa).
Los cuadros siguientes presentan los resultados obtenidos, en todos ellos se observa una concordancia débil entre las variables dado el valor obtenido para el coeficiente.

Cuadro Nº 3: Identifica conceptos previos con dice que se ha ejercitado en resolución de problemas, que tuvo dificultades, que reconoce datos e incógnitas y que utiliza toda la información del enunciado para resolver un problema

		Identifica conceptos previos		**Totales**	**Coeficiente Kappa Estadístico z[p]**
		Si %	**No %**	**%**	
Dice que se ha ejercitado en resolución de problemas en cursos anteriores	**Si**	39	40	**79**	**K =0.04 Z = 1.063[0.1446]**
	No	10	11	**21**	
Totales		**49**	**51**	**100(678)**	
Dice que tuvo dificultades en la resolución de problemas	**No**	16	14	**30**	**K =0.06 Z =1.57[0.0582]**
	Si	33	37	**70**	
Totales		**49**	**51**	**100(678)**	
Dice que reconoce datos e incógnitas del enunciado de un problema	**Si**	36	36	**72**	**K =0.02 Z =0.63[0.2643]**
	No	13	15	**28**	
Totales		**49**	**51**	**100(678)**	
Dice que utiliza toda la información del enunciado para resolver un problema	**Si**	39	39	**78**	**K =0.04 Z =1.05[0.1469]**
	No	10	12	**22**	
Totales		**49**	**51**	**100(678)**	

El 50% de los alumnos muestra incoherencia entre su creencia de que se ha ejercitado en la resolución de problemas y su capacidad para identificar conceptos previos.
Se observa que el 37% de los alumnos presenta dificultades en la resolución de problemas y no identifica conceptos previos. Se destacan los que dicen tener dificultades y sí identifican conceptos previos.
Es relevante a los efectos del diagnóstico que los alumnos (36%) creen que reconocen datos, incógnitas y exigencias del problema y no identifican los conceptos previos.
A su vez el (39%) de los alumnos utiliza toda la información contenida en el enunciado del problema pero no identifica conceptos previos.

Cuadro Nº 4: utiliza un razonamiento válido con dice que se ha ejercitado en resolución de problemas, que tuvo dificultades, que reconoce datos e incógnitas y que utiliza toda la información del enunciado para resolver un problema

		Utiliza un razonamient o válido		**Totales**	**Coeficiente Kappa** **Estadístico z[p]**
		Si %	**No %**	**%**	
Dice que se ha ejercitado en resolución de problemas en cursos anteriores	**Si**	13	66	**79**	**K =0.04** **Z =1.56[0.059]**
	No	2	19	**21**	
Totales		**15**	**85**	**100(678)**	
Dice que tuvo dificultades en la resolución de problemas	**No**	7	23	**30**	**K =0.1** **Z =2.875[0.0021]**
	Si	8	62	**70**	
Totales		**15**	**85**	**100(678)**	
Dice que reconoce datos e incógnitas del enunciado de un problema	**Si**	12	60	**72**	**K =0.04** **Z =1.49[0.0668]**
	No	3	25	**28**	
Totales		**15**	**85**	**100(678)**	
Dice que utiliza toda la información del enunciado para resolver un problema	**Si**	13	65	**78**	**K =0.02** **Z =1.12[0.1314]**
	No	2	20	**22**	
Totales		**15**	**85**	**100(678)**	

Un 79% de los alumnos dice que se ejercitó en resolución de problemas pero unos pocos (13%) utilizan un razonamiento válido.
Existe un 62 % de concordancia entre los que dicen tener dificultades y no utilizaron un razonamiento válido.
El 72% de los alumnos dicen que reconocen datos e incógnitas pero sólo unos cuantos utiliza un razonamiento válido.

Es importante la falta de acuerdo entre los que dicen que utilizan toda la información del enunciado y no utilizan un razonamiento válido.

Conclusiones

Los resultados observados muestran una concordancia muy débil entre las creencias de los alumnos y sus competencias frente a la resolución de un problema propuesto.

La evaluación de los procedimientos seguidos en la resolución del problema permite conocer los errores que comete el alumno y a partir de allí que conceptos están bien aprendidos y cuáles son necesarios repasar para mejorar la práctica docente. Las mayores dificultades de los alumnos se presentan en su falta de capacidad para transferir lo aprendido en cursos anteriores a situaciones nuevas y para utilizar un razonamiento que les permita arribar a la solución del problema propuesto.

Estas dificultades son elementos de diagnóstico importante para el inicio de acciones futuras donde se propongan a los alumnos estrategias que les ayuden a resolver problemas.

Bibliografía

Cabañas, Ma. Guadalupe. (2000). *Los problemas...¿Cómo enseño a resolverlos?*. México, D.F.: Grupo Editorial Iberoamérica - S.A. de C.V.

Carretero, Mario (1993). *Constructivismo y Educación*. Argentina: Aique Grupo Editor S.A.

Pozo, Juan. (1999). *La Solución de Problemas*. Argentina: Santillana.

Rosas, Sebastián. (2001). *Piaget, Vigostki y Maturana Constructivismo a tres voces.* Argentina: Aique Grupo Editor S.A.

Santos Trigo, Luz. (1994). La Resolución de Problemas en el Aprendizaje de las Matemáticas. México, D.F.: CINVESTAV.

Siegel, S y Castellán N. (1995). Estadística no paramétrica aplicada a las ciencias de la conducta. México: Editorial Trillas.

RECONSTRUCCIÓN DE SIGNIFICADOS DE LA PRIMITIVA Y DERIVADA EN AMBIENTES GRÁFICOS; LA ARGUMENTACIÓN COMO PARTE ESENCIAL DE LA ACTIVIDAD HUMANA

María Antonieta Aguilar Víquez
Instituto Tecnológico de Pachuca, CICATA,IPN, México
auva5404@prodigy.net.mx

Resumen

En el sistema educativo nacional, existe una confrontación entre la obra matemática y la matemática escolar, hacemos esta afirmación, junto a Cordero (2001) puesto que a lo largo de nuestra práctica docente y como investigadores, nos hemos percatado de la presencia de prácticas sociales de la actividad humana tales como: modelar, aproximar, predecir, medir, buscar tendencias (Aguilar, 2002) y otras, que no han sido integradas a la currícula de las instituciones en donde se imparte el Cálculo a nivel superior. Sin embargo estas prácticas sociales han permitido construir cierto tipo de conocimiento conducente a la reconstrucción de significados en el área del Cálculo y Análisis así como temas afines. En la actividad humana se forman y distinguen construcciones del conocimiento que se dan en las situaciones de interacción que viven a diario en el aula el estudiante y el profesor. Debido a que en esta actividad el conocimiento tiene significados propios y esta conformado por versiones que se comparan y negocian durante el proceso mismo de la actividad, diversos significados se van redefiniendo. De esta manera se esta llevando a cabo una reconstrucción de significados de los procesos y conceptos matemáticos en los diferentes niveles escolares. El estudio que nos ocupa esta centrado básicamente en la relación entre la función primitiva y su derivada cuya fórmula analítica esta dada por: $\int f'(x)\,dx = f(x)$. Esta expresión nos permite colocar a los estudiantes en diferentes escenarios. Uno de ellos consiste en discutir aspectos de la función primitiva $f(x)$ a través de la información gráfica de la función derivada $f'(x)$, sin considerar explícitamente las expresiones de las funciones. Otra interpretación (escenario) consiste en considerar a la función primitiva $f(x)$ como el área bajo la curva, donde la curva representa la derivada $f'(x)$. *Resultando la propiedad de función creciente o decreciente para la función primitiva.* En este reporte damos cuenta de cómo los estudiantes resignifican ciertos tópicos del Cálculo cuando se les coloca en situaciones diseñadas con ese propósito, para ello utilizamos a la aproximación Socioepistemológica como línea de investigación, la Teoría de Situaciones Didácticas como marco teórico y la Ingeniería Didáctica como metodología.

Introducción

Hemos encontrado en investigaciones previas que las actividades llevadas a cabo en el aula, referentes a situaciones específicas de Cálculo, consisten por ejemplo, en que a partir de una información gráfica que representa a la derivada de cierta función, se determina la gráfica de la función primitiva y viceversa. Profundizando en el estudio de la aproximación Socioepistemológica, y revisando otras investigaciones de nuestros colegas que trabajan en la misma línea llegamos a la conclusión de que dichas actividades corresponden a actividades humanas o prácticas sociales. Pretendemos que el objeto de estudio incluya así a las actividades necesarias para construir al objeto, lo cual implica dotar de importancia al desarrollo y uso de las herramientas para construir dicho objeto y al papel de la persona y del contexto sociocultural en el cual se lleva a cabo la actividad. De esta manera, la epistemología planteada brindará explicaciones en función de las características propias del humano al hacer matemáticas en contextos socialmente organizados.

Esta perspectiva atiende la problemática fundamental de la disciplina matemática educativa en la cual se confrontan la obra matemática y la matemática escolar.

Ambas son de naturaleza y funciones distintas; sin embargo, la segunda requiere interpretar y reorganizar a la primera, a través de la reconstrucción de significados de los procesos y conceptos matemáticos en los diferentes niveles escolares. El resultado de esta reconstrucción de significados es el establecimiento de categorías del conocimiento matemático extraídas directamente de la actividad humana. En ese sentido, se plantea como hipótesis que la actividad es la fuente de reorganización de la obra matemática y del rediseño del discurso matemático escolar. (Cordero, 2001)
La aproximación socioepistemológica formula una línea de investigación que no sólo considera epistemologías modelizadas a través de la actividad matemática sino busca hacerlo a través de la actividad humana. Y consecuentemente busca una nueva base didáctica (como ciencia) para que la matemática escolar reorganice la obra matemática. En este contexto, hemos encontrado que la Teoría de situaciones Didácticas, nutre a la aproximación socioepistemológica de manera ad hoc, de tal suerte que podemos articularla con la Ingeniería Didáctica para poder desarrollar y diseñar de manera sistémica nuestras situaciones didácticas, que es la parte medular del presente reporte de investigación.
El presente proyecto se ubica en la línea de investigación que consiste en construir una explicación sistémica de los fenómenos didácticos en el campo de las matemáticas por medio de cuatro componentes fundamentales del conocimiento matemático: la epistemología, la cognición, la didáctica y la dimensión sociocultural. A estas componentes en conjunto se le llama aproximación socioepistemológica, cuya tarea principal de investigación consiste en dar evidencias sobre la siguiente hipótesis: la actividad humana es la fuente de la reorganización que implicará el "rediseño del discurso matemático escolar" (Cantoral, 2000).

Sobre la teoría de situaciones didácticas
"La didáctica de las matemáticas" estudia las actividades didácticas, es decir, las actividades que tienen por objeto la enseñanza, evidentemente en lo que tienen de específicas respecto de las matemáticas. Los resultados, en este dominio, son cada vez más numerosos, se refieren a los comportamientos cognitivos de los alumnos, pero también a los tipos de situaciones puestas en juego para enseñarles y sobre todo los fenómenos a los cuales da lugar la comunicación del saber. La producción o la mejora de los medios de enseñanza encuentra en estos resultados más que objetivos o medios de evaluación, encuentra en ella un apoyo teórico, explicaciones, medios de previsión y de análisis, sugerencias, incluso dispositivos y métodos, Brosseau (1986).
Es indispensable una buena teoría epistemológica acompañada de una buena ingeniería didáctica.
La didáctica estudia la comunicación de los saberes y tiende a teorizar su objeto de estudio, pero no puede responder a este desafío más que con las siguientes condiciones:
- Poner en evidencia fenómenos específicos que parecen explicados por los conceptos originales que propone,

Indicar los métodos de pruebas específicas que utiliza para ello.
Estas dos condiciones son indispensables para que la didáctica de las matemáticas pueda conocer de forma científica su objeto de estudio y permitir así acciones controladas sobre la enseñanza.

La ingeniería didáctica

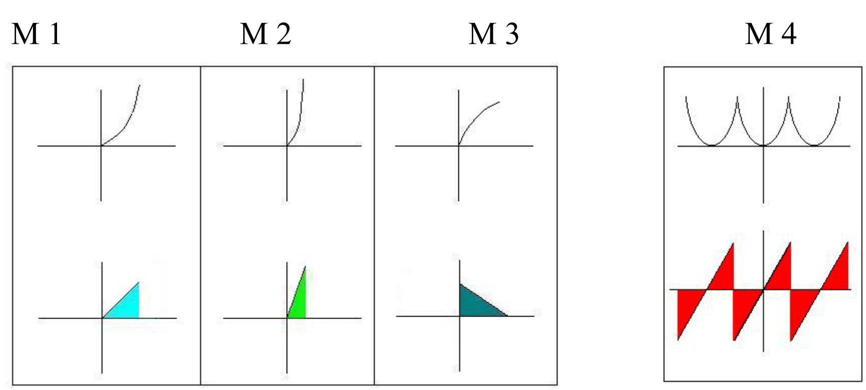
Artigue (1995) menciona que la ingeniería didáctica, como metodología de investigación, se caracteriza por un esquema experimental basado en las realizaciones didácticas en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza. Su forma de validación es en esencia interna, basada en la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori. Es por eso que en la presente investigación continuaremos diseñando situaciones que nos muestren las actividades que realizan los estudiantes alrededor de las resignificaciones de las relaciones entre primitivas y derivadas específicamente en lo referente al Teorema Fundamental del Cálculo en el contexto área bajo la curva, así como las herramientas que entran en juego. De esta manera, consideramos que estamos proponiendo una ingeniería correspondiente a ese tópico del Cálculo o análisis matemático.

En el análisis preliminar realizaremos una epistemología de los contenidos contemplados, de la misma manera como se ha hecho para las secuencia presentadas en este reporte de investigación. En el análisis a priori, serán los elementos obtenidos de dicha epistemología los que permitan predecir los comportamientos de los estudiantes. De esta manera, podemos hablar de una epistemología inicial que, después de la puesta en escena, adquirirá elementos que la irán enriqueciendo continuamente. En estas fases de experimentación, se podrá obtener evidencia acerca del tipo de argumentos, de las herramientas utilizadas y sobre todo, de cómo se presenta una orientación hacia el consenso en los contextos sociales interactivos. Esto nos hablaría de las reconstrucciones de significados que se estén llevando a cabo. Así, la validación de la socioepistemología de las relaciones entre primitivas y derivadas en el contexto ya mencionado se basará en una confrontación con lo observado en los procesos interactivos.

Diseño

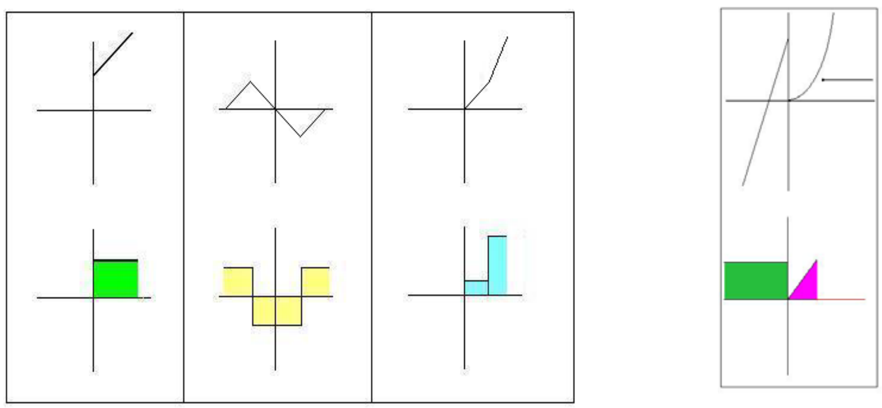
El diseño de esta situación se encuentra fundamentado en la revisión epistemológica que realizamos del Teorema Fundamental del Cálculo en el contexto área bajo la curva de diversas funciones primitivas y derivadas. A continuación presentamos dos secuencias correspondientes a dicha situación didáctica, cada secuencia tiene cuatro momentos los cuales nos indican características especificas de la gráfica de una función primitiva y su derivada.

Secuencia #1



Secuencia #2

M 1 M 2 M 3 M 4



Desarrollo y análisis

SECUENCIA #1 llamamos a los momentos M1, M2 y M3 momentos de interacción y reflexión o profundización en cambio al momento M4 lo denominamos momento de integración. En M1 y M2 se les pidió a los estudiantes que dibujaran la curva de la función primitiva, representada por el área sombreada, ellos no tuvieron dificultad en hacerlo y aún más identificaron el efecto de los coeficientes Aguilar, M.A. (2001) puesto que para M1 dibujaron una gráfica más anchurada que para M2. Relacionaron la gráfica de una función del tipo $F(x) = x^2$ con áreas triangulares. En M3 se pidió a los estudiantes, dibujar el área bajo la curva representada por la gráfica de la función primitiva dada, en este caso los estudiantes, quienes trabajaron en equipos de tres, se mostraron dubitativos entrando en conflicto, incluso dibujaron el área, representada por un triángulo (porque ya habían relacionado parábolas con áreas triangulares) en el segundo cuadrante y posteriormente lo dibujaron en el primero, pero realizaron una discusión más rica y profunda, ya que se cuestionaron acerca de pendiente negativa y función creciente, consideramos que en este momento M3, justamente empezaron a resignificar esos conceptos. A M4 lo llamamos momento de integración debido a que los estudiantes discuten acerca de función creciente y decreciente y relacionan, por un lado, a las gráficas de primitivas parábolicas con áreas triangulares y por otro a funcion creciente con áreas entre la gráfica de la derivada y el eje de las x por encima de éste, en cambio para las funciones primitivas decrecientes, el área esta representada por tríangulos que graficamente aparecen por debajo del eje x.

Secuencia # 2 Al igual que en la secuencia # 1, denominamos a los momentos M1, M2 y M3, momentos de interacción y profundización, a M4 lo llamamos, momento de integración. En este caso también se les solicitó a los estudiantes, en M1 y M2, que dibujaran la curva de la función primitiva, representada por el área sombreada, ellos no tuvieron dificultad en hacerlo, en M3 nuevamente identificaron el efecto de los coeficientes Aguilar, M.A. (2001), a M1 la identificaron como función creciente, a M2 como función creciente-decreciente-creciente, M3 función siempre creciente, Relacionaron la gráfica de una función del tipo $F(x) = x$ con áreas rectangulares. En M3 se pidió a los estudiantes, dibujar el área bajo la curva representada por la gráfica de la función primitiva dada, en este caso los estudiantes, quienes trabajaron en equipos de tres, no entraron en conflicto, en nínguno de los momentos, esto pensamos se debió a que ya habían interactuado y profundizado suficientemente en la secuencia #1. Consideramos que en esta secuencia lograron más resignificaciones, pues en M4, en donde se les pidió que dibujaran las áreas, primero establecieron la posible expresión analítica:

$$F(x) = \begin{cases} x + k & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

A M4 lo llamamos momento de integración debido a que los estudiantes discuten acerca de función creciente y relacionan, conjuntamente, a una función primitiva lineal con área rectangular y a una primitiva cuadrática con área triangular. En M4 de la segunda secuencia se resignifica la función cero, ya que la gráfica de la derivada es cero, por tanto el área bajo la curva también es cero.

Resultados y conclusiones

La reconstrucción de significados que los estudiantes realizan son:

- Concepto de función,
- Identifican y relacionan la función área entre primitivas y derivadas utilizando como argumentos al Teorema Fundamental del Cálculo y al comportamiento tendencial (En el contexto gráfico).
- Caracterizan y clasifican a diferentes tipos de funciones.
- Miran a las funciones como un todo y las analizan de manera local y global.

Por todo esto podemos afirmar que los estudiantes lograron resignificar cuando se les coloco en situaciones específicas de Cálculo y ello les permitió establecer relaciones entre funciones primitivas y derivadas, en el contexto área bajo la curva que establece el Teorema Fundamental del Cálculo.

Bibliografía

Aguilar, M.A. (1999) Construcciones Mentales en ambientes gráficos; (Estudio de algunas relaciones entre la primera derivada y su función Primitiva), Tesis de especialidad en Didáctica de la Matemática.Instituto Superior de Ciencias y Tecnología Nucleares, la Habana, Cuba (no publicada).

Aguilar, M. A. (2002) Relaciones entre F y F´ el papel del registro gráfico. Reporte de Investigación publicado en Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Vol XV Tomo 2 pp 1004-1009.

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En P. Gómez (ed) Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. (pp. 33-59) México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Brosseau, G. (1986), Fundamentos y Métodos de la Didáctica de las Matemáticas *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol. 7, n. 2, pp. 33-115.

Cantoral, R. (2000). Pasado, presente y futuro de un paradigma de investigación en Matemática Educativa. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.* (Volumen 13, 54-62*).* Comité Latinoamericano de Matemática Educativa México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cordero, F. (2001), "La distinción entre construcciones del Cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana", Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, vol 4, núm. 2, pp 103-128

SITUACIONES DIDÁCTICAS EN LA COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE NÚMERO RACIONAL EN ALUMNOS DE NIVEL MEDIO SUPERIOR

Ma. Guadalupe Cabañas, Faustino Guillén y Minerva Galeana Sixto
CIMATE – U. Autónoma de Guerrero, México
gcabanas52@hotmail.com

Resumen

Esta investigación se realizó con alumnos de Nivel Medio Superior (NMS) que habían cursado la asignatura de Matemáticas I y que tenían dificultades con la comprensión del concepto de número racional. El propósito fue poner en escena situaciones didácticas, para explorar sus efectos en la comprensión de este concepto. Para tener información precisa de cuál es el estado que guardaba este conocimiento en los alumnos, se hizo un diagnóstico, por lo que se diseñaron y validaron las situaciones que se utilizarían tanto en el diagnóstico como en la puesta en escena. En su diseño se consideraron los contenidos de aritmética de NMS, diferentes sistemas de representación y el modelo utilizado por Sierpinska sobre los actos de comprensión de conceptos matemáticos. Al comparar los resultados que se obtuvieron en el diagnóstico con los de la puesta en escena de las situaciones didácticas, se encontró que: el permitir que los alumnos conocieran diferentes formas de representar a los números racionales, el significado de cada una de ellas, así como convertir o traducir unas representaciones en otras a través de las situaciones didácticas, propició la construcción de este concepto y mejoraran su comprensión.

Introducción y planteamiento del problema

La mayor parte de los temas de investigación relacionados con la enseñanza de la matemática, provienen sin lugar a dudas de la práctica docente, ya que es en el salón de clases donde los profesores se enfrentan a una gran diversidad de problemas; cuya solución, debería ser el propósito final de proyectos de investigación en nuestra disciplina. Son muchos los problemas que se presentan en el proceso de enseñanza de la matemática y de diversa índole, varios de ellos están asociados a dificultades de los alumnos con el aprendizaje de la aritmética y el álgebra que trascienden en la enseñanza del cálculo. Estas dificultades se traducen en errores y de alguna forma reflejan el conocimiento matemático que tienen relación con el uso de la simbología, de fórmulas, en la demostración de teoremas y en la comprensión conceptos matemáticos, por mencionar algunos. Martínez y López (2001) al estudiar las dificultades que se les presentan a los alumnos de NMS, cuando realizan procedimientos con fracciones, encontraron que se relacionan con:

- La traducción del lenguaje matemático al común, debido a que no comunican el significado preciso de los símbolos involucrados en las situaciones planteadas.
- El algoritmo de la multiplicación en la que se involucran los paréntesis para indicarla, ya que no logran asociarlo a ella.
- La propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma, que no la aplican.
- El algoritmo de la suma de fracciones, que al aplicarlo, utilizan el modelo lineal aditivo, el cual ha quedado muy arraigado en el trabajo con los números naturales.

Sin embargo, por nuestra experiencia docente con alumnos de primer semestre de este nivel educativo, hemos encontrado que sus dificultades están asociadas con la comprensión del concepto de número racional. Además de las descritas arriba, se han identificado otras que se relacionan con:

- La transformación de números decimales finitos y periódicos a fracciones.
- Identificar entre un grupo de números reales (fracciones comunes y mixtas, fraccionarios decimales finitos y periódicos, decimales infinitos y números enteros), cuáles son racionales.
- Establecer relación de orden entre números fraccionarios y representarlos en la recta numérica.
- Aplicar las propiedades de la suma y de la multiplicación, así como la ley de los signos y de la potenciación en la solución de operaciones aritméticas.
- La solución de operaciones aritméticas y de problemas.
- Identificar en algunos modelos (gráficos, pictográfico, geométrico), partes de un todo.

Esta investigación se orientó precisamente al trabajo con el concepto de número racional con alumnos del NMS. El problema que motivó su realización fue conocer *¿Cuál es el nivel de comprensión del concepto de número racional alcanzado por los alumnos de primer grado de NMS, después de haber puesto en escena situaciones didácticas relacionadas con el mismo?* El objetivo general que nos planteamos fue: *Poner en escena situaciones didácticas con alumnos de primer grado del NMS, para explorar sus efectos en la comprensión del concepto de número racional.*

Metodología de la investigación

Utilizamos la ingeniería didáctica. Esta metodología, surge en la escuela francesa y se constituye como una analogía de la actividad realizada por los ingenieros en el desarrollo de sus proyectos, quienes se fundamentan en los conocimientos científicos de su dominio y someten sus resultados a un control de tipo científico. A diferencia de otras metodologías, se basa en la experimentación en clase y está ubicada en el registro de los estudios de caso, cuya validación es en esencia interna, basada en la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori. Una descripción de esta metodología se detalla en Artigue, M., (1995), en la que distingue cuatro fases: La fase de análisis preliminar, la fase de concepción y análisis a priori de situaciones didácticas de la ingeniería, la fase de experimentación y la fase de análisis a posteriori y evaluación. En la fase de *análisis preliminar* se hacen consideraciones de tipo:

- Epistemológico. Que da una explicación de la evolución histórica de los conceptos que se estudian.
- Cognitivo. Relacionadas con las características cognitivas de los estudiantes.
- Didáctico. Que se refiere a las características del funcionamiento del sistema de enseñanza.

En la fase de *concepción y análisis a priori* el investigador tiene que:

- Hacer el análisis de restricciones y;
- Determinar las variables de control

Este análisis a priori se debe concebir como un análisis de *control de significado*. Esto quiere decir, de forma muy esquemática, que si la teoría constructivista sienta el principio de la participación del estudiante en la construcción de sus conocimientos a

través de la interacción con un medio determinado, la teoría de las situaciones didácticas que sirve de referencia a la metodología de la ingeniería didáctica ha pretendido, desde su origen, constituirse en una teoría de control de las relaciones entre el significado y las situaciones [Artigue, M., 1995].
El análisis a priori está basado en un conjunto de hipótesis. La validación de éstas, se realiza a través de la confrontación entre el análisis a priori y el análisis a posteriori, en la cuarta fase de esta metodología. En la fase de *experimentación* tienen que ponerse en escena las situaciones didácticas ya diseñadas. La fase de *análisis a posteriori* se basa en el conjunto de datos recogidos en el proceso de experimentación, de las observaciones realizadas de las secuencias de enseñanza, así como de las producciones de los estudiantes. Tal como fue señalado antes, una vez realizado el análisis a posteriori, se hace una confrontación de los resultados de éste con los del análisis a priori, que es en esencia la validación de las hipótesis formuladas en la investigación y que también se lleva a cabo en esta fase.

Sobre las concepciones de número racional en alumnos de nivel medio superior.
Para conocer con precisión cuál es el estado que guardaba el concepto de número racional en los alumnos de NMS, se realizó un diagnóstico con alumnos de segundo semestre de la escuela preparatoria No. 1 de la UAG. Los criterios para la selección de estos alumnos fueron que: hubiesen cursado la asignatura de Matemáticas I; tuviesen dificultades al trabajar con este contenido matemático; y no hubiesen logrado acreditar dicha asignatura. Para ello, se estructuraron tres cuestionarios diferentes, con las mismas características y el mismo número de situaciones, que en este caso fueron nueve en cada uno. A partir de los resultados del diagnóstico encontramos que los alumnos:

- No fueron capaces de identificar y discriminar entre un grupo de números propuestos (racionales e irracionales), cuáles representaban números racionales.
- No fueron capaces de establecer la relación de orden entre números racionales y representarlos en la recta numérica. Es decir, no identificaron la relación correspondiente, tampoco discriminaron entre dos números cuál era mayor y cuál menor, así como no sintetizaron al determinar el orden que le correspondía a cada uno.
- No identificaron los tres números fraccionarios distintos en un intervalo dado y no discriminaron entre aquellos que si corresponden al intervalo.
- No pudieron transformar un número decimal a un número fraccionario, así como para aplicar las propiedades asociativa y distributiva. Es decir, no fueron capaces de cambiar de un registro de representación a otro, tampoco sintetizaron el resultado de la operación.
- No pudieron transformar una fracción mixta a común, no identificaron la multiplicación indicada mediante paréntesis, no trabajaron con el algoritmo correspondiente, tampoco simplificaron sus resultados
- No fueron capaces de identificar y discriminar cuáles de las expresiones planteadas cumplen con la condición de igualdad y cuáles no, así como no sintetizaron al argumentar sus respuestas.

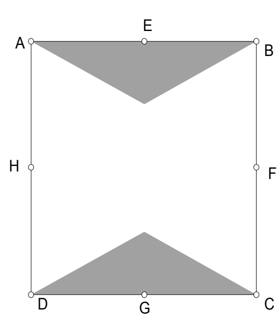
- No fueron capaces de identificar las condiciones dadas en los problemas, no sintetizaron ni generalizaron al establecer la relación entre ellos y obtener un resultado.
- No identificaron ni discriminaron los datos y la porción que ocupa la parte sombreada de las figuras dadas, tampoco lograron sintetizar al establecer la fracción correspondiente.

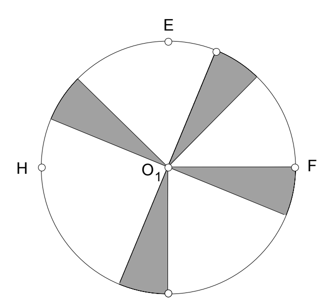
Estas evidencias, pusieron de manifiesto que los alumnos de primer año de NMS no habían comprendido el concepto de número racional en los cursos normales de enseñanza. De acuerdo con el modelo utilizado por Sierpinska sobre comprensión de conceptos, podemos decir que los alumnos no fueron capaces de identificar, discriminar, sintetizar y generalizar conceptos. De igual forma, se observó que no lograron identificar las diferentes formas de representación de los números racionales, así como para pasar de un sistema de representación a otro.

El desarrollo de las situaciones didácticas. Se pusieron en condiciones de enseñanza seis situaciones distintas, la mayor parte de ellas fueron seleccionadas de los tres cuestionarios utilizados en el diagnóstico. La puesta en escena se hizo a través del modelo utilizado por Cordero, F. et al (2000) en el análisis del comportamiento tendencial de funciones, particularmente sobre la linealidad del polinomio. En el modelo se identifica como uno de los elementos principales, al conocimiento, para determinar la relación entre un profesor y sus alumnos, donde la clase es un sitio de interacción de costumbres y creencias de cada uno de sus participantes. Otro elemento no menos importante que considera, es la conveniencia de establecer un lenguaje común para tener un ambiente que propicie la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, promover la independencia del alumno y la responsabilidad que debe tener en su propio aprendizaje, a través de: Trabajo individual y en equipo; La resolución de actividades matemáticas; La discusión matemática y; La autoevaluación del trabajo individual, por equipo y en grupo. Todos esos ambiciosos propósitos como le llaman los autores, se concretan dentro de la clase en tres momentos, a saber: la resolución de la actividad; la representación y discusión de las soluciones y, anexos y retroalimentación. En el desarrollo de las sesiones de trabajo con las situaciones didácticas, cada uno de los tres momentos anteriores tuvo como propósito: por un lado, que el alumno aprendiera a realizar la actividad en sí misma, y por otro, que aprendieran la herramienta conceptual con la que estaban trabajando. De esta forma, el objetivo del primer momento fue que lograran aprender a trabajar de forma individual en una primera etapa, durante el proceso de solución de las situaciones planteadas. Es decir, en la comprensión del enunciado de la actividad, en la búsqueda de la vía de solución y en la revisión del proceso. En una segunda etapa, se buscó que los alumnos aprendieran a trabajar en equipo, a mostrar y explicar el proceso de solución de sus actividades, a discutir, plantear y validar argumentos, y a analizar más de una forma de resolverlas. Para el segundo momento, el objetivo fue que los alumnos tuvieran la capacidad de trabajar en grupo, que comunicaran sus resultados y que validaran, justificaran y defendieran sus procedimientos ante el resto de los equipos. El objetivo del tercer momento fue que los alumnos retomaran el trabajo realizado individualmente y lo vincularan a la actividad general Otros elementos asociados a este modelo y que también fueron considerados en la puesta en escena, son: Las modalidades de trabajo; el diseño de la actividad, que incluye el enunciado de la actividad y su propósito, el precepto de evaluación y la solución de referencia; los lineamientos para la interacción con los equipos durante la resolución de la actividad; el guión de la discusión; las variables de la actividad y; la conclusión.

Modalidades de trabajo Las situaciones didácticas se trabajaron en tres sesiones y cada una tuvo una duración de tres horas aproximadamente. El desarrollo de las sesiones se llevó a cabo de tres formas: individual, en equipo y grupal. El propósito del trabajo individual fue consolidar los conceptos y procedimientos que forman parte del objetivo de la actividad. El trabajo en equipo se realizó con la finalidad de que los alumnos no se paralizaran ante las dificultades, que tomaran decisiones para organizar el trabajo, que las ideas que presentaran fueran desarrolladas por más de una persona y que hubiese un control sobre las equivocaciones y las malas interpretaciones. El trabajo grupal se llevó a cabo al finalizar el trabajo en equipo. El objetivo de esta etapa fue que los alumnos escogieran la parte fundamental de su trabajo, que pusieran atención a la forma de comunicar sus resultados, que generaran argumentos para defender sus procedimientos; que hicieran explícito por qué un conjunto de etapas resuelve la actividad, que observaran procedimientos distintos de solución y que pusieran atención al trabajo desarrollado por otros equipos.
Actividades realizadas durante la puesta en escena. En este apartado se muestra una de las situaciones didácticas (estructurada en forma de actividades) realizada por los equipos en cada una de las sesiones desarrolladas durante la puesta en escena de cada una de las situaciones didácticas. En cada sesión los equipos se organizaron con integrantes diferentes, con el propósito de tener movilidad en el pensamiento de los alumnos y de evitar la rutina. Al inicio de los trabajos por equipo, se analizaron y discutieron las actividades desarrolladas individualmente, para comprobar su veracidad y evaluar la(s) vía (s) de solución (es) utilizadas en el proceso de solución. Esto les permitía valorar la forma que ellos consideraban más simple de resolverlas, en el caso de considerar que las respuestas cumplían con las condiciones y exigencias planteadas, o en su caso determinarla entre todos, para formular las conclusiones correspondientes.

Una situación ilustrativa. De las seis situaciones elaboradas presentamos a modo de ejemplo - por razones de espacio - la primera de ellas.
Situación 1. Se les pidió a los alumnos que determinaran la fracción de área de la(s) región (es) sombreada(s) en el cuadrado ABCD y en el círculo EFGH, los cuales tienen un área de una unidad. E, F, G y H son los puntos medios del cuadrado. EG y HF son diámetros del círculo.





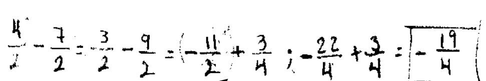
Solución de referencia de la actividad 1*a*. Para desarrollar esta actividad, los alumnos tenían la posibilidad de apoyarse en los puntos medios de la figura y en los vértices de los triángulos sombreados, trazando rectas paralelas a partir de esos puntos. A la vez unir los vértices del cuadrado con los puntos medios para obtener dieciséis triángulos rectángulos iguales. Esto les permitiría *identificar* en cuántas partes podía dividirse el todo y determinar la porción que ocupa la suma de las partes sombreadas, que equivale a un cuarto.

Solución de referencia de la actividad 1*b*. Para desarrollar esta actividad, los alumnos podían apoyarse en los diámetros dados en la figura y realizar trazos auxiliares convenientes, hasta obtener dieciséis subdivisiones equivalentes. Esto les permitiría *identificar* en cuántas partes iguales se divide el todo y determinar qué porción ocupa la parte sombreada, que equivale a un cuarto.

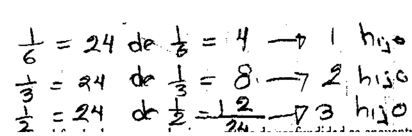
Conclusiones

Al comparar los resultados que se obtuvieron en el diagnóstico con los del cuestionario final, se concluye que:

1. El propiciar que los alumnos interactuaran con el conocimiento, el medio (material, social, etc.) y con el profesor, permitió que formularan y validaran estrategias para resolver las situaciones propuestas.
2. Se obtuvieron evidencias de que los alumnos mejoraron la forma de:
    - Comunicar sus resultados, mostrando y explicando el proceso de solución de las situaciones planteadas.
    - Defender y argumentar sobre los procedimientos utilizados para validarlos.
    - Identificar interpretaciones equivocadas y procedimientos erróneos.
    - Observar que existen diferentes vías de solución para resolver las situaciones propuestas.
    - Escoger la parte fundamental de su trabajo para emitir conclusiones.
3. El permitir que los alumnos conocieran diferentes formas de representar a los números racionales, el significado de cada una de ellas, así como convertir o traducir unas representaciones en otras propició la construcción de este concepto.
4. En el proceso de comprensión del concepto de número racional, a los alumnos se les presentaron dificultades al trabajar con situaciones que estuvieron asociadas con:
    - Pasar de un sistema de representación geométrico a un numérico.
    - Establecer la razón entre dos regiones ubicadas en un mismo objeto (geométrico).
5. La sintaxis que utilizan los alumnos para representar igualdades son expresiones que desde el punto de vista matemático son contradictorias. No obstante, parecen estar muy arraigadas en la mente de ellos, como puede observarse enseguida:



Contradicción matemática



6. Los alumnos mejoraron su comprensión acerca del concepto de número racional mediante la realización de las actividades planteadas en las situaciones didácticas.

Bibliografía

Artigue, M.; Douady, R.; Moreno, L. y Gómez, P. (1995). *Ingeniería didáctica en educación Matemática*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Balbuena, C. H. (1988). Análisis de la secuencia didáctica para la enseñanza de la suma de fracciones en la escuela primaria. Tesis no publicada. CINVESTAV-IPN. México.

Brousseau, G. (2000). Educación y didáctica de las matemáticas. *Revista de Educación Matemática 12* (1). pp.5-37. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Camacho, A. y Aguirre, M. (2001). Situación didáctica del concepto de límite infinito. Análisis preliminar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*. pp. 237-265. México:Thomson-Learning.

Cantoral, R.; Farfán, R.; Cordero, F.; Alanis, J.A.; Rodríguez, R.A. y Garza, A. (2000). *Desarrollo del pensamiento matemático.* Trillas: México.

Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y Modelización. *La Educación matemática en la enseñanza secundaria 12.* pp. 95-124. Barcelona: ICE/HORSORI.

Chevalard, Y. (1998). *La transposición didáctica.* Pp.45. Buenos Aires: Copyright Aique Grupo Editor S. A

Duval, R. (1997). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. *Investigaciones en Matemáticas Educativa II*. Pp 173-201. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Farfán, R.M. (1997) Perspectivas y métodos de investigación en Matemática Educativa. *Serie: de antología número 1*. Pp 63-79.

Ferguson, S. A. (2001). *Dynamic Imagery Test*. Forida State University, Matematics Education Department.

Martínez, M. y Abundis, S. (2001). *Dificultades en alumnos de Bachillerato al realizar procedimientos con fracciones. Un estudio de casos*. México: Tesis de licenciatura sin publicar de la facultad de matemáticas. Universidad Autónoma de Guerrero.

Rico, L. (1995). Errores y Dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. *Educación matemática*. Pp. 68-108. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Sierpinska, A. (2002): http//alcor.concordia.˜sierpan/tds.htm. (leído 28 de febrero de 2002).

Sierpinska, A. (1992). On Understanding of function. En Dubinsky and Hared Editors. (1992). Aspects of epistemology and pedagogy. *Mathematics Asociations of America. Notes. Vol. 25*. pp.25-58.

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria. *La Educación matemática en la enseñanza secundaria 12.* Pp. 125-154. Barcelona: ICE/HORSORI.

CARACTERIZACIÓN DE LOS SIGNIFICADOS PERSONALES CON RESPECTO A LA TEORÍA DE CONJUNTOS EN UN GRUPO DE MAESTROS EN FORMACIÓN

Mario José Arrieche Alvarado
U. Pedagógica Experimental Libertador-Instituto Universitario Pedagógico de Maracay
Email: marioarrieche@hotmail.com

Resumen

En este trabajo tratamos de caracterizar los principales elementos de los significados personales que los estudiantes para maestros de educación primaria atribuyen a las nociones conjuntistas. Forma parte de un proyecto de investigación sobre el papel de la teoría de conjuntos en la formación de maestros, que se desarrolló en el programa de doctorado en Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada (España) 1998-2002, por lo que incluimos una primera sección describiendo este problema didáctico, seguida del estado de la cuestión sobre la comprensión de nociones conjuntistas por estudiantes universitarios.

Introducción

En este trabajo presentamos algunos resultados de un estudio cognitivo realizado en un grupo de maestros de primaria en formación, con la finalidad de caracterizar sus significados personales (interpretaciones personales, errores, dificultades de comprensión, etc) con respecto a nociones básicas de teoría de conjuntos. Usamos la noción de significado personal en el sentido dado por Godino y Batanero (1994, 1998) como el sistema de prácticas (actuativas y discursivas) manifestadas por un sujeto ante una cierta clase de tareas. Estas manifestaciones indicarán los aprendizajes logrados, así como las respuestas erróneas, juzgadas desde el punto de vista institucional, y que son indicativas de las dificultades y conflictos cognitivos de los sujetos en el estudio del tema. En nuestro caso, las tareas que vamos a proponer involucran las nociones básicas de la teoría de conjuntos siguientes: conjunto, subconjunto, elemento de un conjunto, conjunto vacío, conjunto unitario, intersección, unión, complementario, producto cartesiano y las definiciones simbólicas de estos conceptos. Por cuestiones de espacio en este informe describimos sucintamente el planteamiento del problema, la metodología, análisis e interpretación de los datos y las conclusiones obtenidas.

Planteamiento del problema

A pesar de la importancia que la teoría de conjuntos ha tenido en los diferentes niveles educativos en el período conocido como "matemática moderna" se produjeron fuertes críticas a su enseñanza en secundaria por prestigiosos matemáticos de la época, tales como Feymann (1965), Kline (1973), Freudenthal (1983), etc. Como consecuencia de estas críticas, se logra que se supriman estos contenidos en los niveles referidos. Sin embargo, hemos encontrado investigaciones con maestros en formación sobre dificultades de comprensión en nociones conjuntistas realizadas por Linchevski y Vinner (1988), Zazkis y Gunn (1997) y Fischbein y Baltsan (1999).

La pregunta inicial que motivó la investigación fue, *¿cuál es el papel que debería desempeñar el estudio de los conjuntos, aplicaciones y relaciones en la formación de los maestros?* Puesto que en los últimos diseños curriculares se ha suprimido la teoría de conjuntos de la educación primaria, estamos tentados a responder que el papel de la teoría de conjuntos en la formación de los maestros debe ser nulo, dado que no tienen que enseñar esos contenidos. Esto implica que podemos prescindir del lenguaje de los conjuntos, aplicaciones y relaciones cuando los maestros estudien los sistemas numéricos, la geometría y las magnitudes, y otros contenidos matemáticos que requieren de estos conceptos para ser estudiados. Pero nos queda la duda si con esa opción drástica creamos una barrera para que los maestros puedan ampliar sus conocimientos matemáticos sobre temas algo más avanzados que los que se supone tendrán que explicar en el ejercicio de su profesión. También es posible que perdamos la oportunidad de ofrecer una presentación estructurada de los restantes contenidos del programa. Por lo que creemos que para tomar una decisión fundada es necesario disponer de información que no está directamente accesible y, por tanto, requiere investigación.
Esa información debe permitir responder con fundamento a preguntas más específicas que podemos clasificar según tres dimensiones o categorías (Godino, 1999):

(1) ¿Qué es la "teoría de los conjuntos (TC)"? ¿Qué formulaciones se han hecho de dicha teoría matemática en distintos períodos y circunstancias? ¿Qué papel desempeña en la matemática? ¿Qué papel puede desempeñar en las matemáticas escolares? ¿Qué interés tiene en la formación del maestro? (*problemática epistémica*, esto es, relativa al conocimiento matemático).
(2) ¿Qué dificultades de comprensión tienen los distintos contenidos que configuran la TC para futuros maestros en formación? ¿Cuáles son los motivos de tales dificultades? (*problemática cognitiva*).
(3) ¿Cómo se enseña la teoría de conjuntos en el nivel y contexto institucional fijado? ¿Qué factores instruccionales condicionan, y cómo, el aprendizaje de los estudiantes de la TC? ¿Qué patrones de interacción profesor- alumno son óptimos para facilitar el aprendizaje de la TC? (*problemática instruccional*, esto es, relativa a la enseñanza y al aprendizaje).

En nuestro caso tratamos de responder la pregunta sobre la problemática cognitiva.

Metodología

Enfoque metodológico
Para investigar los significados personales de los estudiantes con respecto a las nociones básicas de la teoría de conjuntos utilizamos principalmente el enfoque cuantitativo, determinando los porcentajes de respuestas correctas, parcialmente correctas e incorrectas a las preguntas de un cuestionario. Por otro lado, y puesto que el enfoque cuantitativo nos indica las tendencias existentes en la población, pero no muestra toda la riqueza de la variabilidad individual, ni explica el por qué de la misma, vamos a complementar el estudio mediante técnicas de tipo cualitativo. Este estudio incluye el análisis de los errores de las respuestas al cuestionario y un estudio

de casos mediante entrevista clínica, que nos va a permitir caracterizar con más rigor las dificultades y grado de comprensión logrado por los estudiantes de nuestra muestra

Población y muestra
La población objeto de estudio, serán los estudiantes de primer año del programa de Formación de Maestros. La muestra ha sido tomada en la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada. El estudio se realizará con uno de los grupos de la asignatura Matemática y su Didáctica (primer curso), formado por 122 alumnos, correspondiente al mencionado programa.

Instrumentos de evaluación

Los instrumentos de recogidas de datos utilizados en esta investigación fueron el cuestionario y la entrevista clínica El cuestionario estaba formado por 7 ítems conteniendo en total 25 subitems con la finalidad de determinar lo aprendido, los errores y las dificultades presentadas por los estudiantes en la comprensión de estos contenidos. Se trataba de preguntas de respuestas abiertas donde el alumno tiene o bien que definir conceptos, efectuar operaciones, argumentar la verdad o falsedad de proposiciones, realizar comprobaciones y demostraciones, o resolver problemas.
Por otro lado, la entrevista fue realizada a dos estudiantes, para profundizar en los aspectos que no quedaron claros en las respuestas al cuestionario y complementar la información de algunas cuestiones que no fueron consideradas en el mismo.

Análisis e interpretación de datos
Hemos clasificado las respuestas elaboradas en correctas, parcialmente correctas, incorrectas y respuestas en blanco (cuando el alumno no responde o su respuesta es insuficiente para entender su significado). Presentamos los propósitos y el análisis de contenido de cada ítem del cuestionario considerando los tipos de respuestas correctas, parcialmente correctas e incorrectas. A manera de ilustración en este trabajo sólo describiremos el análisis realizado al ítem Nº 3. No obstante, en Arrieche (2000) se puede ver el tratamiento completo realizado al resto de los ítems que conformaron la prueba.

Item Nº 3

Para cada una de las siguientes proposiciones escribe una V si consideras que es verdadera y F si es falsa:

a) $A \in A$ *b)* $\varnothing \subset A$ *c)* $x \in \{x\}$
d) $\varnothing \in \varnothing$ *e)* $A \subset A$.

En cada caso, explica tu respuesta.

El propósito de este ítem es observar en el futuro maestro la habilidad para reconocer, en una expresión conjuntista, algunas propiedades de los subconjuntos y el uso de los conceptos de: elemento de un conjunto, conjunto vacío y conjunto unitario.

Consideramos que la respuesta es correcta cuando los estudiantes explican razonadamente su respuesta de acuerdo con el concepto correspondiente. Las respuestas correctas tipo se dan a continuación:

3a) $A \in A$, falsa. Un conjunto no puede ser elemento de él mismo.
3b) $\varnothing \subset A$, verdadera. El conjunto vacío es subconjunto de todo conjunto (propiedad de subconjunto).
3c) $x \in \{x\}$, verdadera. EL único elemento del conjunto $\{x\}$ es x.
3d) $\varnothing \in \varnothing$, falsa. El conjunto vacío no posee elementos (También es válida la misma justificación de 3.a)
3e) $A \subset A$, verdadera. Todo conjunto es subconjunto de él mismo (propiedad de subconjunto).

Las respuestas parcialmente correctas ocurren cuando el estudiante acierta la veracidad de la proposición, pero su explicación no es clara o es incompleta, como en los siguientes ejemplos:

> Alumno 2 (Item 3a) $A \in A$ *"F. Porque un conjunto no puede a otro conjunto".*
> Alumno 20 (Item 3b) *"$\varnothing \subset A \Rightarrow V$. Es verdadera puesto que el elemento vacío siempre está integrado o forma parte de un conjunto. todos los conjuntos cuentan con él.*
> $A = \{1\}\ \{2\}\ \{3\}\ \{\varnothing\}$"

Las respuestas incorrectas se dan cuando se comete algunos de los errores que se describen a continuación.

Errores conceptuales: Se presentan cuando el estudiante muestra en la explicación de su respuesta la carencia del concepto correspondiente, como en los siguientes ejemplos:

> Alumno 4 (Item 3a) *"$A \in A \Rightarrow$ Falso. Porque para que $A \in A$, debería ser A un subconjunto o A^C de A".*
> Alumno 5 (Item 3c) *"$x \in \{x\} \Rightarrow V$; porque un conjunto x puede tener un elemento $\{x\}$".*

***No reconoce la propiedad o la aplica incorrectamente*:** Se presentan en las respuestas que el alumno da a las proposiciones verdaderas que contienen el enunciado de una propiedad, utilizando argumentos incorrectos:

> Alumno 6 (Item 3b) $\varnothing \subset A$. *" Falso. Conjunto vacio no puede ser un subconjunto de A".*

Entre algunos de los resultados obtenidos en este ítem se tienen:

1. En el ítem 3a, un 21,3% de los estudiantes respondieron correctamente y sólo un 9% respondieron parcialmente correcto, es decir, acertaron la

veracidad de la proposición pero su explicación no es clara o es incompleta. Lo que parece indicar la dificultad que presenta para los estudiantes el dominio del concepto de elemento de un conjunto.

2. El ítem 3c, sobre el concepto de conjunto unitario resultó ser casi igual de difícil que el ítem 1a, pues el 21,3% de los estudiantes respondieron correctamente y sólo el 6,6% respondieron parcialmente correcto y el 72,1% de los sujetos respondieron incorrectamente.
3. El ítem 3d, resultó ser el más difícil que todos los subítems que conformaron esta pregunta, ya que sólo un 14,8% de los estudiantes respondieron de forma correcta sobre el concepto de conjunto vacío y el 10,7% lo hacen de forma parcialmente correcto.

Conclusiones

En este apartado presentamos los resultados más relevantes obtenidos en el cuestionario y en la entrevista personal realizada a dos estudiantes, y las principales conclusiones del estudio.

- La prueba en general ha sido difícil para los alumnos, ya que en algunos ítems no llega al 1% el número de respuestas correctas y el número medio de respuestas ha sido 7,7 sobre un total de 25 preguntas. El máximo número de preguntas respondidas correctamente fue 20, de modo que ningún alumno hizo el examen totalmente correcto.
- El mayor número de errores conceptuales aparecen en los conceptos de subconjunto, elemento de un conjunto, conjunto vacío y conjunto unitario, sobre los que deberíamos hacer mayor énfasis en la enseñanza del tema. Estos resultados, concuerdan con los obtenidos en las investigaciones realizadas por Linchevski y Vinner (1988), Zazkis y Gunn (1997); y Fischbein y Baltsan (1999).
- Imprecisión en las definiciones de los conceptos, que indican una comprensión insuficiente.
- No reconocimiento o aplicación incorrecta de propiedades del conjunto vacío, subconjunto, de las relaciones y de las aplicaciones.
- en el curso de la entrevista los alumnos ratifican la deficiencia mostrada al interpretar los conceptos de conjunto vacío, conjunto unitario y elemento de un conjunto, y el uso del procedimiento correcto para demostrar la igualdad de dos conjuntos.

Como principales aportaciones de esta fase de nuestra investigación destacamos:

- La identificación de aspectos conflictivos en la comprensión de las nociones básicas de la teoría de conjuntos, que complementan los resultados obtenidos por otros investigadores.
- Se han identificado aquellas nociones que requieren una mayor atención por parte del docente y de los discentes, y en particular los conceptos de subconjunto y conjunto vacío.

Bibliografía

Arrieche, M. (2000). *Papel de la teoría de conjuntos en la formación de maestros: Un estudio exploratorio de aspectos epistemológicos, curriculares y cognitivos*. Trabajo de Investigación del Programa de Doctorado del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Feynman, R. (1965). New textbooks for the new mathematics. *Engineering and Science, 28: 9-15.*

Fischbein, E. y Baltsan, M. (1999). The mathematical concept of set and the collection model. *Educational Studies in Mathematics*, 37: 1-22.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Reidel.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matematicos. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 14 (3): 325-355.

Godino, J. D. (1999). Implicaciones metodológicas de un enfoque semiótico-antropológico para la investigación en didáctica de las matemáticas. En T. Ortega (Ed.), Actas del *III Simposio de la SEIEM,(pp.*). Valladolid.

Kline, M. (1973). El fracaso de la matemática moderna. Madrid: Siglo XXI de España Editores, 1978.

Linchevski, L. y Vinner, S. (1988). The naive concept of sets in elementary teachers*. Proceedings of the 12 th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 11: 471-78.

Zazkis, R. y Gunn, Ch. (1997). Sets, subsets, and the empty set: Students' constructions and mathematical conventions. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 16 (1): 133-169.

COMPETENCIAS PROFESIONALES DE UN INGENIERO EN ALIMENTOS. UN ESTUDIO SOBRE SU FORMACIÓN MATEMÁTICA

Hernán Muñoz Hernández
Departamento de Ciencias Exactas. Universidad de Los Lagos. Osorno
hmuñoz@ulagos.cl

Resumen
Esta presentación da cuenta de una investigación de tipo cualitativo que genera y sistematiza la información sobre las competencias profesionales y matemáticas de un Ingeniero en Alimentos. Las fuentes utilizadas fueron análisis bibliográfico sobre competencias profesionales, focus group realizados con ingenieros en alimentos de empresas y con académicos de universidades y entrevistas en profundidad realizadas a académicos de las universidades y a ingenieros en alimentos. Se integró y comparó la información obtenida en revisión bibliográfica con la recabada desde informantes claves. El hilo argumentativo se desarrolló por medio de un mapa funcional de las competencias profesionales y matemáticas de un ingeniero en alimentos, la conceptualización de competencia; la identificación de competencias a través del método de análisis funcional y la articulación de competencias profesionales y matemáticas de un ingeniero en alimentos.
Para las conclusiones se construyó un mapa funcional de competencias profesionales y matemáticas de un Ingeniero en alimentos, lo cual permite adecuar el curriculum formativo de este profesional a las exigencias laborales de los distintos contextos de desempeño. En la formación basada en competencia trabaja un equipo, en el cual es imprescindible que haya especialistas en las disciplinas y tecnologías correspondientes al profesional que se desea formar, como también, especialistas en diseño curricular.

Introducción
En la sociedad actual, llamada del conocimiento y la información, uno de sus rasgos característicos es la globalización, entendida como la difusión global de las nuevas tecnologías. A su vez, estas nuevas tecnologías, transforman profundamente los contextos en los cuales se desarrollan nuestras vidas laborales, razón por la cual, diferentes sectores de la sociedad demandan capacidades profesionales concretas, llamadas competencias laborales o competencias profesionales. Como consecuencia de la globalización y la demanda creciente y constante de nuevas competencias profesionales de parte de la sociedad, la acreditación de ellas se está transformando en un requerimiento ineludible. En especial, nuestro país, con el advenimiento de diferentes tratados internacionales, no está ajeno a esa exigencia. En el contexto de la Décima Región, las industrias de alimentos juegan un rol importante en el desarrollo de ella. La Universidad de Los Lagos, como Universidad Regional, contempla dentro de sus ofertas académicas, la formación de Ingenieros en Alimentos y Técnicos Universitarios en Conservación de Alimentos por Frío. Una limitación clave en la formación de los Ingenieros formados en la Universidad de Los Lagos (Ingeniero en Acuicultura, Ingeniero en Alimentos e Ingeniero Comercial), son sus estudios matemáticos. Las altas tasas de reprobación contribuyen significativamente a la deserción de sus alumnos. Para disminuir la reprobación en matemática, debería mejorarse el currículum que se intenta, el que se imparte y el que se logra. Mejorar la formación matemática del Ingeniero, es incrementar la relación de la formación matemática de estos profesionales con los requerimientos de su desempeño laboral. En particular, la formación matemática del Ingeniero en Alimentos requiere satisfacer ciertos estándares de desempeño mínimo, observados a través de un conjunto de acciones claves seleccionadas de su dominio profesional. En otras palabras, de acuerdo a sus funciones profesionales, perfil profesional y niveles de autonomía, su

formación matemática, como parte esencial de su formación general, deberá sustentar las competencias profesionales de su especialidad.

Objetivos Generales

1) Aplicar el enfoque curricular basado en competencias para modificar el currículum racionalista académico predominante en la actual formación de los ingenieros.
2) Contribuir al mejoramiento de la relación entre la Universidad, la Empresa y mundo del trabajo en la formación de los ingenieros para el desarrollo nacional en un contexto de globalización.

Objetivos específicos

1) Proporcionar antecedentes que ayuden a formular funciones profesionales claves del Ingeniero en Alimentos y ejemplos de situaciones de desempeño que las ilustren.
2) Identificar competencias matemáticas compatibles con las funciones laborales claves de un Ingeniero en Alimentos.
3) Proponer un conjunto de recomendaciones para el desarrollo curricular, la acreditación y enriquecimiento de programas para la formación matemática de un Ingeniero.

Diseño metodológico

El enfoque metodológico utilizado combinó la revisión de antecedentes bibliográficos con un estudio cualitativo a través de Focus Group o Grupos Focales y entrevistas en profundidad, procedimientos que, junto con la revisión bibliográfica, permitieron identificar competencias profesionales y matemáticas del Ingeniero en Alimentos para ser consideradas en su formación, evaluación y acreditación.

Resultados

Las competencias profesionales y matemáticas del Ingeniero en Alimentos fueron identificadas mediante el método del análisis funcional, que se define como aquel método mediante el cual se identifica el propósito clave de un área objeto de análisis, como punto de partida para enunciar y correlacionar sus funciones, hasta llegar a especificar las contribuciones individuales. El resultado del análisis funcional mencionado es un mapa funcional, el cual articula las diferentes competencias y los distintos niveles de desagregación de las funciones principales o áreas de competencia, y que fue concebido a partir del propósito clave, enunciado desde la información recabada.

Esquemáticamente, el mapa funcional, se describe en la página siguiente. Se da un ejemplo de un Área de Competencia, con sus tres Tareas y las Realizaciones Profesionales correspondientes a una de ellas, específicamente, la Tarea 1.1. Por razones de espacio no se da a conocer el mapa funcional completo, el cual contiene seis Áreas de Competencia, 19 Tareas y 93 Realizaciones Profesionales, distribuidas en un esquema similar al mostrado en la tabla 1. Así, en cuanto a las competencias profesionales del Ingeniero en Alimentos, se proponen las siguientes Áreas de Competencias:

1. Organizar y operar una planta de alimentos o productos alimenticios.
2. Planificar y gestionar la producción de una empresa o institución que produce alimentos
3. Controlar la calidad de los alimentos o productos alimenticios fabricados.
4. Desarrollar proyectos de prefactibilidad y factibilidad para la industria de alimentos.
5. Desarrollar formas efectivas de comunicación y de relacionarse en e1 trabajo y en la sociedad.
6. Manifestar compromiso con la creatividad y el aprendizaje continuo.

TABLA 1

Propósito Principal **Objetivo de la ocupación o profesión de Ingeniero en Alimentos**	Funciones principales **Áreas de Competencias**	Unidades de competencias **Tareas**	Elementos de competencia **Realizaciones profesionales**
Enunciado que define aquello que la ocupación o sector bajo análisis permite alcanzar o lograr.	Conjunto de responsabilidades y funciones laborales que, normalmente, pueden corresponder a uno o más puestos de trabajo pero que en si mismas describen una denominación laboral representativa de un sector	Varios logros o acciones laborales que deben ser llevadas a efecto, para que la función laboral a que se refiere, pueda considerarse ejecutada.	Resultados y comportamientos laborales que un trabajador debe lograr y demostrar en el desempeño de una función en un área ocupacional específica.
Programar, ejecutar, diseñar y optimizar un conjunto de acciones tendientes a la conservación, transformación o creación de alimentos o productos alimenticios, cuidando sus características sensoriales, higiénicas y nutricionales.	Ejemplo: 1. Organizar y operar una planta de alimentos o productos alimenticios. .	***1.1. Programar la producción de alimentos***. 1.2.Coordinar y monitorear las diversas acciones realizadas en secciones distintas de la planta y que son necesarias para producir un alimento determinado. 1.3. Programar procesos de producción.	1.1.1.Considerar las demandas de distintos alimentos que se deben producir 1.1. 1.1.2.Cuantificar la existencia de stoc stock de los distintos alimentos que se producen. 1.1.3. Definir insumos (materia prima, personal, tiempo, etc.) que se requieren para producir una cantidad específica de un determinado alimento. 1.1.4.Determinar los componentes que debe tener un alimento o producto alimenticio y la proporción de cada uno de ellos.

Las seis Áreas de competencia propuestas son:

1. Interpretar gráficos similares a los utilizados en la verificación de la calidad y productividad de un alimento.
2. Resolver sistemas de ecuaciones simultáneos necesarios para encontrar una o más características particulares de procesos alimenticios.

3. Aplicar la determinación de máximos y mínimos de funciones en diversas situaciones problemáticas de optimización.
4. Analizar e interpretar modelos matemáticos que se utilizan en balances de masa energía de procesos alimenticios.
5. Analizar algunos elementos del cálculo diferencial e integral que se utilizan en cálculos e interpretación de distribuciones estadísticas, en ajustes de parámetros y validación de modelos.
6. Predecir el comportamiento y optimizar los procesos productivos de alimentos.

Para identificar las competencias matemáticas del Ingeniero en Alimentos, se considera como base el propósito clave y sus competencias profesionales. Además, fue muy importante la información recabada desde los informantes claves y de la diferente bibliografía analizada. Estas seis Áreas de Competencia consideran 10 Tareas, las que a su vez contemplan 30 Realizaciones Profesionales.

Se ilustra a continuación en el mismo esquema anterior, como ejemplo, un Área de Competencia matemática, con sus dos Tareas y las Realizaciones Profesionales correspondientes a la Tarea 1.1.:

Funciones principales **Áreas de Competencia**	Unidades de competencia **Tareas**	Elementos de competencia **Realizaciones Profesionales**
1. Interpretar gráficos similares a los utilizados en la verificación de la calidad y productividad de un alimento.	1.1.Reconocer la ecuación de algunos modelos matemáticos. 1.2.Interpretar y resolver situaciones problemáticas de la realidad utilizando modelos matemáticos.	1.1.1.Utilizar el lenguaje de la lógica y teoría de conjuntos. 1.1.2.Identificar los conjuntos numérico y sus propiedades, especialmente de los números reales.. 1.1.3.Aplicar las propiedades de los números reales en diversas demostraciones 1.1.4.Identificar la ecuación que se asocia a modelos definidos por las funciones: constante, idéntica, valor absoluto, signo, parte entera, lineal, cuadrática, polinomial, racional, exponencial, logarítmica y trigonométricas. 1.1.5.Graficar en un sistema de coordenadas cartesianas las funciones mencionadas en el punto anterior.

Conclusiones principales y algunas sugerencias:

1.-La concepción de competencia adoptada en este trabajo (conjunto de conocimientos, actitudes, habilidades, valores, y en general atributos personales, que se relacionan más directamente con el desempeño exitoso de las personas en su trabajo, y que deben ser desplegados en el contexto de desempeño de una o más tareas en una profesión u oficio) implica identificar y describir una competencia considerando tres tipos de saberes: un saber conocer y aprender en cuanto a conocimientos, habilidades y destrezas; un saber hacer en cuanto a desempeños exitosos en distintos contextos; y un saber ser en cuanto a valores y actitudes que se ponen en juego en un desempeño competente y que son desplegadas en los dos ámbitos anteriores. También el saber ser incluye, evidentemente, las relaciones consigo mismo, con los demás y con el entorno.

2.-Los diferentes enfoques analizados, ponen su énfasis, preferentemente, en el saber conocer y aprender, otros agregan al anterior el saber hacer y un número reducido concibe la competencia bajo el prisma de los tres tipos de saberes. Sólo proponen una metodología para la identificación de competencias considerando la concepción holística de ella, los autores Montero y Andreani, y los autores Irigoin y Vargas, que en definitiva, fue la adoptada en el trabajo.

3.-Ninguno de los documentos analizados hace referencia a la competencia profesional que considere las capacidades de emprendimiento y autoempleo, las cuales tienen que ver con independencia laboral y económica de un país, ya que son capacidades que constituyen fuentes generadoras de empleo y factores que potencian el avance científico y tecnológico al liberarse de instituciones productivas transnacionales que imponen sus propias tecnologías. A su vez, tales capacidades constituyen un elemento más que facilita la flexibilidad laboral.

4.-La mayoría de los informantes claves coincidieron que perciben una escasa vinculación entre el mundo del trabajo cuyos principales actores son los trabajadores o profesionales, con las instituciones educacionales formadoras de profesionales y con los eventuales empleadores.

5.-Entre los informantes claves consultados, pocos pudieron opinar respecto de las competencias matemáticas, y de la relación que ellas tienen en la consecución o logro de las competencias profesionales específicas de un Ingeniero en Alimentos. Las que se consignan, fue posible obtenerlas después de varias entrevistas en profundidad.

Algunas sugerencias para el diseño curricular basado en competencias:

1. El trabajo basado en competencias, significa entre otros aspectos, que toda competencia debe ser demostrada y que la identificación de la competencia implica la identificación, además, de los criterios de desempeño y las evidencias que permitirán inferir su logro.
2. La formación basada en competencias no sólo necesita competencias, más que ellas, lo deseable sería contar con una norma de competencia (conjunto de especificaciones de una capacidad laboral que incluye la descripción del logro laboral (realización profesional), criterios para juzgar la calidad de dicho logro, evidencias de que el desempeño se logró, los conocimientos aplicados, el ámbito en el cual se llevó a cabo o campo de aplicación y una guía para la evaluación. Las especificaciones señaladas son asumidas por un determinado colectivo que incluye a trabajadores, empleadores, instituciones educativas y, en el caso de los sistemas nacionales normalizados, el sector gobierno), para preparar a personas que se desempeñen en distintos ambientes y situaciones.
3. La formación basada en competencias tiene como referente una competencia, lo cual obliga que su diseño curricular se ordene desde el comienzo en torno a un desempeño. No podría partir, como sucede a menudo con programas de corte

academicista, de los contenidos de una disciplina ni de lo que un grupo de profesores considera que las personas deberían aprender.

4. Para el diseño basado en competencias, es bastante usual que se haga corresponder una competencia o unidad de competencia (señalada como tarea en el mapa funcional de este trabajo) con un módulo, y una realización profesional o elemento de competencia con una unidad modular o unidad didáctica, pero no puede tratarse de una correspondencia mecánica, puesto que debería atenderse a la lógica del aprendizaje y considerar que existen oportunidades en que un mismo contenido, por ejemplo, puede ser útil para diversos objetivos.
5. En el diseño curricular de la formación basada en competencias deberían ser utilizados todos los elementos de diseño que la investigación curricular ha ido mostrando como positivos y que la novedad está en tomar el insumo de las competencias, lo que no significa desechar los insumos socio-culturales que un currículo debe tener.
6. El proceso de diseño curricular basado en competencias sigue cauces muy similares a un diseño curricular convencional, debiéndose cumplir las fases de organización modular (si fuere el caso), formulación de los objetivos de aprendizaje, selección y organización de los contenidos, identificación de las experiencias de aprendizaje y los recursos necesarios para realizarlas (materiales, medios y otros recursos), formulación de un plan de evaluación con sus procedimientos e instrumentos. Para la realización de este proceso es de importancia relevante contar con normas de competencias.
7. En la formación basada en competencias trabaja un equipo de diseño, no es tarea de una persona, se espera que en ese equipo haya especialistas en contenido, en el sentido de especialistas en las disciplinas y en las tecnologías que eventualmente se precise enseñar, como asimismo especialistas en diseño curricular que puedan orientar técnicamente la construcción del currículo.

Algunas limitaciones del trabajo:

1. Sólo se realizaron Focus Group con profesionales de industrias de la provincia de Osorno y con académicos de la Universidad de Santiago,
1. No se realizó Focus Group con eventuales empleadores, o directivos y ejecutivos de empresas o instituciones que fabrican alimentos.
2. No se realiza el proceso para establecer normas de competencia en este trabajo, puesto que ese proceso escapa a los propósitos de él.

Algunos alcances del trabajo:

1. La metodología de análisis funcional para determinar competencias profesionales y matemáticas del Ingeniero en Alimentos utilizada en esta oportunidad, puede ser utilizada para el mismo efecto en distintas profesiones, trabajos u oficios.
2. En la acreditación de Carreras y Programas de formación profesional de la Educación Superior, la determinación de las competencias profesionales ayuda, entre otras cosas, a diseñar el currículo y sobre todo, ayuda a formular un plan de evaluación que permite darse cuenta de la eficiencia y pertinencia de los procesos formativos.

Bibliografía:

Cariola, H. y Quiroz, M.. (1997) Competencias generales, competencias laborales y curriculum. En *Competitividad, redes productivas y competencias laborales* de Marta Novick y María A. Gallart (Coordinadoras). Editorial Grijalbo.

De los Ríos, D., Herrera, J. A.; Letelier, M; Poblete, A., Zúñiga, M. (2000) En Capítulo II de: *Las nuevas demandas de desempeño profesional y sus implicancias para la docencia* universitaria. Centro interuniversitario de Desarrollo. CINDA. Proyecto FDI. Santiago, de Chile.

Irigoin, M. y Vargas, F. (2002) Competencia Laboral: Manual de conceptos, métodos y aplicaciones en el sector salud Cinterfor. Montevideo. Uruguay.

Levy, C. (2000) *Gestión de las competencias. Cómo analizarlas. Cómo evaluarlas. Cómo desarrollarlas* Gestión. Madrid. España.

Montero, L., Andreani, R. (1999, a). En Docmento de Trabajo: Actualizando las características del egresado esperado del Liceo Politécnico de Castro, Chile.

Montero, L., Andreani, R. (1999, b). En Documento de Trabajo: Visualizando una estructura y organización curricular.

Montero, L. (2000) Estándares de desempeño y calidad de la Educación. EDU-CHILE. Documento de trabajo, agosto del 2000.

Montero, L.. (2001) Una mirada a la evaluación en el aula. Charla dada en la Facultad de Filosofía de la Universidad de Chile, mes de julio.

Muñoz, H., Carroza, P.; Sepúlveda, O. (1998) Mejoramiento del aprendizaje de la matemática en las Carreras de Ingeniería de la Universidad de Los Lagos. Trabajo presentado en el Programa de Magíster en Pedagogía y Gestión Universitarias. Osorno.

Singh,. P.y Heldmann, D. (1997). *Introducción a la Ingeniería de los Alimentos*. Editorial Acribia. Zaragoza. España.

LA TEORÍA DE CONJUNTOS EN LA FORMACIÓN DE MAESTROS: FACETAS Y FACTORES CONDICIONANTES DEL ESTUDIO DE UNA TEORÍA MATEMÁTICA

Mario José Arrieche Alvarado
Universidad Pedagógica Experimental Libertador- Instituto Pedagógico de Maracay
marioarrieche@hotmail.com

Resumen
La investigación que presentamos se centra en un aspecto específico de la formación matemática de los maestros de primaria: clarificar el papel que el lenguaje conjuntista debería tener en esa formación. Hemos delimitado el problema al estudio de las relaciones de los conjuntos con los números naturales, por ser éstos esenciales en la matemática escolar, y por tanto en la formación de maestros. Así mismo, se estudian las relaciones ecológicas entre las nociones conjuntistas y las diversas construcciones de los números naturales. El marco teórico adoptado atribuye un papel esencial a los aspectos epistemológicos, esto es, la indagación de la naturaleza de los conocimientos matemáticos objeto de investigación. Se estudian también los aspectos históricos y curriculares sobre la implantación de la "matemática moderna" en los programas de educación matemática básica y su reflejo en los libros de textos en España. Las facetas instruccional y cognitiva se abordan mediante el análisis de un proceso de estudio de la teoría de conjuntos y los números naturales en un curso de formación de maestros y la evaluación final de los significados de una muestra de 122 estudiantes sobre las nociones conjuntistas elementales. Nuestras conclusiones indican que la formación matemática de los maestros debería contemplar el estudio de las nociones básicas de la teoría de conjuntos, por el papel de las nociones conjuntistas en las diversas construcciones de los números naturales. El estudio cognitivo muestra que las nociones conjuntistas presentan índices de dificultad elevados para los maestros en formación.

Introducción Presentamos un tema de investigación de naturaleza curricular sobre "el papel que la teoría de conjuntos debería desempeñar en la formación de maestros", entendiendo el currículo matemático según lo proponen Rico y Sierra (1997). Tomamos en cuenta los aspectos epistemológicos, cognitivos e instruccionales puestos en juego en el proceso enseñanza-aprendizaje de una teoría matemática en un contexto institucional fijado, como es, en nuestro caso particular, "la teoría elemental de conjuntos" y el contexto institucional de "la formación de maestros de primaria". En el marco del currículo de matemática de la formación de maestros, nos centraremos en el tratamiento de los números naturales, tanto en primaria como en la formación de maestros. Se aborda el problema con un paradigma metodológico de tipo mixto entre métodos cualitativos y cuantitativos (Goetz y Lecompte, 1988), utilizando con mayor intensidad el primero. Se combina el estudio documental y cualitativo en la faceta epistemológica con diversas técnicas y enfoques en las partes cognitiva e instruccional. En la parte de fundamentos teóricos, se presenta un análisis epistemológico y curricular de la teoría de conjuntos. El estudio epistemológico de la teoría de conjuntos se realiza con la finalidad de precisar su origen, desarrollo, evolución y su papel en la matemática. El estudio curricular se realiza con la finalidad de describir el fenómeno didáctico conocido como "matemática moderna" en los niveles de primaria y secundaria en el período de los años 60 a 80, así como en los currículos de formación de maestros. Se complementa el estudio epistemológico con el análisis de las construcciones dadas por Frege (1884), Dedekind (1888), Peano (1889), Weyl (1949) y Lorenzen (1962) con el propósito de caracterizar el papel de las nociones conjuntistas en la construcción de

los números naturales realizada por cada uno de estos autores. En la parte experimental se análiza una colección de libros de textos de primaria, correspondientes a la época de vigencia de la matemática moderna y de la época actual con la finalidad de caracterizar el papel de las nociones conjuntistas en el tratamiento dado a los números naturales en este nivel educativo. Además realizamos los análisis del libro de texto (Krause, 1991) usado en el proceso de estudio de los temas de conjuntos, relaciones y funciones de un grupo de maestros en formación; y de la descripción de las clases de un profesor de la asignatura "Matemática y su Didáctica", correspondiente al programa de Formación de Maestros de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada, sobre el tema en cuestión y los números naturales. Dichos análisis se realizan con el propósito de caracterizar los significados elementales y sistémicos puestos en juego en la interpretación del texto usado en el proceso de estudio mencionado, y el de caracterizar los conocimientos (propuestos por el profesor) de las partes del texto que hacen referencia a los contenidos matemáticos tratados en las sesiones de clase. En la parte experimental realizamos un estudio de tipo cognitivo a un grupo de 122 maestros en formación, que han cursado también la asignatura "Matemática y su Didáctica" de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada con la finalidad de caracterizar los significados personales con respecto a la teoría de conjuntos de estos estudiantes.
En este informe abordamos los análisis de las construcciones de los números naturales elaboradas por Frege, Dedekind, Peano, Weyl y Lorenzen, de los libros de textos de educación primaria de las épocas de la matemática moderna y actual, y de la observación no participante de la clase de un profesor de la asignatura "Matemática y su Didáctica" de la formación de maestros sobre nociones conjuntistas y números naturales. En Arrieche (2002) se describen la problemática general y los restantes aspectos de la investigación.

Uso de nociones conjuntistas en las construcciones de los números naturales.
Para el análisis de las construcciones de los números naturales elaboradas por Frege, Dedekind, Peano, Weyl y Lorenzen, describimos e interpretamos el papel de las nociones conjuntistas básicas en las construcciones en referencia, haciendo uso de la noción de praxeología matemática desarrollada en el marco teórico de tipo semiótico-antropológico propuesto por Godino y Batanero (1994, 1997), para lo cual consideramos las dimensiones praxémica (tipos de problemas, técnicas y los elementos rotacionales o lingüisticos) y discursiva (conceptos-definiciones, propiedades - proposiciones, argumentaciones - justificaciones) de la praxeología numérica, puestas en funcionamiento en las mencionadas construcciones. Para ilustrar este procedimiento, aquí sólo explicamos y describimos el análisis realizado para caracterizar el papel de las nociones conjuntistas en la construcción de Frege.

Dimensión Praxémica. Los tipos de situación problema, Mosterín (2000) señala que Frege se dedicó a dos tareas básicas: la fundamentación de la aritmética y la aclaración de las nociones semánticas. En las técnicas, tomamos en cuenta el conjunto de pasos realizados para obtener el concepto de número natural y su serie numérica 0, 1, 2, 3,... Para presentar el concepto de número natural define el concepto de número cardinal (en general) y el de número natural o finito. A su vez para elaborar la definición de número cardinal define una relación de equivalencia R sobre una clase A. Es notorio que desde el mismo planteamiento del procedemiento utilizado, se nos presenta de una forma implícita el uso de las nociones básicas de la teoría de conjuntos. Con respecto al uso de los elementos notacionales o lingüisticos, identificamos las notaciones de un objeto y de una clase cualquiera con las notaciones de elemento de un conjunto y la de un conjunto cualquiera, respectivamente.

Dimensión discursiva. En la *argumentación* dada por Frege, la relación de equivalencia definida sobre la clase A para definir el número cardinal genera una partición de A en clases de aquivalencia, tiene implícitas las nociones de familia de conjuntos, conjunto vacío, intersección y unión de conjuntos. En l*os conceptos-definiciones* se elige como dominio la clase cuyos elementos son conceptos y se define la relación de equivalencia entre conceptos, como relación de biyectabilidad, se expresa de la manera siguiente: el concepto *P* es biyectable (o están relacionados mediante la relación de biyectabilidad) con el concepto *Q* sí y solo sí hay una biyección (aplicación biunívoca) entre los objetos que caen bajo *P* y los objetos que caen bajo *Q*. En esta relación identificamos a los conceptos con la noción de conjunto, la noción de aplicación biunívoca abarca las nociones de conjunto y de elemento de un conjunto.

El *concepto-definición,* el número cardinal de un concepto *P* es la clase de equivalencia de *P* respecto a la relación de biyectabilidad, es decir, la clase de todos los conceptos biyectables con *P*. En esta definición se involucra la noción de conjunto, resaltándose que un número cardinal es un conjunto, y que a su vez, sus elementos son conjuntos.

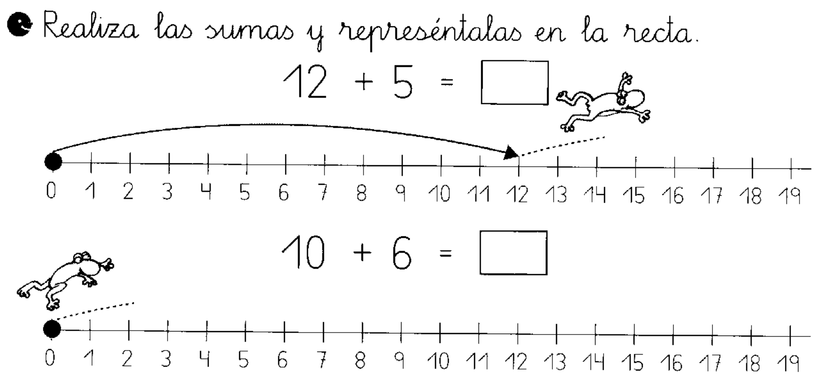
En esta componente de nuestra investigación, se resalta el hecho de que las construcciones de los números naturales realizadas por los matemáticos referidos, presentadas con diversos enfoques (logicista, formal y constructivista), están conectadas por el uso de nociones básicas de la teoría de conjuntos, debido a que sus desarrollos utilizan implícita o explícitamente estas nociones.

Uso de praxeologías conjuntistas en el estudio escolar de los números naturales.

Presentamos el estudio realizado sobre las relaciones de tipo ecológico existentes entre lo que hemos descrito como praxeología conjuntista y el estudio de los números naturales (praxeología numérica) en los cursos de 1º a 6º de la Educación General Básica[22], tanto en la época de vigencia de la matemática moderna como en la época actual. Para tal fin, realizamos un análisis de una colección de libros de textos de estos niveles y las épocas en referencia. Para mostrar el procedimiento empleado describimos algunos fragmentos relacionados con el tratamiento de los conjuntos en el estudio de los números naturales en los textos de la época actual. En este período hemos seleccionado textos publicados por la Editorial Anaya, comprendidos entre los años 1997 y 2000. La hipótesis que guía nuestro análisis es que aunque no se utiliza el discurso teórico conjuntista, sin embargo, encontraremos abundantes elementos del componente praxémico conjuntista, esto es, ejemplos de conjuntos o colecciones de

[22] Actualmente, parte de la Educación General Básica comprende los cursos de 1º a 6º de Educación Primaria.

objetos, subconjuntos y operaciones de unión, diferencia y producto cartesiano. Con respecto al tratamiento dado a los conjuntos en el estudio de los números naturales, El libro[23] del primer curso comienza con el estudio de los números del 1 hasta el 5. En la primera página se presenta una escena escolar en la que hay representados distintos objetos clasificables según distintos criterios: libros, niños, niñas, sillas, personas sentadas, etc. La consigna que se da al niño es escueta: *¿Cuántos hay*? De manera indirecta se pide hallar el cardinal de 9 colecciones de objetos dados mediante una propiedad: ¿Cuántos cuadernos, niñas, niños, patos, maestras, sillas, niños sentados, papeleras, mesas hay representados en la escena? Para la primera pregunta, ¿cuántos cuadernos hay? se da como ejemplo la solución en forma de 5 palotes dentro del recuadro, lo que sugiere que la consigna debe interpretarse como, "poned tantos palotes dentro del recuadro como 'objetos' haya de cada clase". La realización de la tarea pedida supone el manejo de colecciones finitas de objetos, su clasificación en subcolecciones de acuerdo con una propiedad característica, la producción de una colección de marcas coordinable con cada subcolección y el recuento de los objetos (determinación del cardinal del conjunto correspondiente) expresado aquí mediante el sistema de numeración más simple (colecciones de marcas). En la figura se usa la semirecta numérica como modelo del sistema de números naturales y de la operación de sumar naturales; la suma se modeliza mediante los "saltos de una rana" sobre las posiciones marcadas en la semirecta.



También se puede contemplar como sistema modelizado por los símbolos numéricos posicionales en virtud de la correspondencia biyectiva que se establece entre ambos conjuntos de objetos. Además los segmentos de palabras y símbolos numéricos forman conjuntos de objetos cuyo tamaño relativo respecto de cualquier otra colección se puede determinar mediante la coordinabilidad. En el libro[24] de cuarto curso las propiedades conmutativa y asociativa de la suma de números se justifican como generalizaciones de invariantes observables con las acciones de agregar colecciones de objetos. La propiedad conmutativa de la multiplicación se justifica mediante un ejemplo que pone en juego la multiplicación como producto cartesiano. En una lámina con 4 filas de sellos, cada una de las cuales tiene 6, ¿cuántos sellos hay en la lámina? El mismo resultado se obtiene si se multiplican las filas por las columnas que las columnas por las filas.

[23] Varela, A y Cols (2000). Matemática 1. Madrid: Anaya
[24] Ferrero, L. Y cols (1997). Matemática 4. Madrid: Anaya.

Análisis del proceso de estudio implementado por un profesor de la formación de maestros.

En esta sección nos referiremos al análisis realizado a la observación no participante del proceso de enseñanza-aprendizaje de estos temas y los números naturales, correspondiente a la clase de un profesor de la asignatura "Matemática y su Didáctica" del programa de Formación de Maestros de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada. Para ello , aplicamos los análisis semiótico y didáctico a las partes del texto que hacen referencia a los contenidos matemáticos tratados en las sesiones de clases.

El análisis semiótico nos permitirá caracterizar los conocimientos puestos en juego por el profesor, que complementan la información del libro, y algunos indicadores de los conocimientos personales de los estudiantes. Por su parte, el análisis didáctico nos ayudará a caracterizar los patrones de interacción entre profesor y estudiantes a propósito de los contenidos estudiados. En la descripción del desarrollo de las clases identificamos tres tipos de unidades.

- Las que hacen referencia a conocimientos institucionales (unidades epistémicas, que designaremos con la letra E).
- Las que hacen referencia a conocimientos de sujetos individuales (unidades cognitivas, C).
- Las que se refieren a patrones de interacción entre docentes y discentes (unidades didácticas, D).

Para ilustrar este procedimiento presentamos un fragmento del análisis realizado a la primera fase de la clase Nº 8 donde se introduce el estudio de los números naturales.

Clase 8; 1ª fase (Número natural)

Unidades	Texto
D1	Se inicia expresando: Trabajaremos primero el concepto de número, la idea, y después pensaremos en el idioma en que podemos escribirlo. Número natural o números naturales. ¿Que son los números?, por ejemplo: ¿Que es el número cinco? Se nos presenta un problema, utilizamos los números desde muy pequeños. Sin embargo, se nos pregunta ¿ que es un número? y tenemos dificultad para responder
C1	Pregunta a los estudiantes, ¿Alguien sabe qué es un número? Un alumno responde "un signo que designa una cantidad". El profesor vuelve a preguntar, "¿Qué es el número cuatro?". los alumnos no responden. Para explicar el profesor escribe en la pizarra el símbolo "4" y expresa: esto no es más que un signo. ¿Cuál sería la idea que hay detrás de ésto?, ¿Como podría definirlo?
E1	El profesor responde que, si quiero comunicar qué significa el número cuatro ponemos ejemplos de grupos que vengan de cuatro en cuatro, como por ejemplo: cuatro tizas, cuatro dedos, cuatro personas, cuatro sillas, etc. Lo que tienen de común todos estos conjuntos es lo que llamamos la idea de ser cuatro. ¿De qué manera se trabaja en Educación infantil y en Educación primaria? Se empieza a mostrar los números como útiles, pero como futuros maestros, lo vamos a tomar como objeto de estudio.
E3	Expresa el profesor: la relación de equivalencia me clasifica a los conjuntos, se forman clases de conjuntos. Para denotar la clase de un conjunto escribiremos cl (A) . $cl(A) = \{\text{conjunto } B \text{ tq } B \approx A\}$. ¿Que tienen en común los conjuntos equipotentes con uno dado? El número de elementos. Aquello que tienen en común es lo que se llama número natural. Se han clasificado todos los conjuntos, y a cada una de estas colecciones de conjuntos equipotentes es lo que se llama número natural. Por ejemplo: 1) Si $A = \{a\}$, a la colección cl(A) se le llama número natural uno, y se indica por el símbolo 1.

E4	2) Si A = {a, b}, a la colección cl (A) se le llama número natural dos, y se denota por el símbolo 2. 3) C = {a, b, c}, a la colección cl(A) se le llama número tres, y se indica por el símbolo 3. De esta manera nos vamos formando la colección de los números. Por ejemplo, para formar el dos, me he tomado el conjunto que tenía para representar el uno, y le agrego un nuevo elemento. Para formar el tres, tomo el conjunto que tenía para representar el dos , y le agrego un nuevo elemento; y así sucesivamente. **Observación:** Cada conjunto que tomo para representar un número, siempre tiene un elemento más que el conjunto que me representa el número anterior. Resalta que en la escuela no van a enseñar este concepto de esta manera, pero si interesa que reflexionen en lo que es un número. Si nos tomamos la colección de estos números obtenemos el conjunto N de los números naturales: N = {1, 2, 3, 4, . . . }. Si consideramos el conjunto ∅, a la colección cl (∅) se le llama número cero, y se denota por el símbolo "0". De esta manera el cero puede ser el primer natural. Así se puede escribir N = {0, 1, 2, 3, . . .}.

Conocimientos puestos en juego

E1, E2, E3: Se explica el significado de un número basado en la idea de lo que tienen en común diversas colecciones de objetos, cuyo cardinal es ese número. Se introduce la definición formal de número fundamentada en el hecho de que la relación de coordinabilidad entre conjuntos finitos es una relación de equivalencia, lo que permite clasificar a los conjuntos en clases de equivalencia. Así, se define un número natural como la colección de conjuntos que conforman una determinada clase de equivalencia. Para ilustrar esta noción se explica los conceptos de los números 1, 2 y 3. Es de hacer notar que, la idea en la que el profesor orienta la enseñanza del número es parecida a la definición por abstracción mencionada en la sección 2.5 del capítulo 2, pero con la distinción de que en este caso el profesor puntualiza que la propiedad común referida a los conjuntos coordinables entre sí, que representa el número que se obtiene de ellos, es precisamente su cardinal. También se destaca que el procedimiento empleado en la construcción de los números es parecido al utilizado por Frege (1884) para lograr este mismo fin.

E4: Se define el natural cero como la colección de conjuntos que conforman la clase de equivalencia del conjunto vacío, mediante la relación de coordinabilidad. Se introduce el conjunto N de los números naturales por la colección de todos los números construídos mediante el proceso de obtención de todas las clases de equivalencia de la relación de coordinabilidad entre conjuntos finitos.

C1: Las explicaciones previas de la definición de suma de naturales, indujo a los estudiantes a comprender rápidamente que la operación de multiplicación se corresponde con el producto cartesiano de conjuntos.

Patrones de interacción didáctica

D1, D2, D3: El profesor introduce el tema de los números planteándoles a los estudiantes diversas interrogantes sobre que piensan ellos qué son los números, sobre el significado de números concretos, etc. También usa el mismo procedimiento en la noción de suma de números naturales, sobre qué se hace para hallar la suma de números específicos. Finalmente, insta a los estudiantes a verificar las propiedades de adición y multiplicación de números naturales utilizando números concretos.

Conclusiones

Los análisis que hemos realizado en este estudio nos han permitido obtener las siguientes conclusiones. El estudio de las construcciones de los números naturales dadas por autores interesados por los fundamentos de la matemáticas, tales como:

Frege, Dedekind, Peano, Russell, muestran que las mismas tuvieron su base en fundamentos lógicos y nociones conjuntistas. Sin embargo, a pesar del interés de estos autores por la fundamentación de la arítmética con criterios lógicos, las nociones y procedimientos usados tenían algunas diferencias. El análisis realizado a las construcciones de los números naturales de autores que usaron enfoques axiomaticista y recursivo revela que en dichas construcciones están involucradas implícitamente las nociones conjuntistas. Tal es el caso de las construcciones de Weyl, Lorenzen y Benacerraf. La distinción entre *ejemplar* y *tipo* que propone el enfoque semiótico de la cognición matemática de Godino se revela aquí como un constructo útil para entender las relaciones entre las diversas construcciones de N. Este resultado nos permite analizar y valorar la pertinencia y adecuación de las maneras de presentar los números naturales en la educación primaria y en la formación de profesores. El análisis realizado a los libros de la época de la matemática moderna muestra que sólo en algunos de los textos se usan las nociones conjuntistas en los temas de aritmética, tales como: la definición de número natural, operaciones aritméticas, etc. Los textos de la mayoría de los cursos se caracterizaron por la extensión y formalidad con que trataron los contenidos de teoría de conjuntos; y por el casi nulo uso de estas nociones en el desarrollo del resto de los contenidos matemáticos estudiados en los textos correspondientes. El análisis de los libros actuales indica que los autores de los textos no desarrollan un discurso conjuntista previo al tratamiento de los temas propuestos. Sin embargo, presentan casi de forma explícita las nociones de conjunto, subconjunto, cardinal de un conjunto y aplicación biyectiva en el estudio de los números naturales. El análisis de la clase observada sobre nociones conjuntistas y números naturales nos ha permitido determinar que el profesor observado enseña a los futuros maestros los números naturales, considerándolos como objeto de estudio, es decir, se interesa por enseñarles una definición matemática o formal, aunque les aclara que ésta no es la forma en que ellos enseñarán a los niños de primaria. Este docente pone en funcionamiento las nociones conjuntistas, enseñadas previamente, para enseñar a los alumnos los números naturales; para lo cual, define la relación de coordinabilidad entre conjuntos finitos. El enfoque adoptado para construir los números naturales es parecido a los enfoques logicistas de Frege y de Russell, al definir un número natural como una clase de equivalencia mediante la relación de coordinabilidad entre conjuntos finitos. En el desarrollo de nuestra investigación hemos encontrado que las nociones básicas de la teoría de conjuntos están involucradas implícita o explícitamente en las diversas construcciones de los números naturales. Por otro lado, en los libros de textos actuales de primaria analizados también se detectaron casi explícitamente las nociones de conjunto, subconjunto y aplicación biyectiva en el tratamiento de los números naturales. Además, como los números naturales son el primer contacto de los niños con la matemática, surge como una consecuencia obvia que los futuros maestros de primaria deben poseer conocimientos matemáticos sólidos sobre dichos números, y por tanto conocer las nociones básicas de teoría de conjuntos involucradas en las diversas construcciones. Nuestra investigación nos ha permitido concluir que los números no deben confundirse con los conjuntos, que cada número no se puede identificar con una colección de conjuntos coordinables, ni como una propiedad de los conjuntos coordinables entre sí. Sin embargo, los cardinales de los conjuntos, su numerosidad, son la razón de ser de los números. Esto se muestra bien en el capítulo 5 al analizar la presentación de los números naturales en los libros de texto usados actualmente: ha desaparecido el *discurso* conjuntista, pero no la *praxis* conjuntista.

Bibliografía

Arrieche, M. (2002). *La teoría de conjuntos en la formación de maestros: Facetas y factores condicionantes en el estudio de una teoría matemátic*a. Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de la matemática de la Universidad de Granada.

Dedekind, R. (1888). *¿Qué son y para qué sirven los números?* [Traducción e introducción de José Ferreirós]. Madrid: Alianza Editorial, 1998.

Frege, G. (1884). *Fundamentos de la aritmética*. [Traducción de Ulises Moulines]. Barcelona: Laia, 1972.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matematicos. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 14 (3): 325-355.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1997). A semiotic and antropological approach to research in mathematics education. *Philosophy of Mathematics Education Journal,10.*[URL: http://ww.ex.ac.uk/local/PErnest/pome10/art7.htm].

Godino, J. D. (2001). Un enfoque semiótico de la cognición matemática. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. (Pendiente de publicación. Recuperable en: http://www.ugr.es/local/jgodino/).

Goetz, J, y Lecompte, M. (1988). *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa*. Madrid: Morata.

Krause, E. F. (1991). *Mathematics for elementary teachers*. Lexington, Ma: D. C. Heath.

Lorenzen, P. (1962). *Metamatemática*. [Traducción Jacobo Muñoz]. Madrid: Tecnos, 1971.

Mosterín, J. (2000). *Los lógicos*. Madrid: Espasa.

Peano, G. (1889). *Los principios de la aritmética*. [Traducción de Julián Velarde]. Oviedo: Clásicos El Basilisco, 1979.

Rico, L. y Sierra, M. (1997). Antecedentes del currículo de matemáticas. En L. Rico (Ed.), *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación matemática* (pp.17-75). Madrid: Síntesis.

Russell, B. (1903). *Los principios de la matemática*. [Traducción de Juan Carlos Grimberg]. Madrid: Espasa-Calpe, 1967.

Varela, A y cols (2000). *Matemática 1*. Madrid. Anaya.

Varela, A y cols (2000). *Matemática 2*. Madrid. Anaya.

Weyl, H. (1949). *Filosofía de las matemáticas y de la ciencia natural*. [Traducción de Carlos Ímaz]. México: Universidad Nacional Autónoma de México, 1965.

LAS PRÁCTICAS SOCIALES DE MODELACIÓN EN LA CONSTRUCCIÓN DE LO EXPONENCIAL

Jaime l. Arrieta Vera; Antonio Canul Pérez
Instituto Tecnológico de Acapulco; México
j_arrieta@hotmail.com

Resumen

La intención de la ponencia está en la dirección de presentar un estudio de las prácticas que ejercen los actores en un diseño de aprendizaje puesto en escena en el aula de matemáticas. El diseño referido se centra, no en los contenidos matemáticos en sí o en las producciones de los participantes, sino en las prácticas sociales ejercidas por los participantes utilizando herramientas y situadas en un contexto social; en este caso las prácticas sociales de modelación del enfriamiento de un líquido. Reportamos la narración de la puesta en escena en el aula de matemáticas de un diseño de aprendizaje basado en prácticas sociales de modelación de fenómenos: **"Lo exponencial: la ley de enfriamiento de Newton"**. Aquí narramos como los participantes construyen lo exponencial como herramienta al intentar comprender y predecir lo que sucede al enfriarse un líquido.

Perspectiva Teórica

La perspectiva teórica con que es aborda la presente investigación toma al sistema social como un sistema complejo, donde los humanos aprenden al ejercer prácticas. En el sistema escolar, que es el lugar que se atiende, confluyen dimensiones que sistémicamente relacionadas conforman un todo. Las dimensiones que consideramos en este todo tienen que ver con la naturaleza social del conocimiento, su formación histórico cultural y la producción y reproducción social del mismo, la dimensión epistemológica; la cognitiva, con relación a las interacciones que da lugar el proceso de aprendizaje, las interacciones entre los actores y las interacciones con el mundo; las formas de intervención en los procesos escolares, la didáctica; que adquieren sus particularidades en contextos sociales concretos. A esta perspectiva se le ha llamado socioepistemología (Cantoral, 2000; Cordero, 2001, 2002; Cantoral y Farfán, 2002, Arrieta, 2003).

Tres características son fundamentales en el enfoque teórico con el que se aborda la presente investigación.

1.-La primacía de las prácticas sobre los objetos. Es en el ejercicio de las prácticas donde los artefactos son utilizados, son utilizados con intenciones situadas en un contexto, es decir, se interactúa con herramientas.

2.-El carácter situado de dichas prácticas. El contexto viene a ser una componente inseparable de las prácticas. Esta inseparabilidad entre contexto y práctica esta en contraste con el papel de las condiciones que facilitan o alteran las acciones.

3.-El carácter discursivo en la construcción social del conocimiento, las interacciones. Los humanos participan en el mundo construyendo sus conocimientos, sus realidades y sus herramientas, interactúan con el mundo y con otros.

Metodología

Se diseño una secuencia siguiendo la metodología de ingeniería didáctica. Diseñamos e implementamos una secuencia didáctica como montaje de ingeniería didáctica de modelación: **"Lo exponencial: la ley de enfriamiento de Newton"**.

Las adecuaciones de esta metodología a nuestra perspectiva, incluye las adecuaciones producto de que no se toma a elementos de la obra matemática como base de los diseños sino a las prácticas sociales. De la misma manera el análisis a posteriori y las conclusiones se determinan adecuándose a las características de la investigación. Por esto el análisis de la puesta en escena de los diseñados reportados aquí se hace atendiendo más a estas particularidades, es decir, no atendiendo de forma genérica si se coincidió con lo planteado en el análisis predictivo, sino las formas particulares que adquieren las confrontaciones de las participaciones de los actores con el análisis predictivo.

El papel de los medios tecnológicos

Nuestro acercamiento a la modelación de fenómenos en el aula, hoy es posible, entre otras cosas, a dos cuestiones importantes, al desarrollo de los medios tecnológicos y al desarrollo teórico metodológico en el campo de la matemática educativa sobre la modelación de fenómenos. El desarrollo de los medios tecnológicos con los que se cuentan, nos permiten, ahora, tomar, organizar y manejar gráficas y datos en una forma óptima y rápida. Ya contamos con instrumentos de medición apropiados y de procesamiento de datos y de gráficas. Sin duda, el papel de los medios tecnológicos es de suma importancia, sin embargo los instrumentos no pueden desplazar el diseño de las secuencias, es decir, la incorporación de medios electrónicos, por si mismos, no inciden en la resolución de los problemas educativos, estos juegan un papel importante dentro de un proceso donde los actores ejercen el dominio de ellos. Es decir la importancia estriba en el **para que**, en el **cómo** y en el **quienes** utilizan los medios tecnológicos. La importancia de los utensilios no es los utensilios en sí, sino el programa que orienta su uso. En este sentido más amplio es cuando los utensilios adquieren un sentido propio como amplificadores de las capacidades humanas e instrumentos de la actividad del hombre.

Las prácticas de modelación

En este acercamiento, socioepistemológico, la naturaleza social del conocimiento es central, se cuestiona la pretensión de caracterizar de una manera definitiva a la ciencia como un sistema objetivo de conocimiento o como un sistema cultural interpretativo, ya sea a partir de los productos científicos o del quehacer cotidiano de los científicos, visto por ellos mismos o por observadores etnográficos. Se concibe al conocimiento científico como una construcción social sujeta a ciertos procesos discursivos específicos que incluyen tanto las versiones sobre ciertos temas como la organización del discurso, las maneras de hablar, de argumentar, de analizar, de observar, de construir con palabras el resultado de la experiencia, de validar un conocimiento y de establecer una verdad, así las propias investigaciones son consideradas piezas del discurso textual y argumentativo (Candela, 1999). Existen diferentes significados de modelación en nuestra disciplina. Quisiéramos esclarecer nuestra posición sobre lo que consideramos modelación desde nuestra perspectiva. Las prácticas de modelación que se han elegido se enfocan en prácticas que se desarrollan en interacción con fenómenos (físicos, químicos, sociales, etc.), conjeturando y realizando predicciones acerca de ellos utilizando modelos. Estas prácticas no solo se han ejercido históricamente, en el plano profesional y de los problemas cotidianos actuales esta práctica es ejercida.

La presente investigación toma epistemologías de las prácticas relacionadas con el uso de la matemática como base para el diseño de situaciones didácticas. En este sentido hemos rescatado prácticas en donde se combina la intervención en la naturaleza, el trabajo y el experimento con la especulación matemática. A la estructuración discursiva de estas prácticas en el aula es lo que llamamos las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula.

Las actividades de modelación las distinguimos de quienes usan la modelación para fines de enseñar a modelar, a desarrollar teorías de modelación o hacer uso de ésta. Reproducimos prácticas de modelación con la intencionalidad explícita de desarrollar procesos de matematización en el aula. De esta forma nuestra perspectiva asume a las prácticas sociales como la base de nuestros diseños, en particular tomamos como base a las prácticas centradas en los modelos numéricos y que hemos llamado la numerización de los fenómenos (Arrieta, 2002).

La secuencia

La secuencia que se presenta ha sido producto de diferentes investigaciones y puestas en escena en diversos escenarios con profesores y alumnos. Sin embargo aquí se hace referencia a la puesta en escena en el aula de matemáticas, del diseño de aprendizaje basado en prácticas sociales de modelación de fenómenos: **"Lo exponencial: la ley de enfriamiento de Newton"**. Aquí narramos como los participantes construyen lo exponencial como herramienta al intentar comprender y predecir lo que sucede al enfriarse un líquido.

El diseño de la secuencia sigue la perspectiva teórica de la que se pueden destacar tres aspectos: la selección de las prácticas sociales sobre el lenguaje de los objetos, el carácter discursivo de la construcción social del conocimiento y las interacciones en el aula.

En consecuencia la estructuración discursiva entre las herramientas, los modelos y las realidades viene a ser central. El otro eje gira entorno a la tesis de que en el ejercicio de ciertas prácticas sociales usando herramientas es donde aparecen, se estructuran y se movilizan como argumento ciertas nociones matemáticas, como lo exponencial.

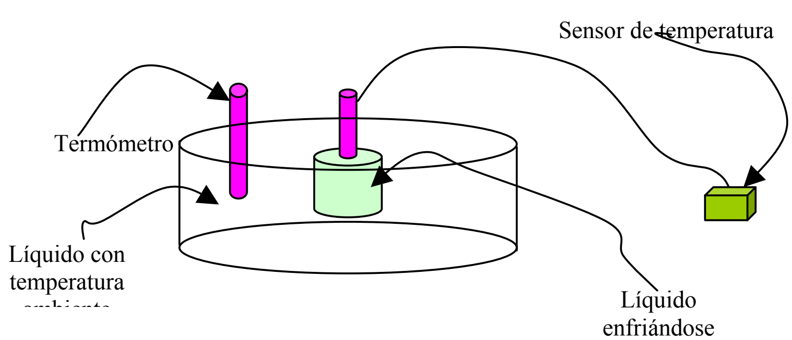
De esta forma nuestra perspectiva, la socioepistemológica, asume a las prácticas sociales como la base de nuestros diseños, en particular tomamos como base a las prácticas centradas en los modelos numéricos y que hemos llamado la numerización de los fenómenos. Partimos de un diseño experimental de enfriamiento de un líquido, se recolectan los datos, se realizan predicciones a partir de ello y se identifica lo exponencial en las tablas de datos. Las fases que en este proceso de modelación caracterizamos, no secuencialmente, son la construcción del modelo, su uso como herramienta y la formación de esquemas.

La predicción en este diseño es una práctica propuesta que al ejercerla conduce a la construcción de lo exponencial como herramienta.

La secuencia puesta en escena es la siguiente.

Enfriamiento de un líquido

1. Con el arreglo experimental que se muestra a continuación haga uso del sensor de temperatura y tome datos de las temperaturas del líquido del tubo de ensaye cada 5 segundos y de la temperatura ambiente.



2. Describan lo que observan

3. Construyan una tabla con estos datos en la calculadora.

1. ¿Cuál será la temperatura del líquido después de 23 segundos?

   ¿Cuál será la temperatura del líquido después de 59 segundos?

   ¿En que tiempo el líquido tendrá una temperatura de 42 grados?

   ¿En que momento tendrá el líquido una temperatura de 3 grados?

5. ¿Qué características tiene esta tabla?

6. Grafica el enfriamiento con respecto a la temperatura

   ¿Qué tipo de gráfica es?

   Encuentra la ecuación de la temperatura con respecto del enfriamiento.

7. Grafiquen los puntos haciendo uso de la calculadora.

   ¿Qué tendríamos que hacer para que la gráfica que obtengamos sea una curva más alta que la anterior?

   ¿Qué tendríamos que hacer para que la gráfica que obtengamos sea una curva más a la derecha que la anterior?

   ¿Qué tendríamos que hacer para que la gráfica que obtengamos sea una curva más abierta que la anterior?

8. Encuentren una curva cuya ecuación es de la forma $y = ab^x + c$ y que además se pegue a los datos obtenidos.

9.- ¿Que efectos produce en la curva variar el parámetro a?

   ¿Que efectos produce en la curva variar el parámetro b?

   ¿Que efectos produce en la curva variar el parámetro c?

10. Tenemos diferentes modelos, ¿cómo podríamos decir cual es mejor?

11. ¿Podrías hacer un esquema que relacione las características del fenómeno, de la tabla, del modelo gráfico enfriamiento–tiempo, de la ecuación y del modelo gráfico temperatura-tiempo?

	Cosa a tratar	Característica	Característica	Característica
Fenómeno				
Tabla numérica				
Gráfica Enfriamiento - tiempo				
Ecuación				
Gráfica temperatura - tiempo				
Ecuación				

La puesta en escena

Los participantes en esta actividad fueron cuatro equipos de cuatro estudiantes del tercer semestre de Ingeniería Bioquímica del Instituto Tecnológico de Acapulco (con una edad entre 18 y 20 años). En la selección de los estudiantes se considerarán las siguientes variables: edad, cursos tomados, grados, popularidad y personalidad. Nos interesaba que en los equipos haya un ambiente de participación, no se ejerza posiciones de liderazgo por alguno de los miembros que inhibieran la participación de los demás integrantes. Por tanto los equipos se integrarán con estudiantes del mismo grado, con edades sin grandes variaciones, con calificaciones medias y sin limitaciones para expresar sus ideas. Los actores de la puesta en escena han participado previamente en diseños sobre lo lineal y lo cuadrático. Ellos han estado familiarizados con el uso de sensores y supercalculadoras.

El arreglo experimental, contempló una cámara "móvil" (que captó los detalles en la discusión general y las discusiones en los grupos, pero especialmente el desarrollo de un equipo), una cámara fija (que captó el panorama general del aula), una grabadora por equipo (que captó las discusiones en el equipo) y material del aula (pizarrón, retroproyector, sensor de movimiento y de temperatura, y calculadoras graficadoras).

Conclusiones

Entre los resultados obtenidos podemos destacar los siguientes, de acuerdo a las fases del proceso que hemos definido anteriormente, la construcción del modelo identificando sus características, su uso como herramienta realizando predicciones sobre el fenómeno y la formación de esquemas.

Los estudiantes construyen como modelo exponencial una tabla de datos caracterizando lo que es exponencial en una tabla numérica, distinguiéndola de otras tablas de datos, es particular con modelos lineales y cuadráticos. La caracterización que alcanza el consenso es que la columna de la temperatura es proporcional a la columna de las razones de cambio de la temperatura con respecto del tiempo y de aquí logran plantear un modelo analítico: la ecuación en diferencias $\frac{\Delta T}{\Delta t} = kT + b$.

Los participantes establecen diferentes formas de predicción, entre ellos la aproximación lineal o métodos basados en aproximaciones de segundo orden.

Los actores construyen un esquema que relaciona entre sí los parámetros de los diferentes modelos con las características físicas del fenómeno.

	Características de lo exponencial en el sistema	**Parámetros**	**Parámetros**	**Parámetros**	**Métodos de predicción**
Fenómeno: enfriamiento de un líquido	Experimental: el enfriamiento del líquido es proporcional a la diferencia de temperaturas del líquido y del medio ambiente.	Constante de enfriamiento del líquido	Temperatura ambiente	Temperatura inicial	

Tabla numérica	$\frac{\Delta T}{\Delta t}$ proporcional a T	Constante de proporcionalidad	Temperatura inicial		Aproximación lineal o aproximación de segundo orden
Ecuación en diferencias: $\frac{\Delta T}{\Delta t} = kT + b$	Expresión de la forma $\frac{\Delta T}{\Delta t} = kT + b$ donde **k** y **b** son constantes	Coeficiente **k**	Coeficiente **b**		Manipulación algebraica de la fórmula
Gráfica: la línea recta	La recta	Inclinación de la recta	Altura de la recta		Interpolación lineal
$T = ae^{bt} + c$	Expresión de la forma $T = ae^{bt} + c$ donde **a, b** y **c** son constantes	Coeficiente **b**	Coeficiente **c**	Coeficiente **a**	Manipulación algebraica de la fórmula
Gráfica: la exponencial	Curva exponencial	Amplitud de la curva	Altura de la curva	Desplazamiento horizontal.	Interpolación lineal

Bibliografía

Arrieta, J. (2002). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*. Tesis Doctoral, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav, México.

Arrieta, J. (2002). La numerización de los fenómenos. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Volumen 16*. Grupo Editorial Iberoamérica.

Arrieta, J. y Buendía, G. (2001). El diseño de situaciones desde la perspectiva de la actividad humana. *Serie: Antologías. No. 1*, Programa Editorial de la Red Nacional de Cimates.

Candela, A. (1999) Ciencia en el aula. México: Paidós Educador

Cantoral, R. (2000). Pasado, presente y futuro de un paradigma de investigación en Matemática Educativa. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Volumen 13*. México: Grupo Editorial Iberoamérica 54-62.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2002). Sur la sensibilité a la contradiction en mathématiques; l'origine de l'analyse complexe. *Recherches en Didactique des mathématiques*. Vol. 22, Num. 2.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. R*evista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Relime Vol. 4. Num. 2*, pp. 103-128.

Cordero, F. (2002). Lo social en el conocimiento matemático: reconstrucción de argumentos y de significados. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 16*. Grupo Editorial Iberoamérica.

LA INGENIERÍA DIDÁCTICA EN EL DISEÑO Y SEGUIMIENTO DE UNIDADES CURRICULARES

Anido, Mercedes A.
FCEIA-FCEE Universidad Nacional de Rosario, Argentina
anidom@fceia.unr.edu.ar

Resumen

El objeto de la investigación es el diseño y seguimiento de unidades curriculares en el contexto de la enseñanza superior. Estas unidades curriculares se construirán como material de apoyo para dificultades especificas del aprendizaje y/o unidades para la enseñanza de tópicos específicos, seleccionados por su valor conceptual, en los programas de la llamada matemática básica en facultades donde su carácter es predominantemente instrumental. Siguiendo a Wittman consideramos que el desarrollo de la educación matemática como una "ciencia de diseño" implica encontrar maneras de cómo diseñar, por un lado una investigación empírica y por otro lado como relacionarlas con otras. Wittman propone una aproximación específica a la investigación empírica y la llama "Investigación Empírica Centrada Alrededor de Unidades de Enseñanza". Una unidad sustancial de enseñanza es esencialmente abierta. Sólo los problemas clave son fijos y deben proveer una rica fuente de actividades matemáticas. Se trata de realizar propuestas de situaciones de aprendizaje destinadas a asegurar de manera controlada la emergencia de conceptos matemáticos en el contexto de aprendizaje. En el marco de la teoría de las situaciones didácticas de Guy Brousseau se pretende modelizar y contrastar empíricamente los fenómenos didácticos que surgen en el ámbito didáctico a partir de la problematización y cuestionamiento de un "conocimiento matemático enseñado".

Se busca: 1. Caracterizar las condiciones que deben implementarse en la enseñanza para facilitar un aprendizaje que reúna ciertas características fijadas a priori. 2. Determinar los elementos que debe poseer la descripción de un proceso de enseñanza para asegurar que pueda ser reproducido desde el punto de vista del aprendizaje que induce en los alumnos.

Justificación de la investigación

El proyecto nace por la inquietud de un grupo de profesores que, desde distintas cátedras en distintas facultades donde la matemática además de disciplina formativa primordial es herramienta de uso general, coinciden en hacer suya una problemática que se establece claramente en el Documento de Discusión Sobre la Enseñanza y Aprendizaje de Matemáticas en el Nivel Universitario propuesto por: "The International Commission on Mathematical Instrucción" (ICMI-1998).

Se consideran, en dicho documento los principales cambios ocurridos en años recientes, que afectan profundamente la enseñanza de las matemáticas en el nivel universitario. Ellos son i) el incremento del número de estudiantes que actualmente cursa estudios terciarios. ii) importantes cambios pedagógicos y curriculares en el nivel Preuniversitario, iii) las crecientes diferencias entre la educación matemática de nivel secundario y la de nivel terciario, con respecto a sus propósitos, objetivos, métodos y enfoques de enseñanza; iv) el rápido desarrollo de la tecnología; y v) presiones sobre las Universidades para que den cuenta pública de sus acciones. A estos factores se suman los procesos de revisión curricular que desde el 2000 se desarrollan en las facultades de ciencias Económicas e Ingeniería de la Universidad de Rosario y la masividad que caracteriza a las universidades del estado en la República Argentina. Todo esto lleva a los siguientes interrogantes.

¿Las teorías didácticas que son relevantes en el nivel escolar también lo son en el nivel universitario? ¿Hay necesidad de teorías específicas para el nivel universitario? ¿De qué formas puede cambiar la enseñanza para tener en cuenta las diferencias en formación, dificultades, habilidades e intereses del alumno? ¿Qué métodos son efectivos para la enseñanza a clases numerosas? ¿Qué es lo que sabemos sobre la

enseñanza y aprendizaje de tópicos específicos como Cálculo, Álgebra Lineal, Geometría, Probabilidad? ¿Hay características que son relevantes sólo para tópicos específicos? ¿Hay características que son comunes a varios tópicos? ¿Cómo ha cambiado la tecnología el contenido y la filosofía del currículum? ¿Deberían darse los programas existentes de la misma forma que en el pasado, o puede la tecnología asistir en el desarrollo de habilidades superiores o más importantes? ¿Qué cambios están, o deberían estar, produciéndose en el currículum? Algunas áreas temáticas de matemáticas están declinando mientras que otras están en ascenso. ¿Cuál es la lógica detrás de estos cambios? ¿Hay áreas que son ahora menos importantes y deberían otras áreas tomar su lugar? ¿Sabe Matemática un estudiante capaz de resolver una ecuación pero no de aplicarla a problemas? ¿Debe enseñarse un concepto para lo que surja? o donde surja ? ¿Puede enseñarse Matemática con el debido rigor y de modo efectivo introduciendo los conceptos cuando se necesiten, motivados por problemas? Cómo realizar en esa situación la formalización teórica ? y el orden lógico ? ¿Cómo mantener la coherencia curricular?
En una aproximación a estas cuestiones hacemos nuestros los objetivos:

- identificar obstáculos que puedan impedir el aprendizaje de las matemáticas;
- identificar, publicar y someter a críticas, nuevas estrategias de enseñanza y los usos positivos de la tecnología en unidades curriculares específicas
- elaborar materiales curriculares (Parceriza Arán, 1996) adecuados a la semipresencialidad que impone las carencias edilicias y de personal en los cursos masivos. de la Universidad Nacional de Rosario

Marco teórico

La investigación se desarrolla en el marco de la metodología de enseñanza e investigación propio de la "Ingeniería Didáctica".
La Ingeniería Didáctica incorpora una visión propia del aprendizaje de la Matemática, si bien adopta una perspectiva piagetiana en el sentido de que se postula que todo conocimiento se construye por interacción constante entre sujeto y el objeto, se distingue de otras teorías constructivistas por su modo de incorporar la relación entre el alumno y el saber. Los contenidos son el sustrato sobre el cual se va a desarrollar la jerarquización de estructuras mentales. Esto es particularmente importante en el nivel matemático de los cursos universitarios. El problema principal de investigación es el estudio de las condiciones en las cuales se constituye el saber con el fin de optimizar su control y su reproducción.
Los contenidos matemáticos, toman especial importancia. No obstante, no se puede separar la concepción de la Matemática como ciencia de su propio proceso de estudio. Ambos aspectos integran la esencia del objeto de investigación.
La elaboración de un problema es un paso de una Ingeniería Didáctica. En este contexto, el término Ingeniería Didáctica designa un conjunto de secuencias de clase concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo de manera coherente por un profesor-ingeniero, con el fin de realizar un proyecto de aprendizaje para una población determinada de alumnos. En el transcurso de las interacciones entre el profesor y los estudiantes, el proyecto evoluciona bajo las reacciones de los estudiantes y en función de las selecciones y decisiones del profesor. De esta forma, la Ingeniería Didáctica es a la vez un producto, resultante de un análisis a priori, y un

proceso en el transcurso del cual el profesor ejecuta el producto adaptándolo, si se presenta el caso, a la dinámica de la clase.
Como metodología de investigación., se caracteriza en primer lugar por un esquema experimental basado en las "relaciones didácticas" en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza.
Wittmann (1995) considera la Educación Matemática como “ciencia de diseño” y que las específicas tareas de la educación matemática, solo pueden ser actualizadas si la investigación y desarrollo tienen específicos vínculos con la práctica en su “corazón” y si el mejoramiento de la práctica educativa emerge con el progreso en el campo de investigación como un todo. Wittmann llama “corazón” de la educación matemática a una variedad de componentes que incluyen en particular el desarrollo y evaluación de unidades de enseñanza sustanciales.
Un excelente ejemplo de diseño y seguimiento de “unidades curriculares” como objeto de investigación, lo encontramos en el Instituto Freudenthal de Holanda, que desde su creación bajo el nombre IOWO se ha dedicado de manera prioritaria a generar nuevas propuestas curriculares para la enseñanza. También Becker and Miwa en Japón y autores como Artigue, Douady, Balacheff, Laborde, Dorier, Robinet han desarrollado en los últimos anos investigaciones de este tipo. Kilpatrick y Sierpinska (1993) vinculan la reproducibilidad de las metodologías didácticas a las unidades de enseñanza.
En el contexto, específico de la enseñanza superior, dan pautas, entre otras, sobre el estado del arte en este tipo de investigaciones: los análisis epistemológico de la génesis histórica de conceptos elementales del álgebra lineal que, en relación a la enseñanza, hace Dorier; las investigaciones sobre los obstáculos del formalismo en el primer ciclo de la universidades francesas recopiladas por el mismo Dorier con Robert, Robinet y Rogalski; el análisis de una macro ingeniería didáctica, también en álgebra lineal, elaborada en “Université des Sciencias et Technologies de Lille”, los estudios de Hillel sobre los diferentes niveles de lenguaje utilizados para describir los vectores y las operaciones; el análisis sobre los modos de razonamiento en álgebra lineal de Sierpinska, Defence, Khatcherian Saldnha.

Metodología de investigación

Se trabajará complementando diseños de tipo cualitativo y cuantitativo. La metodología de la ingeniería didáctica se caracteriza, en comparación con otros tipos de investigación basados en la experimentación en clase, por el registro en el cual se ubica y por las formas de validación a las que está asociada. De hecho, las investigaciones que recurren a la experimentación en clase se sitúan por lo general dentro de un enfoque comparativo con validación externa, basada en la comparación estadística del rendimiento de grupos experimentales y grupos de control. Este no es el caso de la Ingeniería Didáctica que se ubica, por el contrario, en el registro de los estudios de caso y cuya validación es en esencia interna, basada en la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori (Artigue, 1995).
No obstante el mismo Gerard Vergnaud (1980) expone: “Mi conclusión es que, para estudiar objetos relativamente complejos, la didáctica marcha necesariamente sobre varias piernas a la vez. Creo que esta diversidad metodológica es inevitable e indispensable”.

En nuestro caso la posibilidad de obtener datos en Cátedras con 3000 alumnos nos induce en determinados ejes de la investigación, como ser la opinión de los alumnos sobre los textos o hipertextos diseñados en el marco del proyecto, a utilizar también, los recursos del análisis estadístico La investigación de los procesos de aprendizaje, se realiza pues por triangulación de metodologías, datos e investigadores. Se busca la complementación de lo métodos cuantitativos y cualitativos de investigación La metodología cuantitativa, se utiliza en diseños cuasi experimentales con los recursos de la teoría estadística principalmente Análisis de Datos con las Técnicas del Análisis de Correspondencias Múltiples(ACM) para las variables cualitativas(categóricas) y el Análisis de Componentes Principales(ACP) para abordar el estudio de variables cuantitativas Desde otro ángulo , prevalece la metodología cualitativa que sigue las cuatro fases de la Ingeniería Didáctica: la 1) de análisis preliminar; 2) de concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas de la ingeniería; 3) de experimentación; y, finalmente, 4) de análisis a posteriori y evaluación. En cuanto a la dimensión temporal se trata de un objeto de estudio con su propia distinción temporal en un proceso experimental delimitado por las fases mencionadas

El proyecto de referencia, en su etapa actual constituye un "programa de hecho", en el sentido de Lakatos, que motiva y coordina diferentes grupos en los que trabajan, en paralelo, docentes de cinco facultades e investigadores en distintas líneas de estudio y en distintas áreas de la Matemática, cuyas actividades comprenden: búsqueda y preparación de problemas recopilación de información, investigación curricular, diseño de unidades curriculares, análisis de procesos de aprendizaje.

La ingeniería didáctica y sus fases

LOS ANÁLISIS PREVIOS:

- Ubicación en el cuadro teórico.
- Conocimientos didácticos previamente adquiridos.
- Análisis epistemológico.
- Enseñanza tradicional en el tema.
- Concepciones de los estudiantes.
- Restricciones:
    - Cuadros
    - Competencias
    - Herramientas

LA CONCEPCIÓN Y EL ANÁLISIS A PRIORI

- Selecciones metodológicas y conceptuales.
- Selecciones principales.
- Selecciones locales.

DESARROLLO DE UNA EXPERIENCIA
⇩
ANÁLISIS A POSTERIORI

Fuente :Elaboración propia

En este marco, las investigaciones, realizadas en la Universidad Nacional de Rosario siguen los siguientes ejes:

- Búsqueda e inventario de los estudios que se encuentran dispersos sobre ingenierías didácticas en distintos temas de la matemática básica del nivel universitario.
- El Análisis preliminar se ubicó especialmente en la identificación de algunas dificultades relevantes en el pasaje de la escuela media a la universidad y el análisis de sus posibles causas desde una perspectiva epistemológica cognitiva didáctica y socio cultural
- El análisis previo en la selección de problemas motivadores y el análisis del juego de cuadros intervinientes en los problemas.
- Diseño de protocolos de observación.
- Determinación de la población a observar, determinación de los instrumentos de recolección y registros de la información (narrativo y/o grabación magnetofónico).
- Análisis de criterios e instrumentos de evaluación

En cuanto a los diseños de unidades para experimentación en cursos de grado desarrolladas con alumnos pertenecientes a distintas carreras, se ha seleccionado como temas del diseño, hasta ahora en las asignaturas relativas al Álgebra Lineal y Geometría Analítica, aquellos cuyo aprendizaje debe superar determinados obstáculos epistemológicos o didácticos.

Para ello se efectuó previamente el diseño curricular y la puesta en marcha de talleres de formación docente en nivel de Postgrado, en los que se ha buscado la reflexión sobre la propia práctica docente y la ubicación del problema didáctico por el propio docente Entre el 2001 y el 2002.en estos talleres se elaboraron los materiales curriculares correspondientes a las unidades temáticas:

- el vector
- ecuación de la recta
- sistemas de ecuaciones lineales en dos variables y programación lineal
- sistemas de inecuaciones lineales
- cónicas
- ecuación general de 2º grado

En algunos de las investigaciones experimentales con estas unidades curriculares se han completado todas las fases de las respectivas ingeniarías e incluso repetido loa ciclos en la búsqueda de regularidades, que fortalezcan la transferencia. *Para la evaluación de su calidad se sigue un proceso cíclico de desarrollo y evaluación que comprende*

- *Elaboración de una primera propuesta de material, experimentación del mismo, evaluación de los resultados.*
- *Confrontación de los análisis a priori y a posteriori realizado en cada ingeniería didáctica y propuesta de modificación de la ingeniería y para la reducción de las distorsiones que pueden invalidarlas.*
- *Revisión de las experiencias realizas y repetición para contaste de resultados, enriquecimiento de la investigación y búsqueda regularidades en los procedimientos.*

La transferencia

Si bien a nivel de informes parciales los análisis previos y los resultados de algunas experiencias han sido publicados con detalle (problemas matemáticos planteados, registro de hechos significativos, cuestionarios, etc.); subsiste una cuestión ¿cómo transmitir fielmente las experiencias realizadas y hacerlas así más fructíferas? A este efecto nos remitimos a la posición de Artigue (1995):

“La posibilidad de transmisión de los diferentes tipos de resultados, por fuera de la comunidad estricta de los investigadores, no implica los mismos problemas. Mientras que es posible imaginar la transmisión relativamente eficaz de los resultados relacionados con las concepciones y los obstáculos, no sucede lo mismo con los resultados de la ingeniería”.

Bibliografía

Anido de López, Mercedes. (2002) *Una propuesta de incorporación de herramientas computacionales a la enseñanza de la Matemática a la universidad. Evaluación de experiencias*. Tesis Doctoral .UNED Madrid

Anido de López M.; Rubio Scola H (2000) *Un programa sobre el uso de Herramientas CAS en el aprendizaje de la Matemática Básica en la universidades nacionales de la Provincia de Santa Fe, Argentina.* Revista Lecturas Matemáticas 21 (1) 67-77-

Artigue, M.; Douday, R.; Moreno, I.; Gómez, P. (1995): *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática.* Grupo Editorial Iberoamericano.

Brousseau, G. (1988): *Los diferentes roles del maestro.* U.Q.A.M. Buenos Aires.

Chevallard, Yves; Bosch Mariana; Gascón, Josep (1997*): Estudiar Matemática.* Edit. ICE-Horsori. 213-225; 277-290.

Parceriza Arán, Artur (1996) *Materiales Curriculares.*Grao. Barcelona

Vergnaud, Gerard (1980*): Problemática y Metodología de la Investigación en Didáctica de la Matemática”.* 2º Seminario Investigaciones Psicopedagógicas. Barcelona

Wittmann, E.CH. (1984) *Teaching Units as the Integrating Core of Mathematics Education. Educational Studies in Mathematics,* 15. Belgium Kluwer Academic Publishers. 25-361.

Wittmann, E.Ch. (1995) *Mathematics Education as a Desing Science.* Educational Studies in Mathematics, 29. Belgium Kluwer Academic Publishers. 355-274

ANÁLISIS DE LOS MODOS DE PENSAMIENTO EN LA INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DEL CONCEPTO DEPENDENCIA/INDEPENDENCIA LINEAL EN R^2

Víctor Manuel Castilla Navarro
Universidad Autónoma de Yucatán. México.
vcastillan@hotmail.com

Resumen

En este trabajo de investigación se analizaron los diversos modos de pensamiento que un grupo de estudiantes de nivel superior utilizaron para resolver problemas que involucraron el concepto dependencia/independencia en Álgebra Lineal, y se trató de descubrir si lograron conectar los modos de pensamiento sintético-geométrico y analítico-aritmético al resolver los problemas relacionados con dicho concepto. Para ello se aplicaron dos pruebas: la primera (fase exploratoria) consistió en 9 reactivos y tuvo como objetivo conocer los niveles de conocimiento que los estudiantes tenían sobre el concepto; con base en los resultados obtenidos, en la segunda prueba (fase final) se diseñó una situación de aprendizaje con 5 reactivos que indujeran el uso de distintas representaciones del concepto dependencia/independencia lineal provocando la conexión entre los modos de pensamiento analítico y sintético, provocando el uso de las gráficas (pensamiento sintético-geométrico) sobre los procedimientos algebraicos o aritméticos (pensamiento analítico-aritmético). Todo lo anterior con el fin de que el estudiante actúe, reflexione, evolucione su propio conocimiento y lo conduzca a construir dicho concepto. Finalmente se reportaron los resultados obtenidos del análisis detallado de los diferentes modos de pensamiento utilizados para la resolución de los problemas. Se identificaron las dificultades que los estudiantes presentaron para la comprensión del concepto dependencia/independencia. Se mostró que el valor del debate, el uso de distintos modos de pensamiento y la incorporación de gráficas como parte de una actividad matemática, favorecen notablemente el proceso de aprendizaje y comprensión del concepto dependencia/independencia en Álgebra Lineal.

Objetivos del trabajo

Diseñar una situación de aprendizaje que favorezca el uso de distintas representaciones del concepto dependencia/independencia en Álgebra Lineal, para que el estudiante actúe, reflexione, evolucione su propio conocimiento y que lo conduzcan a construir dicho concepto. Analizar la naturaleza de las dificultades que presentan estudiantes de nivel superior para entender el concepto dependencia/independencia en Álgebra Lineal, y estudiar los procesos cognitivos de aprendizaje y las estrategias que utilizan en la resolución de problemas matemáticos. Mostrar que el uso de distintos modos de pensamiento y la incorporación de gráficas como parte de una actividad matemática, favorecen la comprensión del concepto dependencia/independencia en Álgebra Lineal y ayudan a desarrollar la algoritmia, la intuición y la argumentación.

Justificación o marco teórico

En la actualidad, el Álgebra Lineal tiene un importante papel en el desarrollo científico y tecnológico, de igual manera resulta de suma importancia en las carreras de economía y áreas de las ciencias sociales. Esta influencia motiva a la investigación de sus conceptos básicos, al origen, desarrollo y evolución de los mismos, a analizar las dificultades que muestran los estudiantes para aprenderlos y a encontrar estrategias de enseñanza que superen tales dificultades. El aprendizaje memorístico es un recurso usado frecuentemente al buscar una significación de lo que se aprende. Sin embargo, para que la memoria opere de un modo eficiente son importantes la repetición y el repaso, pero se retiene mejor el conocimiento si se almacena como parte de una red de conocimientos. A pesar de que el maestro siempre trata de dar a los estudiantes algoritmos para resolver problemas matemáticos, los alumnos sólo retienen los conocimientos y no profundizan el significado. En un nuevo modelo de enseñanza, el apoyo de actividades prácticas, el uso de instrumentos y equipos, la importancia de integrar el conocimiento de un modo significativo, el valor del debate y la necesidad de atender a las diferencias individuales de los estudiantes, deberían ser considerados dentro del aula de clases para facilitar y fortalecer dicho aprendizaje.

Con este trabajo se pretende fomentar el uso de diversos modos de razonamiento (analítico-aritmético y sintético-geométrico) en los estudiantes a través de un conjunto de actividades llamadas “situaciones de aprendizaje”, buscando robustecer el concepto matemático dependencia/independencia para vectores en R^2; es decir, se busca que los estudiantes hagan propio ese concepto al pensarlo en diferentes modos y así fortalecer el aprendizaje significativo.

En los últimos años Anna Sierpinska (investigadora en la Universidad de Concordia en Montreal, Canadá) ha desarrollado trabajos de investigación acerca de la evolución del pensamiento matemático en los estudiantes. Ella distingue tres modos de pensamiento en álgebra lineal: sintético-geométrico (se basa en el uso de figuras geométricas), analítico-aritmético (las figuras geométricas ahora pueden ser escritas como ecuaciones o desigualdades) y analítico-estructural.

En su tesis de maestría, Bonifacio Mora desarrolló una metodología que permite analizar las dificultades que los estudiantes experimentan con sistemas de ecuaciones lineales y con determinantes (íntimamente ligados al concepto dependencia/independencia lineal), analizando las ideas erróneas, los procesos mentales y las cogniciones intuitivas. El trabajo incluye también el diseño de actividades que favorecen en el alumno el uso de diversas representaciones del mismo concepto matemático, analizando su desempeño analítico y su interpretación geométrica.

Procedimientos: materiales y métodos

El trabajo se desarrolló básicamente en tres etapas.

PRIMERA ETAPA. Se hizo una revisión de bibliografía para analizar la evolución y desarrollo históricos que giran en torno al concepto dependencia/independencia en Álgebra Lineal. Al mismo tiempo se trabajó con un grupo de estudiantes de nivel superior que ya habían recibido un curso de Álgebra Lineal, a ellos se les aplicó una serie de problemas (FASE EXPLORATORIA) relacionados con el concepto dependencia/independencia lineal con el fin de conocer sus nociones acerca del mismo tema. Ellos trabajaron de manera individual y entregaron por escrito todas sus respuestas a las cuestiones matemáticas planteadas, permitiendo ésto un mejor y detallado análisis.

SEGUNDA ETAPA. Se hizo un análisis de la fase exploratoria: se realizó una confrontación entre lo esperado (análisis a priori) y lo sucedido (análisis a posteriori).

Con base en los resultados obtenidos en la fase exploratoria, se diseñó una situación de aprendizaje o situación-problema (FASE FINAL) para aplicarla al grupo de estudiantes de nivel superior. Ellos trabajaron, igual que en la fase exploratoria, de manera individual, luego compartieron sus opiniones en pequeños grupos para obtener una conclusión del problema; entregaron por escrito todas sus respuestas a las cuestiones matemáticas planteadas; además, se registró el desarrollo de la sesión de aplicación de la situación de aprendizaje usando una videocámara permitiendo apreciar el proceso de socialización que experimentaron los estudiantes, todo lo anterior para permitir un mejor y detallado análisis. Finalmente, se analizaron los modos de pensamiento manifestados por los alumnos para obtener así las conclusiones.

TERCERA ETAPA. Se escribió y revisó el documento que integra los resultados de la investigación.

Fase exploratoria.
Los ejercicios que se aplicaron en la fase exploratoria son:

1. Grafique los vectores (2, 1) y (4, 2).
2. Grafique los vectores (2, -1) y (4, 2).
3. Compare las gráficas de los problemas 1 y 2. Escriba sus conclusiones.
4. Exprese al vector (3, -1) como combinación lineal de los vectores (1, 1) y (1, -1).
5. Grafique los vectores (1, 1), (1, -1) y (3, -1). Interprete geométricamente el problema 4.
6. Determine si el conjunto {(1, 0), (0, 1), (1, 1)} es linealmente independiente o linealmente dependiente. Justifique su respuesta.
7. Grafique los vectores (1, 0), (0, 1), (1, 1). ¿Existe alguna relación gráfica entre estos vectores?
8. Usando los vectores (1, 2, -3) y (-1, -3, 2), exprese a (1, 1, - 4) como una combinación lineal de esos dos vectores.
9. Determine si el conjunto {(1, 0, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 0)} es linealmente independiente o linealmente dependiente. Justifique su respuesta.

Los vectores del reactivo 1 son linealmente dependientes, pues uno de ellos se puede ver como múltiplo del otro; por lo tanto, al graficarlos sobre un plano, el vector (4, 2) será la prolongación del vector (2, 1); es decir, estarán sobre una misma línea recta. Con este reactivo se pretende que el alumno observe que dos vectores linealmente dependientes quedan sobre una misma línea recta, ya sea que queden con la misma dirección o no. Los vectores del reactivo 2 son linealmente independientes, ya que ninguno es múltiplo del otro; por lo tanto, al graficarlos sobre un plano no estarán sobre una misma línea recta. Con este reactivo se pretende que el alumno observe que dos vectores linealmente independientes no quedan sobre una misma línea recta. En el reactivo 3, el alumno se deberá dar cuenta que en el reactivo 1 los vectores quedan sobre una misma línea recta (son colineales), ya que un vector es múltiplo del otro (linealmente dependientes). En el reactivo 2 los vectores no son colineales.

En el reactivo 4 se pretende medir el concepto de combinación lineal y conocer las herramientas que tienen los estudiantes para obtener dicha combinación. Con el reactivo 5 se pretende que los estudiantes interpreten geométricamente una combinación lineal, al analizar la gráfica de tres vectores linealmente dependientes.

En el reactivo 6 se pretende medir el concepto de conjunto de vectores linealmente independiente o dependiente y conocer las herramientas que tienen los estudiantes para justificar su respuesta. Con el reactivo 7 se pretende que los estudiantes interpreten geométricamente un conjunto de vectores linealmente independientes o dependientes.

En el reactivo 8 se pretende medir el concepto de combinación lineal en R^3 y conocer las herramientas que tienen los estudiantes para obtener dicha combinación. Con el reactivo 9 se pretende medir el concepto de conjunto de vectores linealmente independiente o dependiente en R^3 y conocer las herramientas que tienen los estudiantes para justificar su respuesta.

En este reporte de la investigación no se presentan detalladamente los resultados obtenidos en la fase exploratoria, pues su único objetivo fue medir el nivel de conocimientos que los estudiantes tenían sobre el concepto dependencia/independencia lineal.

Diseño de problemas para la fase final

Con este trabajo de investigación se pretende diseñar una colección de problemas para la fase final que contenga una secuencia mejor estructurada de problemas que en la fase exploratoria, diseñada con base a los resultados obtenidos. En esta fase se pretende que los estudiantes a los que se les aplicó utilicen los modos de pensamiento analítico-aritmético y sintético-geométrico, y que sus respuestas provoquen una interacción entre estos modos.

Los problemas propuestos son los siguientes:

1. Traza los vectores $\vec{u}_1 = (2, 8)$, $\vec{u}_2 = (1, 4)$ en una sola gráfica.

   a) ¿Qué tipo de ángulo forman los vectores $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$?¿Un ángulo nulo, un ángulo agudo, un ángulo recto, un ángulo obtuso, un ángulo llano?

   b) ¿Son colineales los vectores $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$?

   c) Obtén un número real k tal que $\vec{u}_1 = k\vec{u}_2$.

   d) Encuentra una combinación lineal de los vectores $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ igualada al vector nulo. Es decir, encuentra números reales α_1 y α_2 **diferentes de cero** tales que $\alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 = \vec{0}$.

   e) ¿Es el conjunto $\{(2, 8), (1, 4)\}$ linealmente independiente?¿Por qué?

f) Obtén un vector $\vec{u}_3$ diferente de $\vec{u}_2$ tal que $\vec{u}_3$ sea un vector linealmente dependiente con el vector $\vec{u}_1$. Justifica tu procedimiento.

2. Traza los vectores $\vec{v}_1 = (2, 8)$, $\vec{v}_2 = (-1, 4)$ en una sola gráfica.

a) ¿Qué tipo de ángulo forman los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$?¿Un ángulo nulo, un ángulo agudo, un ángulo recto, un ángulo obtuso, un ángulo llano?

b) ¿Son colineales los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$?

c) Obtén un número real n tal que $\vec{v}_1 = n\vec{v}_2$.

d) Encuentra una combinación lineal de los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ igualada al vector nulo. Es decir, encuentra números reales β_1 y β_2 **diferentes de cero** tales que $\beta_1 \vec{v}_1 + \beta_2 \vec{v}_2 = \vec{0}$.

e) ¿Es el conjunto {(2, 8), (-1, 4)} linealmente independiente?¿Por qué?

f) Obtén un vector $\vec{v}_3$ diferente de $\vec{v}_2$ tal que $\vec{v}_3$ sea un vector linealmente independiente con el vector $\vec{v}_1$. Justifica tu procedimiento.

3. Con base en los resultados obtenidos en los ejercicios 1 y 2, completa la siguiente tabla:

	PROBLEMA UNO VECTORES $\vec{u}_1$ Y $\vec{u}_2$	PROBLEMA DOS VECTORES $\vec{v}_1$ Y $\vec{v}_2$
¿Qué tipo de ángulo forman los vectores?		
¿Son colineales los vectores?		
¿Uno de los vectores es múltiplo del otro?		
¿Son linealmente independientes?		

4. a) Describe algún procedimiento geométrico para encontrar vectores linealmente dependientes en R^2.
b) Describe algún procedimiento geométrico para encontrar vectores linealmente independientes en R^2.
c) Describe algún procedimiento algebraico para encontrar vectores linealmente dependientes en R^2.
d) Describe algún procedimiento algebraico para encontrar vectores linealmente independientes en R^2

5. Sean los vectores $\vec{w}_1 = (1,2)$ y $\vec{w}_2 = (-1,1)$.

a) Calcula los vectores $2\vec{w_1}$ y $3\vec{w_2}$.

b) Encuentra el vector $\vec{w_3}$ tal que $\vec{w_3} = 2\vec{w_1} + 3\vec{w_2}$.

c) En un mismo sistema de ejes, graficar los vectores $2\vec{w_1}$, $3\vec{w_2}$, $\vec{w_3}$.

d) Efectúa gráficamente la suma de vectores $2\vec{w_1}$ + $3\vec{w_2}$ utilizando el método del paralelogramo. ¿Cuál es el vector resultante?

e) Expresa el vector $\vec{w_3}$ como combinación lineal de los vectores $\vec{w_1}$ y $\vec{w_2}$.

f) Expresa el vector $\vec{w_4} = (0,6)$ como combinación lineal de los vectores $\vec{w_1}$ y $\vec{w_2}$. Es decir, encuentra números reales λ_1, λ_2 tales que $\vec{w_4} = \lambda_1 \vec{w_1} + \lambda_2 \vec{w_2}$.

g) ¿Qué relación geométrica tienen los vectores $\vec{w_4}, \lambda_1 \vec{w_1}, \lambda_2 \vec{w_2}$?

Resultados, discusión y conclusiones

Durante la aplicación de las dos pruebas se trató de descubrir si el grupo de estudiantes de Nivel Superior lograba conectar los modos de pensamiento sintético-geométrico y analítico-aritmético al resolver problemas relacionados con los conceptos dependencia/ independencia lineal. Para esto se les aplicó dos pruebas, la FASE EXPLORATORIA y la FASE FINAL. Al diseñar la situación de aprendizaje (FASE FINAL) se trató de provocar la conexión entre los modos de pensamiento analítico y sintético, induciendo el uso del pensamiento sintético-geométrico sobre los procedimientos algebraicos o aritméticos. Las gráficas de los vectores en R^2 que se pidieron tenían la intención de mostrar con figuras los conceptos dependencia/independencia lineal, de manera que al observar las gráficas los estudiantes pudieran describir algunas características para dichos conceptos. Con los resultados obtenidos en las dos series de problemas que se aplicaron, es notable el uso constante de parte de los estudiantes del pensamiento analítico-aritmético al aplicar largos procedimientos algebraicos o algorítmicos, como si estuvieran siguiendo al pie de la letra una serie de instrucciones que finalmente resolverán el problema, todo lo anterior por el hecho de ser fomentado, este tipo de pensamiento, en el aula de clases como recurso privilegiado al momento de enfrentarse con algún problema; el resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, calcular el determinante de una matriz, transformar una matriz a la escalonada reducida, entre otros, fueron los recursos más utilizados por los estudiantes. Inclusive, algunos de ellos introdujeron en sus soluciones algunos conceptos de Cálculo Vectorial (funciones vectoriales, derivadas) y Geometría Analítica (pendiente de una recta, ecuación de una recta). El método de aplicación de la fase final favoreció notablemente la discusión, el debate y el intercambio de ideas entre los estudiantes participantes dentro del proyecto. Se obtuvo la conclusión de que los estudiantes no lograron una conexión clara entre los modos de pensamiento analítico-aritmético y sintético-geométrico, por lo que se considera necesario el desarrollo de nuevos proyectos de investigación que promuevan la relación entre ambos modos de pensamiento con el propósito de beneficiar los procesos de aprendizaje de conceptos algebraicos en estudiantes de nivel superior, diseñando actividades mejor estructuradas que los conduzcan a completar dichas conexiones.

Bibliografía

Davidoff, L.L. (1990). *Introducción a la Psicología*. Tercera edición pp. 261-268.

Dorier, J.L. (1991). *Sur l'enseignement des concepts élémentaires d'algebre linéaire á l'université. Recherches en didactique des Mathématiques.* Vol. 11 (2/3) pp. 325-364.

Mora, B. (2001). *Los modos de pensamiento en la interpretación de la solución de sistemas de ecuaciones lineales.* Tesis de maestría. DME. Cinvestav-IPN.

Saldanha, L.A. (1995). *The notions of linear independence/dependence: a conceptual analysis and students difficulties*. Tesis de maestría. Concordia University. Montreal, Québec, Canadá.

Sierpinska, A. (2000). *On some aspects of students'thinking in linear algebra*. Research on the teaching and learning of linear algebra conducted at the Concordia University by A. Sierpinska and J. Hillel. Montreal, Canadá.

ALGUNAS DIFICULTADES EN LA COMPRENSIÓN Y APLICACIÓNDEL CONCEPTO DE NÚMERO FRACCIONARIO

Cortes Salazar Héctor Manuel, Pérez Duarte Luis Fernando
Fundación Universitaria Panamericana, Colombia
Hcortes@unipanamericana.edu.co cortes199@hotmail.com

Resumen

Regularmente dar a conocer el concepto de fracción se hace de una forma memorística y no dedicando el tiempo suficiente para que el niño lo asimile y comprenda, en otros casos, simplemente se omite la definición, se inicia en el tema con algoritmos dejando de lado el aprendizaje significativo lo cual genera dificultad en la representación gráfica y en la ubicación en la recta numérica. "Cuando un concepto ha sido incomprendido, y por tanto no sé le ha dado significación al grupo de signos por medio de los cuales se refiere al concepto, los trabajos de tipo sintáctico, que tienen que ver con los manejos algorítmicos, a lo más pueden llegar a desarrollarse de manera mecánica y memorística pero nunca significando las acciones llevadas a cabo con los signos" (Gaviria Torres, 1997). Basado en las experiencias conocidas tanto por los docentes y estudiantes y por la bibliografía consultada se evidencia la necesidad de plantear estrategias metodológicas donde se le permita al estudiante que observe, manipule, compare, invente, descubra, se equivoque, relacione y llegue a su propio conclusión optimizando así su rendimiento académico, la comprensión de las fracciones, el desarrollo de los niveles de pensamiento y de la conciencia critica que lo lleve a cuestionar su propia realidad, a mirar los atractivos de su entorno y a comprometerse en su perfeccionamiento. La anterior reflexión lleva a plantear como problema: "como abordar algunas de las dificultades que se presentan en la comprensión, aplicación y resolución de problemas en donde interviene el concepto de número fraccionario y sus operaciones aritméticas". Con los siguientes objetivos: 1) Establecer las dificultades que se presentan en la compresión, aplicación y resolución de problemas donde interviene el concepto de número fraccionario. 2)Proponer estrategias didácticas, enmarcadas en la metodología problémica y la resolución de problemas, para reforzar o generar los conceptos relacionados con la fracción que debe manejar el estudiante en el grado quinto. 3) verificar que las estrategias propuestas (juegos) afianzan el concepto parte todo y su representación gráfica. El desarrollo de este trabajo se realizó en cuatro fases:

Método-Fase 1: Se elaboró una prueba piloto la cual aplicamos, convalidamos y corregimos los errores hallados. **Fase 2:** Se aplicó la prueba ya corregida, donde su objetivo era identificar las deficiencias en los estudiantes con respecto al concepto de fracción. La prueba mostró deficiencias en el manejo del concepto parte todo y su representación gráfica. **Fase 3:** Ya identificadas las falencias de los estudiantes se elaboraron cuatro juegos para superar dichas falencias. **Fase 4:** Se verifica que los juegos si cumplen con el objetivo de superar las deficiencias establecidas. Se manejaron dos grupos uno se intervino (aplicación de juegos) y en el otro se trabajo de manera tradicional. Conclusión: La aplicación de la segunda prueba muestra que el grupo que se intervino alcanzó un nivel mayor de comprensión del concepto parte todo y de representación gráfica.

Introducción

A partir de los estudios e investigaciones en educación matemática, se han puntualizado reflexiones muy importantes sobre el acontecer en su proceso de enseñanza y aprendizaje en el ámbito escolar. Estas investigaciones, se han desarrollado debido a la atención que matemáticos y educadores han prestado hacia qué matemáticas se enseñan y se aprenden en la escuela y cómo se llevan a cabo estos procesos. Pero, también con el interés en el qué y en el cómo de las matemáticas que deberían enseñarse y aprenderse en la escuela. Todo lo anterior, con el fin de comprender y mejorar tanto el aprendizaje como la enseñanza de la misma. Un área a la cual se le presta gran atención, por parte de los investigadores, es la correspondiente al pensamiento numérico, particularmente y de manera especial, la enseñanza y aprendizaje de los números fraccionarios. Es común entre los docentes escuchar, que el niño aprende con gran dificultad qué es una fracción y cómo se utiliza, al observar los procesos matemáticos que los alumnos de quinto grado desarrollan, en los colegios Jazmín Occidental, Centro Integrado educativo del Norte y Hombre del Río, se evidencia una gran dificultad para resolver problemas donde intervienen los números fraccionarios y sus operaciones aritméticas. Esto se puede caracterizar básicamente por tres aspectos generales como los enuncia Arce y Maza (1991):

a. *La naturaleza del propio concepto de fracción, que se incluye en una posición intermedia entre par ordenado, con el que coincide en su constitución formal, y el número racional, con el que comparte algunas propiedades numéricas.*
b. *La ambigüedad del concepto de fracción, que se aplica tanto a la descripción de una relación entre una parte y el todo en que se incluye, a una razón entre dos cantidades o a la descripción de una función operador entre dos cantidades.*
c. *El tipo de enseñanza a que ha venido sujeto, en el cual se pasaba con suma rapidez a un desarrollo algorítmico que venia inevitablemente limitado por las dificultades en el aprendizaje del concepto.*[25]

Por las razones expuestas se decidió realizar el trabajo de investigación teniendo como problema a indagar: "algunas de las dificultades que se presentan en la comprensión, aplicación y resolución de problemas en donde interviene el concepto de número fraccionario y sus operaciones aritméticas". El trabajo de investigación se realizó con los estudiantes de quinto grado de los colegios Jazmín Occidental, Centro Integrado Educativo del Norte y Hombre del Río, las edades de éstos varían entre los 9 y 12 años. Se trabajo con una muestra intencional del 100% de la población. Además, se tuvo en cuenta los aspectos cognitivos, actitudinales y procedimentales de los estudiantes, de manera que al analizar el desempeño de los educandos en las actividades propuestas, fuera posible determinar el grado de dificultad que presentan en la resolución de los diversos tipos de problemas planteados. Algunos elementos que justifican este trabajo se exponen a continuación. Las fracciones en la vida cotidiana tiene mucha aplicación pero algunos ejercicios y problemas planteados por el docente no están encaminados hacia la vida cotidiana del niño de tal forma que estos se quedan como simples espectadores que no hacen el uso necesario del concepto y uso de las fracciones.

Al dar a conocer el concepto de fracción se hace de una forma memorística y no se dedica el tiempo suficiente para que el niño asimile y comprenda dicho concepto, en otros casos simplemente se omite la definición, se inician en el tema con algoritmos dejando de lado el aprendizaje significativo. "Cuando un concepto ha sido incomprendido, y por tanto no sé le ha dado significación al grupo de signos por medio de los cuales se refiere al concepto, los trabajos de tipo sintáctico, que tiene que ver con los manejos algorítmicos, a lo más pueden llegar a desarrollarse de manera mecánica y memorística pero nunca significando las acciones llevadas a cabo

[25] ARCE JIMÉNEZ, Carlos. MAZA GOMÉZ, Carlos. Ordenar y Clasificar: El contexto numérico. Madrid. Editorial Sintesís. 1991

con los signos" (Grupo Pretexto)[26]. Otra dificultad que presentan los estudiantes es la representación de las fracciones en diagramas circulares o rectangulares para luego ubicarlos en la recta numérica. Con fundamento en las experiencias conocidas tanto por los docentes y estudiantes y por la bibliografía consultados se evidencia la necesidad de plantear estrategias metodológicas que le permita al estudiante que observe, manipule, compare, invente, descubra, se equivoque, relacione y llegue a su propio conclusión optimizando así su rendimiento académico, la comprensión de las fracciones, el desarrollo de los niveles de pensamiento y de la conciencia critica que lo lleve a cuestionar su propia realidad, a mirar los atractivos de su entorno y a comprometerse en su perfeccionamiento.

El desarrollo de este trabajo se realizó en tres fases:

FASE 1: se elaboró una prueba piloto en la cual se aplico, convalido y se corrigió los errores hallados.

FASE 2: se aplicó la segunda prueba ya corregida, cuyo objetivo era identificar las deficiencias en los estudiantes con respecto al concepto de fracción.

FASE 3: ya identificadas las dificultades de los estudiantes se elaboraron cuatro juegos para fortalecer dichas falencias.

Objetivos

- Establecer las dificultades que se presentan en la comprensión, aplicación y resolución de problemas donde interviene el concepto de número fraccionario en estudiantes de quinto grado.
- Proponer estrategias didácticas, enmarcadas en la metodología problémica y la resolución de problemas, para reforzar o generar los conceptos relacionados con la fracción que debe manejar el estudiante en el grado quinto.

Diseño metodológico

El trabajo esta enmarcado en una metodología descriptiva – estructurada. Descriptiva por el hecho de observar y analizar un fenómeno como lo es el manejo de los conceptos básicos en los números fraccionarios. Estructurada porque se elaboró un instrumento y se convalidó, con el fin de obtener resultados aproximados a una realidad.

Instrumento. Para establecer las dificultades de los estudiantes se diseño una prueba con la siguiente estructura.

Aspectos a evaluar. Está prueba fue diseñada para evaluar competencias básicas sobre números fraccionarios de los estudiantes de quinto grado. Se trata de identificar las herramientas y habilidades simbólicas que utilizan los niños en el manejo del concepto de número fraccionario, para esto, se elabora un problema en un contexto donde son valorados los conceptos: parte todo, equivalencia e igualdad, operaciones, la fracción como: una medida, un resultado de una división, una razón y un operador.

[26] GAVIRIA TORRES, César. Elementos para una posible propuesta en fraccionarios. Tesis Universidad Distrital. Bogotá. 1998

La prueba fue concebida para la evaluación de competencias, es decir, procura indagar sobre cómo los niños utilizan conocimientos en fraccionarios dentro de sus contextos diarios. El instrumento de evaluación que se aplicó contiene una serie de acontecimientos vinculados a un determinado contexto o situación. La estructura narrativa y el lenguaje coloquial, facilitan que buena parte de las preguntas aparezcan de manera natural. Se busca con esto que los niños puedan involucrarse con los personajes y sus ocurrencias, haciendo de esta manera que la prueba no resulte un cuestionario artificial o un examen corriente.
Se encuentra conformada la prueba por trece preguntas, que van ascendiendo en orden de dificultad, las tres primeras preguntas evalúan la relación entre una parte y el todo, donde se le pide que relacione una unidad con un número fraccionario, éste representará el número de partes y el número total de partes. Las siguientes dos preguntas evalúan la expresión de un número fraccionario como medida donde se le pide la congruencia entre dos o más fracciones. El siguiente tema a evaluar es la fracción como un operador, este concepto sé evaluó en las preguntas seis, siete y ocho, donde se pide que halle la razón entre un número fraccionario y un número natural. En las preguntas nueve, diez y once, se evaluó las operaciones de suma y resta de números fraccionarios donde se relacionan estas dos operaciones con la unidad total, en una de ellas se le indica que operación debe realizar en el otro cuestionamiento no se le da la ayuda esto tiene como objetivo determinar si el estudiante identifica la operación que debe realizar. El contenido que se evaluó en las preguntas doce y trece es la combinación del concepto de parte todo y la fracción como operador, éstas son de carácter abierto donde el estudiante gráfica aspectos relacionados con el texto inicial, para determinar el manejo gráfico de los números fraccionarios este aspecto se evaluó en las preguntas dos, tres y cinco.

Resultados del instrumento

Se realizó un análisis de los resultados de la prueba aplicada pregunta por pregunta de la cual se obtuvo los siguientes resultados:

- *Los estudiantes no tienen dificultades en el manejo del concepto de fracción como medida y operador.*
- *Los estudiantes no tienen dificultades en manejo de las operaciones básicas de la matemática con fracciones.*
- *Los estudiantes presentan dificultad en el concepto parte – todo y en la representación gráfica de dicho concepto.*

Los resultados muestran que las dificultades de los estudiantes, está en la comprensión y aplicación del concepto parte – todo. Teniendo en cuenta que los estudiantes del grado quinto deben manejar este concepto de acuerdo a la propuesta curricular del ministerio de Educación Nacional, se diseño una estrategia didáctica para reforzar dichos concepto.

En busca de soluciones a la deficiencia encontrada se realizó una investigación en las diferentes instituciones de educación superior (aquellas que poseen Facultad de Educación) encontrándose estudios basados en metodología tradicionales que apuntan a la enseñanza del concepto y no a reforzar conceptos previos, por esta razón se diseñaron cuatro juegos: rectifracciones, bingo fracción, parques fracción y carrera fraccionada enmarcados en la lúdica, metodología problémica y resolución de problemas. Las estrategias propuestas no solo se orientan al manejo del concepto, sino al desarrollo de otras habilidades como: el trabajo en equipo, el análisis, agilidad mental, agilidad en el cálculo, lectora y la capacidad de argumentar una solución, por ello se enmarcan en la metodología problémica y en la resolución de problemas. A continuación se hace una breve descripción de cada estrategia.

Descripción de los cuatro juegos

Carrera de observación fraccionada

Objetivo. Reforzar de forma activa en los estudiantes el concepto de fracción (relación entre una parte y el todo) en el que se incluye a una razón entre dos cantidades. Para aprovechar el contexto como un recurso en el proceso de enseñanza en nuestro juego, se parte de ésta herramienta donde el estudiante reconoce lugares de la institución a través de pistas, y se utilizan elementos que hay en dicho lugar para enseñarle a través de la experiencia distintas formas de la fracción: parte – todo.

***Materiales.** Pistas, 5 jueces, cronometro, pito, realizar banderas blancas.*

Materiales específicos para pistas

Pista N° 1: Reloj con manecillas
Pista N°2: Figuras de formas triangulares, rectangulares, círculos. Cada forma con dos colores como mínimo.
Pista N° 3: Marcas para libros (20 unidades)
Pista N° 4: Cartulina (10 unidades de 1/8) regla, lápiz, tijeras, cosedora.
Pista N° 5: Botella de 1 litro marcada con los mililitros, jarra con agua potable, vasos desechables
Pista N° 6: Pintar un cuadro donde falte por pintar ¼ de él.
Pista N° 7: Mezcladores de colores (100 unidades) 63 rojos, 37 cafés.
Pista N° 8: Un par de zapatos, metro
Pista N° 9: La cantidad de sillas en la sala de maestros debe ser par.
Pista N° 10: Domino – Ábaco.

El parqués en fracciones

Este juego afianza el concepto parte- todo de las fracciones, induce al estudiante al proceso de búsqueda de solución de problemas nuevos, aplicando conocimientos ya asimilados y adquiriendo independientemente otros. Le ofrece al estudiante problemas con preguntas abiertas, que le llevan a generar, comprensión lectora, ha operar todos los datos presentados y a conseguir sus propias metas, decidiendo y examinando la mejor estrategia para llegar a ella.

Materiales. Par de dados, Tablero de parques removible, Juego de fichas, Colores, Hoja tamaño carta.

Rectifracciones

Objetivo general. **Lograr que los niños afiancen sus conocimientos sobre los números fraccionarios a través del juego.**

Objetivo específico. Por medio de este juego lograr que los estudiantes manejen la ubicación de los números fraccionarios en la recta numérica.

En el desarrollo del juego los participantes se ven enfrentados a situaciones que los lleva a la discusión y toma de decisiones, los problemas planteados en las tarjetas y que ellos deben resolver los ubica en situaciones de la vida cotidiana teniendo en cuenta el medio en que se desenvuelven y así los conceptos son reforzados de una forma clara y divertida.
Materiales. Dos dados, 4 fichas, 34 tarjetas rojas, 34 tarjetas amarillas, Un tablero, 8 caritas tristes, 16 estrellas, una hoja de respuestas

Bingo fracción
Los resultados del proyecto muestran que los estudiantes tienen dificultad para relacionar la parte literal con la parte gráfica en las fracciones.
Objetivos
- Comprender y relacionar la parte literal con la parte gráfica en las fracciones.
- Desarrollar la agilidad mental.
- Mejorar comprensivamente la capacidad de atención y concentración.

Número de jugadores de 2 en adelante. El juego bingo fracción se enmarca en la resolución de problemas, ya que brinda al estudiante la posibilidad de resolver problemas numéricos que le exigen la aplicación de diversas estrategias para hallar la solución y así poder participar activamente en el juego.
Materiales. Ruleta, tablero control, lápiz, hoja en blanco, hoja de respuesta, 30 fichas rectangulares, 30 cartones, 270 fichas redondas.

Conclusión
La aplicación de la segunda prueba – luego de realizar los cuatro juegos diseñados para superar las falencias identificadas en los estudiantes - muestra que el grupo que se intervino alcanzó un nivel mayor de comprensión del concepto parte todo y de representación gráfica respecto del grupo control.

Bibliografía
Acevedo, M. y otros (1996) Marco conceptual de las pruebas de matemática para el programa de evaluación de la educación básica. ICFES Servicio Nacional de Pruebas, Bogotá.

Alcaldía Mayor Santa Fé de Bogotá. Secretaría de Educación. (1999)Evaluación de competencias básicas en lenguaje matemáticas, Resultados. Bogotá.

Dominguez, I. y Escorca, J. (1999) Evaluación en competencias en matemáticas a través de la resolución de problemas. Bogotá. Universidad Distrital.

Fernandez, P. La enseñanza problémica de las matemáticas. Instituto Superior Pedagógico “Enrique J. Varona”. Cuba. En: http://www.cuba.cu/publicaciones/documentos/orbita/orbita1.htm.

Fernández, J. (1995) Algunas contradicciones y dificultades en la resolución de problemas. México: Suma 20. Pág. 53.

Gaviria, C. (1998) Elementos para una posible propuesta de trabajo en fracciones. Bogotá. Universidad Distrital.

Goméz Tagle, M. (1999) Una posibilidad lúdica del fundamento. España. Universidad Michoacana de San Nicolás De Hidalgo. 1999

Guzmán, J. (1996) El conocimiento matemático en los procesos de resolución de problemas de mecánica clásica, México. Editorial Iberoamericana. Pág. 223.

Guzmán, M. (1998) Elementos para una propuesta de enseñanza del concepto de número fraccionario. Bogotá. Universidad Distrital. 1998.

Maza, C. (1991) Ordenar y clasificar el contexto numérico de las fracciones. Madrid: Síntesis.

Ministerio de Educación Nacional. (1998) Lineamientos curriculares. Bogotá: MEN.

Riveron, O. y otros. Aprendizaje basado en problemas: una alternativa educativa. Universidad Ciego de Avila. Cuba. En: E-mail: oto@centic.unica.cu.

Riveron, O. y otros. Influencia de los problemas matemáticos en el desarrollo del pensamiento lógico. Cuba. En: E-mail: oto@centic.unica.cu.

Riveron, O. Resolución de problemas una alternativa didáctica en el aprendizaje de las matemáticas. En: E-mail: oto@centic.unica.cu

Roman, G. (1999) *Las fracciones en su aspecto parte todo, algunas dificultades y estrategias didácticas para abordarlas*. Bogotá. Universidad Distrital.

Vasco, C. (1994) El archipiélago fraccionario, Santa Fe de Bogotá, *M.E.N. Vol. 2- 11-94*. pp. 23-45.

EL PENSAMIENTO MATEMÁTICO EN FARADAY Y SU CONTRIBUCIÓN A LA TEORÍA DE LOS CAMPOS ELECTROMAGNÉTICOS DE MAXWELL

David Warren Ruíz Márquez
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey
Campus Ciudad de México
dwarren@itesm.mx

Resumen

Como parte de una búsqueda acerca de la relación entre pensamiento matemático y visualización, este capítulo de la historia del electromagnetismo en su etapa de formalización dentro del pensamiento científico constituye una parte de una investigación de tipo filosófico que pretende tender un puente entre la epistemología de conceptos matemáticos y la enseñanza en escuelas de ingeniería. El estudio parte de la revisión de algunos aspectos de la filosofía de Ludwig Wittgenstein, filósofo que es considerado por autores como Paul Ernest un iniciador del constructivismo social en las matemáticas.

La idea rectora de este trabajo es reformular una manera de ver el pensamiento matemático y su relación con la visualización de manera diferente a la basada en representaciones como en (Duval 1999) quien presenta parte del pensamiento matemático como procesamiento y conversión entre distintos modos de representación. Al revisar autores como (Kline 1972), que escribe sobre el pensamiento matemático a través de la historia, más bien parece una historia comentada de los conceptos matemáticos, salpicada con anécdotas de lo que hizo determinado matemático y el alcance de su trabajo, pero poco dice de las condiciones que rodeaban a tales acontecimientos. El ejemplo del trabajo de Gooding al analizar visualmente los procesos de descubrimiento de Faraday, marca una posible aplicación de una metodología similar para investigar el pensamiento matemático en los alumnos.

Introducción

La motivación para llevar a cabo este trabajo parte de mi interés en el uso de la tecnología, y en especial de la computadora, en la enseñanza de las matemáticas como apoyo a la visualización del espacio en 3d, así como la continuación de algunas de las ideas plasmadas en mi trabajo de tesis de maestría (Ruiz 1992). La revisión de trabajos como los de (Kaput 1999) y (Duval 1999) apoyados en las teorías representacionales semióticas y el uso de registros internos y externos no me atraen hacia un marco de referencia psicologista. Más bien me inclino hacia una fundamentación cercana a las teorías antropológicas del aprendizaje desarrolladas por (Lave 1988) y (Wenger 1998), además de su relación con la filosofía de Wittgenstein en cuanto al carácter contextual del conocimiento expresado en dos de sus principales obras (Wittgenstein 1958) y (Wittgenstein 1969).

El marco teórico

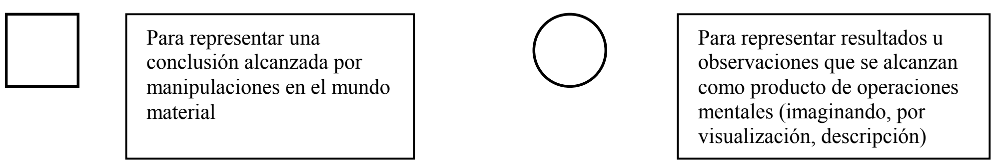
Ludwig Wittgenstein, en sus *Investigaciones Filosóficas* hace una crítica a la filosofía tradicional señalando que los problemas de la filosofía están ligados al mal uso del lenguaje, para lo cual propone una *Filosofía Analítica* como herramienta para analizar los problemas que plantea la filosofía, en especial, la teoría del conocimiento. Vemos en (Ernest 1998) una descripción de todas las interpretaciones que se han hecho de la contribución de Wittgenstein a la filosofía de las matemáticas: un finitista estricto, un antropologista, un convencionalista empedernido, un promotor de la anti-filosofía de las matemáticas. Para Wittgenstein la meta de la teoría del conocimiento es más bien una filosofía del lenguaje aplicada al lenguaje del conocimiento. El significado se extrae del uso que se hace de las palabras, ubicadas éstas en un *juego de lenguaje* caracterizado por su conexión con una práctica social determinada denominada una *forma de vida*. El análisis de la actividad de Faraday establecido en los siguientes párrafos hace la distinción de que, a pesar de tener la idea generalizada de que Faraday realizó su trabajo en forma aislada, en realidad la comunicación a través de su diario y del correo demuestra que participaba de la forma de vida de sus colegas científicos de la época (J. B. Biot y Davy). Para Wittgenstein, la necesidad lógica y matemática surge de un acuerdo humano al seguir una regla estipulada por un juego de lenguaje.

El pensamiento en Faraday

El punto de vista proposicional del conocimientol trata a la teoría como un sistema de proposiciones lógicamente estructuradas, reconociendo sólo la parte del proceso de descubrimiento que puede ser accesado verbalmente y ordenado lógicamente (Gooding 1990).

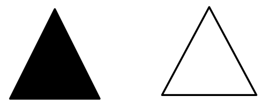
Gooding analiza el trabajo de Faraday en el proceso de descubrimiento del primer motor eléctrico haciendo una recuperación de la contingencia como un elemento importante en el proceso de descubrimiento; la incertidumbre toma un papel importante en la primera fase del descubrimiento, y una vez que los procedimientos van siendo dominados, las habilidades que lo hicieron posible salen del campo visual de las prácticas de una comunidad.

Para mostrar los procedimientos seguidos por Faraday en la obtención de resultados, Gooding usa diagramas que ilustran conceptos, modelos, aparatos y resultados alcanzados en diferentes partes del proceso de descubrimiento:

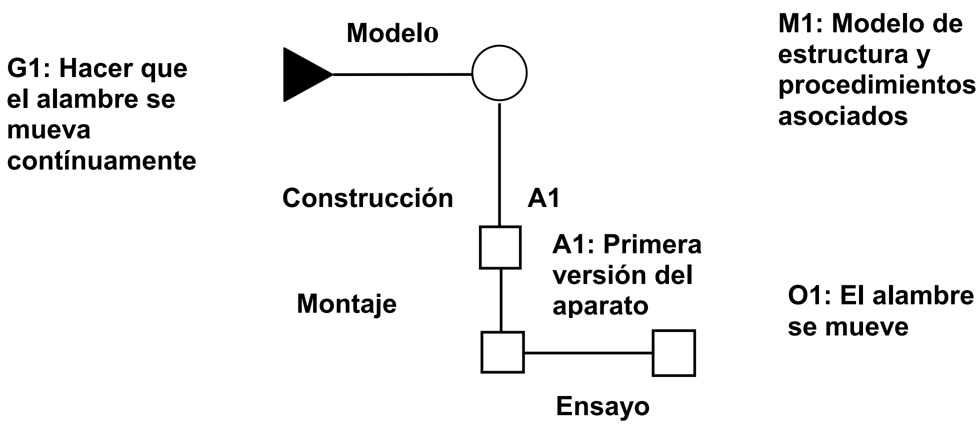


y los procesos que son producto de la interacción de los dominios material y conceptual se representan por medio de una combinación de cuadrados y círculos:

Cuando ocurren elecciones de una meta principal, usa un triángulo sólido, por ejemplo, al pasar de la búsqueda de evidencia para una hipótesis a la prueba de los métodos usados para obtener esa evidencia. Un triángulo abierto indica cambios de secuencias definidas por el triángulo sólido, como al cambiar de un método de producir un fenómeno a otro.



Las acciones se representan por líneas a las que se agrega el nombre del procedimiento.
Un ejemplo del uso de esta notación es el diagrama siguiente:



G_n denota una meta; A_n denota una estructura o una pieza de un aparato; O_n representa un resultado observado; M_n denota un constructo (modelo)

La orientación de las líneas indica, si son horizontales, que las acciones que se llevan a cabo producen un cambio en el conocimiento, mientras que las verticales, indican que no hay avance durante esas acciones. Si las líneas están a 45° se representa adquisición como destreza manual, el ajuste de aparatos o la reconsideración de los elementos del modelo.

Este aparato visual que Gooding emplea para analizar el pensamiento y la acción de Faraday en su proceso de descubrimiento descansa en un marco filosófico de la ciencia que considera las contingencias de un proceso a veces fallido y la mayoría de las veces exitoso, plantea para mí un reto en la consideración de la enseñanza de las matemáticas en los siguientes términos:

- Las matemáticas que enseñamos ya lógicamente estructuradas no consideran nuestros propios procesos de aprendizaje como profesores, sino que siguen el curso del planteamiento del autor de cierto libro de texto
- La evaluación se hace únicamente sobre los resultados exitosos, ignorando los procesos y las contingencias surgidas durante los mismos

- Podemos considerar análogamente que el proceso de aprendizaje del alumno es también un proceso creativo y de descubrimiento y analizar los modelos que emplea para llegar a un resultado

En este marco, podemos comenzar a considerar posiciones acerca del aprendizaje como la señalada en (Chaiklin 1993): "El aprendizaje es medido tradicionalmente sobre la suposición de que es una posesión de individuos que se encuentra dentro de sus cabezas. Pero más bien se encuentra en las relaciones entre la gente. El aprendizaje está en las condiciones que reúnen a la gente y organizan un punto de contacto que permita tomar relevancia para particulares piezas de información; sin el punto de contacto, sin el sistema de relevancias no hay aprendizaje y hay poca memoria". Esta concepción comulga con la posición wittgensteniana acerca de la no existencia del lenguaje privado y es la que probablemente ha contribuído a etiquetarlo como conductista. Si a lo único a lo que tenemos acceso es a manifestaciones exteriores del conocimiento, entonces cuestiones como *pensamiento matemático* ó *visualización* tendrían que ser reformulados en términos diferentes a los de "representaciones" y "procesos mentales". Una posible alternativa es la construcción de modelos que consideren la práctica en contexto, como el ejemplo visto en Gooding y el análisis del lenguaje, no sólo verbal, sino gestual, corporal, etc., en la evaluación de un aprendizaje menos individualista y más social. La visualización tendría entonces una connotación de alcance social: La imagen que proyecto en una computadora, que para mí es un paraboloide hiperbólico y que para algunos de mis alumnos es un sombrero de mariachi y para otros una trompeta no tiene el efecto de ser la imagen que quería comunicar. Es necesario construir su significado junto con ellos a través de un juego de lenguaje apropiado, y no imponiendo una definición. Entonces, como en el caso de Faraday, los alumnos irán creando modelos que fallen en los primeros intentos pero que se irán refinando en la práctica, a través de un proceso de maduración que parte de la incertidumbre y a la cual castigamos en nuestros exámenes tradicionales.

Conclusión

Este artículo constituye una contribución a un trabajo de más largo alcance en la búsqueda de elementos que ayuden a desenmarañar la problemática de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en comunidades en contextos cada vez más complejos debido a la cantidad de información accesible y la carencia de métodos para manejarla. La idea de que la solución no está en los problemas individuales que cada alumno tiene para aprender matemáticas sino que tiene que ver con una comunidad en la que están además los maestros, el entorno y otras categorías sociales hace que la búsqueda de los estudios se enfoque cada vez mas al contexto y menos al individuo.

Referencias

Chaiklin, S. L., Jean, Ed. (1993). *Understanding Practice. Perspectives on activity and context.* Learning in doing: Social, cognitive, and computational perspectives, Cambridge University Press.

Duval, R. (1999). *Representaction, Vision and Visualization: Cognitive functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning.* North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Cuernavaca, Morelos, ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics and Environmental Education.

Ernest, P. (1998). *Social Constructivism as a Philosophy of Mathematics,* State University of New York Press.

Gooding, D. (1990). *Mapping Experiment as Learning Process: How the first Electromagnetic Motor was invented.* 4S/EASST Conference, Amsterdam, Sage Publications, Inc.

Kaput, J. J. (1999). *On the developement of human representational competence from an evolutionary point of view: from epsiodic to virtual culture*. North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Cuernavaca, Morelos, ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics and Environmental Education.

Kline, M. (1972). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días,* Alianza Editorial.

Lave, J. (1988). *Cognition in Practice,* Cambridge University Press.

Ruiz, D. W. (1992). Una introducción a las ecuaciones de Maxwell. Su génesis y la enseñanza actual de la teoría electromagnética en las escuelas de ingeniería. México, D.F., CINVESTAV-IPN**:** 104.

Wenger, E. (1998). *Communities of practice. Learning, Meaning and Identity,* Cambridge University Press. Libro acerca de la concepción del aprendizaje a través de la práctica en comunidades en donde el significado se negocia.

Wittgenstein, L. (1958). *Investigaciones Filosóficas,* Instituto de Investigaciones Filosóficas UNAM/CRITICA.

Wittgenstein, L. (1969). *Sobre la Certeza,* Gedisa editorial.

REPORTES DE INVESTIGACIONES EN CURSO

Se presentan informes acerca del estados en que se encuentran investigaciones que responden a los diversos momentos del ejercicio indagativo, a saber, proyectos en curso y aquellos terminados.

ACERCA DE LA ACTIVIDAD DE MODELACIÓN LAS TEMPERATURAS DE LA TIERRA

Felicitas Morales, Rosa María Farfán
Cinvestav – IPN, México
fmorales@mail.cinvestav.mx, rfarfan@mail.cinvestav.mx

Resumen
La presente investigación está basada en el análisis de una memoria posterior a la "Théorie Analitique de la Chaleur", escrita por Jean Baptiste J. Fourier en 1827, titulada "Mémoire sur les Températures du Globe Terrestre et des Espaces Planétaires". En este trabajo nos proponemos, a través de un estudio epistemológico, obtener información acerca de las hipótesis que llevaron a Fourier a escribir las conclusiones que presenta en dicha memoria, mediante el análisis de las referencias que en ésta se encuentran, así como caracterizar los elementos que le permitieron construir su modelo y que sean susceptibles de observación en la escuela, a través de diseños *adhoc.* Con esta investigación estaremos aportando indicativos dirigidos a la modelación de fenómenos físicos complejos, como el calor, en la educación universitaria.

Introducción

La modelación matemática es un tema con muy diversas e importantes aplicaciones, prueba de ello son las aportaciones y trabajos que muchos colegas de nuestra disciplina han realizado y dedicado a ello (Arrieta, 2003, Farfán, 1987, Mochón, 2000) y también las múltiples perspectivas desde las que esta actividad ha sido observada. Nuestra principal motivación con respecto a esta actividad en la presente investigación es la de caracterizar las habilidades específicas que permiten que esta actividad se lleve a cabo, es decir, ¿pueden especificarse habilidades o ciertas características digamos especiales, que permitan que esta actividad se realice?

Para responder esta pregunta, decidimos analizar una obra del siglo XIX de: Jean Baptiste Joseph Fourier. Titulada: "*Memoire sur les Températures du Globe Terrestre et des espaces Planétaires*". Fourier fue un gran estudioso de la filosofía natural y por esto sus investigaciones estaban encaminadas al entendimiento de fenómenos naturales en su mayoría, que en gran parte estaban relacionados con la ciencia de la Física, de manera que consideramos a Fourier como un "modelador experto" del cual pretendemos profundizar en la medida de lo posible en su pensamiento plasmado a través de sus escritos, para investigar como este científico realiza su actividad de modelar y qué características podemos encontrar en ésta, que le permitieron generar sus conclusiones. Cabe aclarar que no pretendemos llevar tales escritos al aula, sino entender primero los razonamientos e implicaciones físicas y matemáticas que el documento contiene y tratar de dilucidar la intención con que este fue escrito, para a la postre lograr la caracterización que nos ocupa. Con la finalidad de realizar el objetivo, consultamos por supuesto la obra citada como la fuente primaria de nuestra investigación, sin embargo y debido a su naturaleza, ella por sí misma no fue suficiente, por lo que tuvimos que recurrir a la lectura y análisis de otras fuentes secundarias que nos sirvieran como marco de referencia para el escrito de Fourier, entre ellas se encuentra "Theorie Analytique de la Chaleur" y algunos análisis históricos entre otras.

Justificación y Antecedentes

La experiencia como profesores nos provee de la certeza de que el discurso matemático escolar se compone en su mayoría de las notas y de los libros de texto que se recomiende usar para apoyar las actividades y cubrir el programa. Sin embargo en este saber no están incorporados los significados primarios, ya que se ignoran las etapas, objetivos, momentos y contextos por los que ha transitado el conocimiento desde su construcción original. Es por ello que un estudio de corte epistemológico podría proveer de argumentos olvidados por la enseñanza tradicional, de forma tal que a través de este tipo de estudios sea posible dar enfoques diferentes o alternativos a los conceptos estudiados en el nivel superior.

El análisis de un texto matemático antiguo como el que nos ocupa, busca establecer un acercamiento a la génesis y desarrollo de los conceptos que en este se establecen, con el objeto de encontrar en él los elementos que nos permitan obtener un mejor entendimiento de las características necesarias a la actividad de modelación. Por ello consideramos necesario, adoptar una perspectiva que incluya una visión, sensible al reconocimiento de que el conocimiento es una construcción social. Así las teorías frutos o consecuencias de las líneas de investigación sostenidas por la comunidad de especialistas en matemática educativa, tal como la aproximación socioepistemológica[1], perspectiva que hace dicho énfasis en la naturaleza social de la actividad de la construcción por parte de los actores sociales en contextos sociales concretos, más específicamente, la socioepistemología, plantea el examen del conocimiento social, histórica y culturalmente situado, problematizando a la luz de las circunstancias de su construcción y difusión. (Cantoral y Farfán, 2002)

En Farfán (1997) se establece el papel de la dimensión epistemológica en este tipo de estudios, que permite al didacta controlar las representaciones epistemológicas de las matemáticas inducidas en la enseñanza, en tanto que: provee de historicidad a los conceptos matemáticos que la enseñanza usual presenta como objetos universales; provee de historicidad a las nociones matemáticas y protomatemáticas; posibilita las disparidades entre el saber científico y el enseñado y con ello contribuye a desterrar otra de las ficciones de la escuela, a saber, la concepción de que los objetos de la enseñanza son copias simplificadas; pero fieles de los objetos de la ciencia. Es así como un análisis de corte epistemológico permite a la didáctica desprenderse de la ilusión de transparencia de los objetos que manipula en el nivel del saber y en consecuencia lo auxilia en el manejo de las representaciones erróneas inducidas por la enseñanza.

De esta forma a la actividad de modelación y, al uso de las matemáticas dentro de la misma, le es inherente un proceso mental que está estrechamente relacionado e influido por su entorno sociocultural, en este caso por la época en la que Fourier y sus escritos surgen. Así el tipo de investigación que llevamos a cabo en correspondencia con el acercamiento socioespistemológico, visto como la investigación encaminada a la reconstrucción de significados, nos permitirá rescatar de los trabajos de Fourier algunos significados o intenciones primarias de los conceptos matemáticos que él generó, a través de cuestionarnos cómo y atendiendo a qué problema surgieron estos.

[1] Desarrollada por el grupo del Área de Educación Superior del Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav, IPN.

Para muchos autores la modelación matemática se ha considerado un arte con "bases racionales", que requiere el uso del sentido común tanto como las matemáticas, desde este punto de vista el modelo de algún fenómeno es una herramienta usada para transformarlo, es algo utilizado en sustitución de lo modelado, donde la manipulación del modelo permite entender y predecir el comportamiento del fenómeno, así como validar hipótesis y elaborar estrategias para la intervención. (Arrieta, 2003). Así, la modelación no sería una representación, sino una práctica que refleja una cierta intención humana, es decir no solo es una transformación sino intencionalidad y esto es precisamente lo que desde este enfoque más complejo, le da el carácter de social.

Habilidades de modelación

Una revisión de las visiones actuales se presenta en (Morales F., 2003) nos permitió percibir las ideas básicas de cada acercamiento, presentados para comprender las distintas habilidades reportadas por los mismos e inherentes a la actividad de modelación, así como también nos da una visión más amplia. Estos acercamientos son descritos en (M. Perero, 1994) y (Mochon, 2000). Las problemáticas e inquietudes de estos autores cada uno con un matiz diferente, no gira en torno de comprender o enunciar específicamente tales habilidades, sin embargo podemos inferir algunas en las que coincidimos y consideramos importantes. Nos adherimos entonces a aquellos acercamientos, que consideran la modelación matemática como una actividad fundamental al método científico y donde cada modelo reflejará la descripción matemática de una hipótesis que concierne a un fenómeno físico.

Así las habilidades que buscaremos intrínsecas al documento escrito por Fourier serán: El entendimiento del fenómeno físico que se está modelando, esto es, percibir claramente por medio de la inteligencia o los sentidos su significado, la capacidad de ordenar de una forma clara y precisa datos u observaciones respecto de algún fenómeno, la comprobación o invalidación de una hipótesis, la predicción del comportamiento de los procesos con base en las observaciones y los resultados arrojados, así como la capacidad de abstracción, entendiendo por esta, la capacidad de extraer o considerar las cualidades esenciales de un suceso.

Análisis de la Memoria

El artículo "Mémoire sur les Températures du globe terrestre et des espaces planétaires" extraído de las Memorias de la Academia Real de las Ciencias del Instituto de Francia t. VII, p570 a 601. Paris, Didot; 1827. Fue publicado también con algunas modificaciones ligeras en "Annales de Chimie et de Physique" (t. XXVII, p136 a 167; 1824) bajo el título siguiente: Remarques générales sur les températures du globe terrestre et des espaces planétaires. G.D.

En el se muestra el tema de las temperaturas terrestres y las tres fuentes principales de calentamiento de la Tierra, una de ellas es que nuestro planeta participa de una temperatura común de los espacios planetarios, debido a que nuestro sistema solar está situado en un punto donde todos los puntos de esa región del universo comparten una temperatura constante, la segunda es debida a la acción prolongada de los rayos solares en el globo terrestre y la tercera es debida a un fuego primitivo e interior en la Tierra que continua disipándose a través de la superficie bajo la temperatura del cielo planetario. Existen por tanto dos problemas que Fourier consideró por separado: el primero, consiste en la variación de la temperatura en una vertical prolongada en un punto dado y a una distancia corta de la superficie y donde dicha superficie está sujeta a una variación periódica de temperaturas y el segundo problema es la existencia de una temperatura constante después de una cierta distancia y que sin embargo no es la misma en cada punto sino que varía con respecto a la latitud y que Fourier asegura se debe a la existencia de los polos terrestres cuya temperatura es siempre extremadamente baja.

Estos dos aspectos reflejan la generalidad en la modelación del fenómeno de calentamiento terrestre en el que Fourier establece las ecuaciones diferenciales para una esfera sólida, como sigue:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{K}{CD}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{2}{x}\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

Las condiciones de la masa son aquellas de haber estado inmersa por un tiempo infinito en un medio mantenido a una temperatura constante, como lo es el sol para la tierra después de un tiempo infinito, esta temperatura esta definida como de valor uno, tal esfera se expone después a otro medio como podría serlo el aire el cual se define a temperatura cero. En esta ecuación K representa la naturaleza de la superficie, D es la unidad de peso volumétrico y C es la capacidad específica y representa la cantidad de calor necesaria para llevar una D desde una temperatura cero hasta una temperatura uno.

A manera de conclusión

Sostenemos la suposición de que Fourier esta realizando a través de su obra fisicomatemática una actividad que desde nuestra perspectiva podemos llamar modelación matemática, está intentando responder a una pregunta o preguntas a partir de un cierto fenómeno físico, esta hipótesis de partida queda para nosotros clara en la forma como Fourier plantea en las páginas iniciales el discurso preliminar de la Teoría Analítica del Calor, en estas líneas Fourier asegura la necesidad de "remitir" los problemas físicos observados a problemas de análisis matemático, es decir de llevarlos a un modelo matemático que le permita descubrir y explicar las leyes que rigen el comportamiento de los fenómenos de propagación del calor que observa definitivamente ligados a fenómenos del mundo real y físico de su interés.

Este interés que Fourier tuviera por el problema de las temperaturas de la tierra se pone de manifiesto en un sinnúmero de ocasiones, tales como la cantidad de artículos que publicó a este respecto, pero es particularmente interesante para nosotros la descripción que de este fenómeno hace en el mismo discurso preliminar. El punto que queremos ilustrar aquí, es que no podemos refutar en Fourier un cabal entendimiento de los problemas que quería resolver, esto es, tiene perfectamente claro cuales son las preguntas que se va a responder con el modelo que establecerá, y que consiste en el establecimiento de las ecuaciones diferenciales, las cuales como sabemos incluirán en la medida de lo posible las condiciones más generales de la propagación del calor y estarán sujetas a las condiciones iniciales dadas por las observaciones del autor con el objetivo según Fourier de … "*reducir las cuestiones físicas a problemas de análisis, lo cual es el objetivo propio de la teoría*"

La naturaleza de las observaciones y la forma de organización de los sucesos observados en estos tópicos, dan cuenta de la creatividad científica (sí podemos llamarle de esta manera) de Fourier para formular sus hipótesis, tal como aquella que es usada por el autor para enunciar el problema de la propagación del calor en un sólido rectangular infinito, el cual consiste en determinar las temperaturas permanentes de este sólido, limitado por dos masas de hielo, y una masa de agua hirviendo. La consideración del problema de la tierra vertido en un problema de analizar un fenómeno *simple* y *primordial* como el del experimento, es la forma que tiene Fourier de proceder a la determinación de las leyes de los fenómenos naturales y dan prueba de la capacidad de abstracción que poseía, ya que si bien este enunciado contiene el modelo matemático de la tierra con los polos representados por las barras de hielo y el agua hirviendo como el calor primitivo, es necesario el análisis de la solución de las ecuaciones de propagación del calor en la esfera sólida y aplicar esta a las condiciones físicas de la tierra, para darse cuenta que puede hacerse uso de aquellas ecuaciones del sólido rectangular infinito.

En Farfán (1987) se reporta una investigación que buscó significar entre profesores el concepto de convergencia, con el fin de encontrar una relación entre esta y el estudio científico de la propagación del calor, y de donde la autora desprende que el concepto físico del estado estacionario no es producto de una primera experiencia, sino de una profunda abstracción y reflexión del fenómeno.

Este resultado muestra con elocuencia a qué nos referimos con la habilidad de abstracción de Fourier, para quién llegar al concepto de estado estacionario fue cuestión de "imaginarse" que podemos suprimir la capa superficial de la tierra, y considerar que pueden fijarse las temperaturas en todos los puntos de la nueva superficie, donde el estado de la masa variará pero este estado variable se irá aproximando a un estado final que no tendrá ya ningún cambio, de forma tal que cada punto de la esfera adquiere y conserva una temperatura que dependerá únicamente de su posición.

Después de este recorrido y dadas las últimas reflexiones, una cuestión importante para nuestra disciplina sería entonces: ¿Cómo generar algunos elementos que doten de significado o den sentido a estas nociones en un ámbito escolar?

Consideramos entonces que para lograr lo anterior es necesario indagar en la medida de lo posible sobre los aspectos y las inquietudes que les dieron vida, o que los generaron como respuesta a una pregunta previa, lo cual fue en algún sentido el objeto de nuestro trabajo. En el caso del tema sobre las temperatura terrestres, sería muy importante señalarlo como eje principal del trabajo de Fourier sobre el calor, aunque la transposición didáctica a la que inevitablemente los conceptos son sometidos antes de su inclusión en la escuela, ha dividido el trabajo de Fourier en algunos aspectos puramente físicos y otros puramente matemáticos hasta desproveerlo de todos los elementos desde los cuales estos aspectos surgieron, convirtiéndolo en algunos casos en herramientas puramente matemáticas, sí podemos concluir desde nuestra indagación algunos elementos importantes que le permitieron llegar a las conclusiones de la memoria.

El primero fue el entendimiento del problema de las temperaturas terrestres desde su perspectiva como físico teórico, Fourier se permite vislumbrar previo a su teoría del calor las aplicaciones para las que esta estaba dirigida, la propia memoria que analizamos resalta las hipótesis y las conclusiones en un mismo documento, no así el modelo, representado en todo el desarrollo de la teoría del calor de la que resalta por su importancia el concepto de flujo de calor y la conceptualización consecuente de que sin un conocimiento preciso de la expresión matemática para este flujo como función de la temperatura, el problema del calor no sería posible de abordar. Lo cual implica la meditación profunda que tuvo que hacer para explicar claramente este concepto no solo como dependiente del gradiente de temperaturas, sino también de su dependencia con las características internas del sólido; más precisamente con la conductividad térmica; otro aspecto sutil pero igualmente importante y que juega un papel muy importante en las conclusiones de su trabajo es el concepto de capacidad calorífica, que pone en evidencia la concepción de Fourier de que la conducción del calor tenia que provenir de una diferencia entre la resistencia que opone un cuerpo a ser calentado y su "disponibilidad" para conducir el calor.

Finalmente consideramos pertinente a la hora de diseñar alguna situación didáctica, tomar en consideración los elementos subrayados, para presentarlos como relacionados y como parte de un conjunto de conocimientos con un fin específico, así como incorporarlos en los diseños de situaciones encaminadas a desarrollar en el estudiante las habilidades de modelación en el problema de entender el fenómeno de calentamiento de la tierra y las nociones elementales que surgieron necesarias con base en este objetivo.

Bibliografía

Arrieta J. (2003) La modelación de fenómenos como procesos de matematización en el aula. Tesis doctoral, Cinvestav – IPN: México

Brousseau, G. (1986). Fondements et méhodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des Mathématiques* 7(2), 33-115.

Farfán R. (1987) *Ingeniería didáctica: Un estudio de la variación y el Cambio*. Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V. México.

Jean-Baptiste Joseph Fourier (1807) *Theorie Analytique de la Chaleur*. Asociación Mexicana Clásicos de la ciencia. México, 1963.

John Herivel (1957) *The man and the Physicist*. Clarendon press. Oxford.

Mochón, S. (2000) Modelos Matemáticos para Todos los Niveles. *Actas de la XI Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*. México.

Morales F. (2003*) Acerca de la actividad de modelación. Las temperaturas de la tierra Tesis de Maestría no publicada*, Cinvestav – IPN, México.

¿CÓMO ENTENDER LA REGLA DE LA CADENA?: UN ACERCAMIENTO SOCIOEPISTEMOLÓGICO

Ramón Flores Hernández
Universidad Autónoma de Coahuila-Instituto Tecnológico de Saltillo, México
rnfloresh@hotmail.com

Resumen

Este trabajo presenta la fase de "concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas" (Artigue, 1995) correspondiente a una Ingeniería Didáctica sobre la regla de la cadena. La fase del Análisis Preliminar se presentó en la RELME 16. El marco teórico utilizado se ubica en la aproximación basada en las practicas humanas produciendo conocimiento matemático, llamada "Aproximación Socioepistemológica" (Cantoral y Farfán, 2000). El objetivo general es: favorecer la construcción de la regla de la cadena bajo la actividad de encontrar elementos de orden epistemológico que expliquen las dificultades vividas en su apropiación, utilizando las prácticas humanas para provocar la relación; epistemología-generación de conocimiento. La secuencia se estructuró sobre las situaciones de acción, formulación, validación e institucionalización; y se compone de 7 actividades generales divididas en tareas diversas, donde las primeras 3 se refieren a la reconstrucción de significados de la función compuesta y, las restantes a la reconstrucción de la regla de la cadena bajo la noción de predicción utilizada como una actividad humana. El diseño permitirá que los estudiantes puedan evitar el obstáculo de función compuesta al interactuar bajo contextos variacionales, enfrentándose con la predicción como actividad humana.

Conclusiones Acerca del Análisis Preliminar

Del análisis preliminar se puede señalar que se observa una transposición didáctica débil localizada en un saber a enseñar ubicado en los textos escolares; lo que significa que éstos no hacen una explicación clara de la regla de la cadena, su base de la explicación se fundamenta en la función compuesta, misma que funciona como un obstáculo para el estudiante. Además, en la mayoría de los libros examinados no hay una presentación en contexto. Los estudiantes cuando la manejan sólo hacen su algoritmo; no pueden aplicarla en contextos sociales ni matemáticos. En algunos casos la confunden con la regla de la potencia.

Por otra parte, Newton hace un tratamiento distinto al que ahora hacen los textos escolares: utiliza un cociente de cambios instantáneos y un cambio de variable; es aquí donde se observa que el origen social de la regla de la cadena se ubica en el estudio del movimiento, bajo la utilización de razones de cambio relacionadas a través de un cociente con el fin de cambiar la variable tiempo. Así que, se puede decir que en esta transición de épocas y de sociedades ocurre un cambio de epistemología, detectándose tres conflictos en el conocer: uno, en el concepto de función compuesta; otro, en el doble papel que asume una variable en una situación problema, como variable independiente y como variable dependiente; y otro más, en la ligazón intrínseca de las razones de cambio que conforman la regla de la cadena.

Finalmente se dirá que, el diseño se circunscribe en los tres conflictos arriba señalados, pero además, bajo tres direcciones que influyen en la actividad del estudiante en relación con el conocimiento; estos son: textos escolares (el estudiante interactúa con fenómenos físicos que los libros no presentan); cambio de epistemología (se conoce experimentando) y; mirar al estudiante como parte de una sociedad (hay una interacción entre iguales resignificando o reconstruyendo un

conocimiento). Así que el diseño tomará como eje central los tres conflictos señalados, bajo la intención de que la actividad que desarrolle el estudiante sea con el fin de reconstruir la función compuesta y la regla de la cadena.
De manera general se puede mencionar que, cuando la regla de la cadena es puesta en la escena educativa, su problemática deviene en tres direcciones: una, relacionada con su apropiación (construcción, desarrollo y cambio de estructuras de conocimiento); otra, relacionada con las matemáticas aplicadas (cómo y dónde se aplica); y la última relacionada con el consenso y didáctica (es el medio actual que se utiliza para decidir cómo enseñarla).

Situación Didáctica Inicial y Análisis a Priori
Con base en el análisis preliminar se diseño una situación didáctica, teniendo un carácter de referencia, pues dependiendo del análisis a posteriori se podrán diseñar nuevas exploraciones. Los objetivos que persigue este diseño son los siguientes:
Proporcionar contextos sociales que permitan introducir la transición de variables y así ver aparecer la función compuesta
Proporcionar contextos sociales que permitan aparecer en el estudiante la regla de la cadena ligada a la función compuesta, bajo el doble papel que asume una variable y la fusión intrínseca que se origina entre razones de cambio.
Confrontar la presentación de la regla de la cadena como un cociente de cambios instantáneos, con la de un producto de cambios instantáneos.
Inducir al estudiante a transitar dentro de tres registros de representación que posibiliten la construcción social de la regla de la cadena: registro gráfico, numérico y algebraico; bajo la predicción y la construcción de consensos (Cantoral, 2001).
También se identificaron las siguientes variables didácticas:
La relación existente entre las variables independiente y dependiente y, sus contextos.
Los contextos de ubicación de la regla de la cadena: matemático (gráfico, numérico y algebraico) y social (dentro de la vida cotidiana, dentro de la ingeniería o dentro de otra rama de la ciencia).
La formación de la función compuesta bajo la necesidad de utilizar una tercera variable

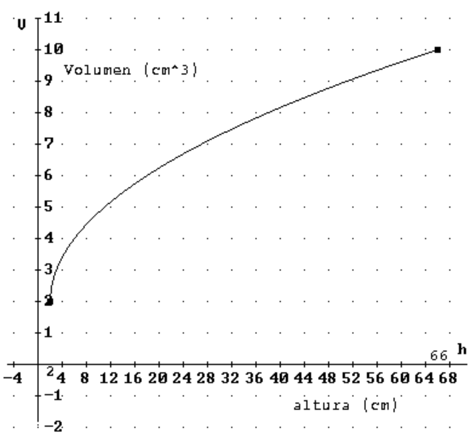
El Diseño
En seguida se presenta la secuencia didáctica conformada por siete situaciones problema (actividades), compuestas por veintisiete tareas. Las siguientes tres actividades deberán facilitar la reconstrucción de la función compuesta mediante la movilización de variables dentro de diferentes representaciones, utilizando la predicción como actividad humana.

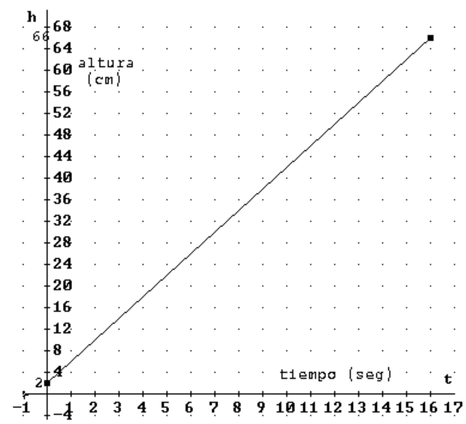
Actividad 1 (situación adidáctica de acción). El hombre lo que más aprecia es su propia vida, pero para tener una vida larga entra en juego un elemento muy importante: la salud; sin embargo, en todos los seres humanos conforme envejecen, su salud se deteriora, es decir, conforme transcurre el tiempo su salud se va perdiendo.
En este párrafo hay una relación importante entre tres variables, indica cuáles variables están involucradas

Además, indica cuáles son variables independientes y cuáles variables dependientes

Actividad 2 (situaciones adidácticas de acción, formulación e institucionalización). En el párrafo inicial hay una variable que tiene doble papel; es decir, el de ser variable independiente y variable dependiente,
¿Cuál es?,
Genera un ejemplo ubicado en tu especialidad donde una de las tres variables tenga un doble papel

Actividad 3 (situaciones adidácticas de: acción, formulación, validación e institucionalización). Se llena con agua un recipiente pequeño de forma irregular y medio vacío, donde el flujo de volumen de entrada varía a través del tiempo. El comportamiento secuencial de 3 variables involucradas en este fenómeno variacional se registra mediante las siguientes gráficas:





Contesta las siguientes interrogantes:
1. Al inicio del llenado:
¿Qué volumen de agua tenia el recipiente?
¿Qué altura tenia el agua en ese momento?
¿En qué tiempo ocurre esto?
2. Al final del llenado:
¿Qué volumen de agua se obtuvo?
¿En qué tiempo ocurre?

3. Para cada uno de estos comportamientos variacionales (graficas) escribe su correspondiente relación funcional (función)
4. Con base en la variación de las tres variables involucradas en las gráficas anteriores y su representación algebraica o funcional, encuentra una fórmula (función) para representar el volumen de agua respecto al tiempo transcurrido en el llenado del recipiente.
5. Si el recipiente hubiese estado vacío completamente, al inicio del proceso,

cómo esperarías que fuera:
la gráfica que relaciona las variables **V** y **h**
la gráfica y función que relacionan las variables **h** y **t**
la gráfica y función que relacionan las variables **V** y **t**
Mediante las siguientes tres actividades se considera que el estudiante de ingeniería reconstruya significados acerca de la regla de la cadena, bajo la actividad humana de predicción al considerar diferentes razones de cambio relacionadas a través de un producto y de un cociente con base en representaciones numéricas.

Actividad 4 (situaciones adidácticas de : acción, formulación y validación). Se tiene un globo de forma esférica que se infla manualmente. Queremos predecir el crecimiento del globo respecto al tiempo; es decir, queremos examinar el cambio continuo de volumen que experimenta el globo cada instante, o sea $\frac{dv}{dt}$. Donde

$$v = \frac{4}{3}\pi\, r^3 \qquad (1)$$

es la función que relaciona el volumen con el radio y,

$$r = 9 - 7e^{-2t} \qquad (2)$$

es la función que relaciona el radio con el tiempo. Si sabemos que el radio mide 2 centímetros cuando el tiempo es de cero segundos, realiza lo siguiente:
Completa la siguiente tabla

t	0	1	2					
r	2							

Auxiliándote de la tabla anterior completa la siguiente tabla que, permitirá mirar la variación del volumen respecto al radio:

r	2							
$\frac{dv}{dr}$								

Realiza lo mismo con la siguiente tabla que, permitirá mirar la variación del tiempo respecto a la variación del radio:

r	2							
$\frac{dt}{dr}$								

a) De acuerdo a las tablas de los incisos a), b) y c), y además considerando que el radio varía de igual forma; esto es, como variable independiente en $\frac{dv}{dr}$ y en $\frac{dt}{dr}$, encuentra finalmente lo solicitado en esta actividad: el cambio instantáneo del volumen respecto al tiempo ($\frac{dv}{dt}$) bajo el objetivo de predecir en qué tiempo reventará el globo (justifica tu respuesta). Para esto completa la tabla siguiente:

b)

t	0	1						
$\frac{dv}{dt}$								

Actividad 5 (situaciones adidácticas de: acción, formulación y validación). Basándote en el mismo problema, busca otro camino para encontrar $\frac{dv}{dt}$ y el tiempo en que reventará el globo; en consecuencia, realiza las siguientes actividades:

1) Completa la siguiente tabla

t	0	1						
r	2							

2) De acuerdo a la tabla anterior, completa la tabla siguiente, misma que nos muestra la variación del volumen respecto a la variación del radio:

r	2							
$\frac{dv}{dr}$								

3) Basándote en la primera tabla de esta Actividad, completa la siguiente tabla. Ésta nos muestra la variación del radio cuando transcurre el tiempo.

t	0	1						
$\frac{dr}{dt}$								

4) Basándote en las tablas anteriores y haciendo notar que r varia, en este proceso, como variable independiente y como variable dependiente y; que las variaciones t y r mantienen una dependencia funcional; además, que queremos predecir el tiempo en el cual el globo reventará. Encuentra el crecimiento del globo respecto al tiempo; esto es, encuentra $\frac{dv}{dt}$ al completar la tabla que a continuación se proporciona. Justifica tu respuesta.

t	0	1						
$\frac{dv}{dt}$								

La siguiente actividad permitirá la generalización y unificación de las nociones función compuesta y regla de la cadena

Actividad 6 (situaciones didácticas de: validación e institucionalización).

A. De acuerdo a la Actividad 4, cómo escribirías en forma general el procedimiento seguido para encontrar $\frac{dv}{dt}$; es decir, encuentra una fórmula que represente la cadena de variaciones estudiadas en el crecimiento de volumen del globo. Principalmente básate en el proceso utilizado para encontrar el inciso d)

B. De acuerdo a la Actividad 5**,** generaliza el procedimiento seguido para completar la tabla del inciso 4); esto es, escribe una fórmula para $\frac{dv}{dt}$.

En la siguiente actividad se pretende usar el conocimiento reconstruido transitando bajo diferentes contextos: uno social y dos matemáticos; bajo el fin de ampliar el significado de la regla de la cadena.

Actividad 7 (situaciones adidácticas de: acción, formulación, validación e institucionalización)

I. Encuentra, a través de la fórmula de la Regla de la Cadena obtenida en la Actividad 6, una fórmula para la variación del volumen del globo ($\frac{dv}{dt}$) planteada en la Actividad 4**.** También, si $t = 6$ segundos, encuentra $\frac{dv}{dt}$.

Sea la siguiente ecuación diferencial: $2y\frac{dy}{dx} - \frac{3}{x}y^2 = 2x$, donde $v = y^2$. Se pretende cambiar $\frac{dy}{dx}$ por $\frac{dv}{dx}$. ¿Cómo derivarías $v = y^2$ para lograr lo solicitado? Realiza tal cambio.

De acuerdo a la discusión anterior y a la introducción de las variables
$y = f(x), \quad z = g(y), \quad u = h(z)$,
¿Cómo escribirías una cadena de cambios instantáneos en las variables z e y, con el fin de encontrar $\frac{du}{dx}$? Esto generaría una fórmula similar a la encontrada en la Actividad 5.

Bibliografía

Albert, A. (?). *Introducción a la Epistemología*. Serie: Antologías, N°2. Área de Educación Superior, DPM. Cinvestav del IPN

Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. En *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.* Gómez, P. (ed.). Una empresa docente, Grupo Editorial Iberoamérica. México., pp. 33-59

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des Mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathematiques*. Vol 7, N°2, pp. 33-115

Brousseau, G. (2000). Educación y Didáctica de las Matemáticas. Revista *Educación Matemática.* Vol. 12. Grupo Editorial Iberoamérica, pp. 5-38

Bunge, M. (1980). *Epistemología*. Ed. Ariel. Barcelona, España

Cantoral, R., *et al.* (2000a). *Desarrollo del Pensamiento Matemático*. Ed. Trillas. México

Cantoral y Farfán. (2000b). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. En R. Cantoral (Ed.), *El Fututo del Cálculo Infinitesimal. ICME-8. Sevilla, España.* México: Grupo Editorial Iberoamérica., pp. 66-91

Cantoral, R. (2001). Sobre la Articulación del Discurso Matemático Escolar y sus Efectos Didácticos. En G.L. Beitia (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Volumen 14. Grupo Editorial Iberoamérica. Primera edición, pp. 64-75

Cordero, F. (2001). La formación y distinción de construcciones en la didáctica del Cálculo y del Análisis: una visión sociocultural. En G.L. Beitia (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Volumen 14. Grupo Editorial Iberoamérica. Primera Edición, pp. 53-59

Farfán, R. (1997). *Ingeniería Didáctica. Un estudio de la variación y el cambio*. Grupo Editorial Iberoamérica.

Klineberg, O. (1973). *Psicología Social*. Biblioteca de Psicología y Psicoanálisis. Fondo de Cultura Económica.

DETECCIÓN DE LOS MODOS DE RAZONAMIENTO PROPICIADOS POR EL DOCENTE DE ÁLGEBRA

Miguel Eslava Camacho, Eréndira Valdez Coiro
ISCEEM, Toluca Estado de México
meslava@itesm.mx, erevalco@att.net.mx

Resumen

Interesa a este estudio detectar modos de razonamiento matemático propiciados en los alumnos desde las prácticas docentes de los profesores. Se pretende hacer un estudio de casos en donde se identifiquen estos razonamientos. Algunas de las preguntas guía de este estudio son: ¿Qué relación hay entre los propósitos de la asignatura con el perfil de egreso de la educación media superior? ¿De que manera influye la formación del profesor en su práctica docente y que modos de razonamiento desarrolla dentro de esta? ¿Qué es lo que busca el profesor en la bibliografía y qué fuentes consulta y dónde las consulta? ¿Cuál es la dinámica ambiental dentro del aula? ¿qué tipo de actitudes se generan en el aula? ¿se favorecen sujetos críticos y reflexivos, con la posibilidad de expresarse y de preguntarse? ¿Qué tipo de actitudes muestran los alumnos? bajo la perspectiva de los modos de pensamiento analizados por Sierpinska, quien maneja los modos geométrico–sintético, analítico-aritmético y analítico-estructural. Frente a los altos índices de reprobación de los alumnos de Bachillerato General en la asignatura de Álgebra, surge el desafío para los docentes de reemplazar la memorización por una comprensión más profunda. Lo que se pretende es que las matemáticas sean, para el estudiante, herramientas funcionales y flexibles que le permitan resolver las situaciones problemáticas que se le planteen, en diversos ámbitos. A la perspectiva técnica se opone la perspectiva práctica, a los dos puntos de vistas mencionados se agrega un nuevo enfoque: estratégico, donde las actividades educativas están históricamente localizadas, las cuales tienen un lugar, sobre un trasfondo socio histórico y proyectan una visión de la clase de futuro que deseamos construir.

Justificación.

La educación responde a las necesidades de la sociedad. Las matemáticas son un fenómeno cultural (Bishop, 1999). De acuerdo a las experiencias obtenidas en la práctica docente, se deduce que el proceso didáctico representa mayor dificultad que otras asignaturas, tanto en su enseñanza como en su aprendizaje. Al pretender enseñar no se consideran muchos y muy diversos factores: la naturaleza intrínseca de los diferentes contenidos matemáticos *(obstáculo epistemológico;* Bachelard, 1938) la forma como se enseñan éstos mismos *(obstáculo didáctico;* Chevallard, Bosch y Gascón, 1997) la predisposición del alumno a la materia; las características y necesidades del grupo en general y de cada alumno en particular; el enfoque que se le pretende dar a la matemática escolar en el currículo vigente; el perfil de egreso del alumno del nivel medio superior, entre otros aspectos. Al no considerar lo anterior (por desconocimiento u omisión) lo lleva a reproducir los patrones con los que él aprendió. Mi labor docente me ha llevado a cuestionar la manera cómo se enseña, cómo se aprende y con que elementos contamos para poder fortalecer y apoyar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática en general y del álgebra en particular, en el tema de sistemas de ecuaciones lineales en el plano, en alumnos del nivel medio superior del municipio de Toluca del Estado de México, bajo la perspectiva de los modos de pensamiento distinguidos por Anna Sierpisnka *(1996)*, quien maneja principalmente los modos *geométrico–sintético*, *analítico-aritmético* y *analítico-estructural*. Estos modos de razonamiento los entiende como secuencias en el desarrollo del pensamiento algebraico, siendo los dos primeros los que se deben desarrollar en el nivel antes citado. Sobre la base de lo anterior abordamos la problemática del índice de reprobación de los alumnos en las asignaturas de Álgebra II, Álgebra I y Física I reportados en el Informe de actividades 2002 de la Subdirección de Bachillerato General del Estado de México, en el cual se señala que los esfuerzos no han sido suficientes y que la realidad es cada vez más compleja representando nuevos retos para alumnos y docentes, situación que exige nuevas formas de enseñar, para dar a conocer estos campos. Con este proceso vital resuelto en un mundo de tensiones, el profesor debe ingeniárselas para que le presten atención y se interesen en las matemáticas que están estipuladas en los planes y programas actuales. El compromiso con su trabajo es impulsado por cuatro necesidades a cubrir: "… ser reconocido, expresarse a sí mismo, comprensión y por último implicarse con otros o prestarles la debida atención…" (Strong, Silver y Robinson 1995). Estas necesidades proporcionan una buena base para que los profesores puedan estructurar su trabajo con jóvenes curiosos, imaginativos y sociables que desean superarse. Los profesores de matemáticas son quienes reforman o no la enseñanza y definen el impacto que tiene esta asignatura en los estudiantes, dependiendo de su práctica del docente. Por medio de un estudio de casos se detectará el modo o los modos de razonamiento matemático que los docentes propician en los alumnos.

Antecedentes. En el contexto de las instituciones que atienden el servicio de educación media superior en el Estado de México, el Bachillerato General es la opción que absorbe una mayor cantidad de matrícula (atiende el 12% del país) respecto al sector autónomo, federal y particular. El desarrollo del servicio de bachillerato general se funda en una serie de directrices que tienen que ver con las contenidas en el programa Nacional de Educación 2001-2006 y en el Programa Institucional a mediano plazo 2000-2005, además de las planteadas en el Plan Maestro, bases y líneas de trabajo para el bachillerato general 2001-2005. En estos documentos se delinea la plataforma que orienta los programas, proyectos y acciones que desarrolla el subsistema educativo; las prácticas, los procesos, los resultados y los productos. La relación escuela-realidad está presente en los procesos de intervención. Las condiciones y circunstancias que conforman este contexto de realidad, tienen que ver con variables que devienen de ámbitos locales, regionales, nacionales y globales, sobre todo de estos últimos que de manera inevitable repercuten en la escuela. El diagnóstico presenta el mayor índice de reprobación en álgebra, situación que exige nuevas estrategias de enseñanza y la capacitación del personal docente para superar incongruencias respecto de las necesidades de Planes y Programas de Estudio manifiestas en el proceso de enseñanza[2]. Las matemáticas son un producto del quehacer humano. Muchos desarrollos importantes de esta disciplina han partido de la necesidad de resolver problemas concretos. Se pretende que las matemáticas sean para el estudiante herramientas funcionales y flexibles que le permitan resolver las situaciones problemáticas que se le planteen, en diversos ámbitos, allí radica la importancia de crear conocimientos significativos en los alumnos, por sus variadas repercusiones.

[2] *Informe de actividades 2002 de la Subdirección de Bachillerato General. Pp. 9*

La perspectiva técnica, la práctica y la estratégia de la educación

El punto de vista técnico sobre la educación suele ser el más difundido. En el planteamiento de la enseñanza y el currículum, las provisiones educativas se tratan como conjuntos destinados a una finalidad definida; se trata de convencer que los problemas de la educación no son más que obstáculos de un "sistema de aprovisionamiento" (criterio materialista), superables mediante mejoras técnicas; en donde no se hace necesario ocuparse de las finalidades de la educación, ni de los efectos secundarios de unas tradiciones injustas o de unos sistemas inadecuados, tampoco de los trastornos sociales que exigen de los jóvenes otro conocimientos, aptitudes y capacidades. La imagen de la educación aparece en un medio marcado por la institucionalización de la enseñanza, la relativa uniformidad en la organización de las clases, la sistematización de la curricula y la burocratización de los profesionales, concibiendo que la tarea de la clase se puede describir completamente con el lenguaje de la técnica.

La Perspectiva práctica

Desde este punto de vista la educación constituye esencialmente un proceso o una actividad, que tiene lugar en situaciones sociales (fluidas y abiertas) de gran complejidad, cuyos protagonistas han de tomar un gran número de decisiones. El enfoque práctico asume que el mundo social es, en suma, demasiado fluido y reflexivo, para permitir la sistematización y que los hechos escolares o de la vida de la clase, nunca dejaran de tener un carácter abierto e indeterminado. La influencia sólo puede ejercerse mediante la deliberación práctica y la intervención medida y razonada, en la vida de la clase. La práctica no se deja reducir al control técnico. La destreza profesional desde este punto de vista, no consiste en diseñar un conjunto de secuencias de medios o técnicas que conduzcan a los alumnos, hacia unos resultados de aprendizaje previstos, sino en una orientación y reorientación, siempre espontáneos y flexibles del aprendizaje, orientadas por una lectura perceptiva de los sutiles cambios y reacciones de los demás participantes. Para describir los procesos de la educación, el lenguaje de lo práctico, que identifica y nombra aspectos de la educación, que no captaba la perspectiva técnica; en particular, cuando predomina el lenguaje técnico, se elimina inadvertidamente la dimensión moral de la educación; es por ello que para que estos dos puntos de vista, se vean en su relación mutua, surge la necesidad de crear un lenguaje nuevo, que describa la educación dando cuenta de sus aspectos prácticos y técnicos, es decir identificando los elementos sistémicos institucionales e instrumentales (medios/fines) de la educación, así como su carácter práctico y moral.

La Perspectiva estratégica

Desde este punto de vista estratégico, todos los aspectos de un acto educativo pueden considerarse problemáticas: Su propósito, la situación social que reproduce o sugiere su manera de crear o limitar las relaciones entre los participantes, la clase de medio en que opera (pregunta-respuesta, recitado, simulación, juego, memorización) y la clase de conocimientos a que da forma. Las actividades educativas están históricamente localizadas, las cuales tienen un lugar, sobre un trasfondo sociohistórico y proyectan una visión de la clase de futuro que deseamos construir, en la conciencia de que la educación constituye una actividad social, cuyas consecuencias son sociales, y no sólo cuestión de desarrollo individual; también es intrínsicamente política, pues afecta a las oportunidades vitales de los que intervienen en el proceso educativo, están en condiciones de influir sobre el carácter y las expectativas de los futuros ciudadanos.

El saber de los maestros

Parte de lo que saben los maestros, tienen sus raíces en el hábito, el ritual, el precedente, la costumbre, la opinión o las meras impresiones y otros saberes, como podría ser el de una teoría sobre las diferencias entre las aptitudes individuales, son esencialmente abstractas, siendo preciso estudiar sus implicaciones concretas a fin de retomarlos bajo la perspectiva del análisis crítico; bajo este análisis los problemas y cuestiones educacionales no siempre se reducen a la esfera individual, sino que pueden asumir una dimensión social y su resolución satisfactoria exige una acción colectiva o común. *"Una teoría crítica de la educación demanda, además de una disposición para pensar críticamente, una comunidad crítica de profesionales dispuestos a emprender un examen de la profesión enseñante, así como de las circunstancias bajo las cuales está desempeña su misión"* Carr, W. y Kemmis S. *(1988)*.

La acción estratégica está informada por cierto marco de pensamiento o racionalidad y cuenta además con una práctica que le confiere significado material, es más idónea para la reflexión crítica. Su racionalidad se funda en la idea del esfuerzo en colaboración entre docentes y estudiantes y su alcance práctico es el de un arreglo operativo que puede beneficiar a unos y a otros en la empresa común. Teoría y práctica se contemplan como provisionales y susceptibles de modificación a la luz de la experiencia. Algunos tipos de conocimiento proporcionan un fundamento más eficaz que otros a la reflexión crítica, puede bastar con atender a los tipos de saberes que los enseñantes poseen y utilizan en su trabajo; siendo un aspecto esencial de la educación como praxis.

- *Los de sentido común de la práctica,* que constan simplemente de suposiciones u opiniones.
- *El saber popular de los docentes*. Es el que se adquiere con la experiencia, al entender lo que les inquieta a sus alumnos.
- Serie de *destrezas* para la conducción de grupo
- *Saberes contextuales*; lo que se sabe de esta clase, de la comunidad o del alumno en concreto, nos da la referencia para valorar la relevancia de las tareas.
- *Conocimientos profesionales* sobre las estrategias de la enseñanza y sobre el currículum, sus posibilidades, sus formas, su sustancia y sus efectos.
- *Las ideas relacionadas con las teorías morales y sociales y los planteamientos filosóficos;* sobre como pueden y deben interrelacionarse las personas, sobre el desarrollo y la reproducción de las clases sociales, sobre la aplicación del saber en la sociedad, ó sobre la verdad y la justicia.

Algunos de nuestros "*saberes*" se derrumbarán tan pronto como empecemos a tomarlos en serio como guía para la acción; otros resultarán modificados, profundizados y mejorados a través del análisis y de la verificación activa. El análisis crítico sólo es posible cuando lo teórico *(el saber organizado)* y lo práctico *(la acción organizada)*, pueden tratarse bajo el prisma de una problemática unificada, abierta a la reconstrucción dialéctica (*la teoría* y *la práctica* mutuamente integradas), a través de la reflexión y la revisión. Dentro de los saberes profesionales y contextuales, se encuentra el programa a desarrollar, en el cual no sólo se localizan a groso modo los contenidos temáticos, sino también una parte muy importante: Los propósitos del curso y de cada tema, los cuales son de diferente tipo: procedimental, conceptual y actitudinal, de ahí la variedad y pertinencia de cierto diseño de estrategia de enseñanza. Para lograr el éxito de estos propósitos, el docente y los alumnos tienen que tener claras las normas que van a regular las diferentes interacciones entre ellos, definido como: *"contrato didáctico"*, éste va a regular la interacción social entre los diferentes actores en el contexto del aula, el cual va a variar dependiendo del propósito, esto es:

Propósito	Responsabilidad del profesor	Responsabilidad del alumno	Actividades
Procedimental Problemas Práctica	Elegir, ejemplificar y resolver los diferentes tipos de problemas. Responsabilidad compartida en la producción de nuevas técnicas apoyándose en el dominio robusto de las técnicas existentes.	• Interpretar correctamente las resoluciones "Pensar los problemas" • Resolver por su propia cuenta algunos problemas de cada tipo. o Rutinizar ciertas técnicas centrándose en ellas y utilice los problemas para probarlas	• Cambio relativamente frecuente de tipos de problemas, exigiendo esto a explorar nuevos tipos de problemas por parte del alumno. o Resolver un gran número de ejercicios parecidos y repetitivos
Conceptual (Teoría)	✓ Presentación, ✓ Elegir formular y plantear las cuestiones tecnológicas que han de tratarse en clase	✓ Tener la responsabilidad de atender e investigar la teoría tratada en clase	✓ Definir e identificar características y/o propiedades
Actitudinal (Valores)	✓ Concientizar de la importancia de estos	✓ Asumir una actitud de respeto a los valores universales	✓ Analizar diferentes lecturas sobre la ética. (buscando que sean agradables e interesantes)

De hecho el contrato pone a profesor y alumno ante una paradoja: Si aceptan que, como indica una cláusula del contrato, el profesor "enseñe" los resultados al alumno, entonces este no puede establecerlos por sí mismo y, por tanto, no aprende matemáticas. El aprendizaje no descansa, en realidad, sobre el buen funcionamiento del contrato sino sobre sus rupturas (ajustes del contrato); sin embargo, en el momento de las rupturas parece como si un verdadero contrato implícito uniera al profesor y al alumno. Se produce así una crisis que origina la renegociación y búsqueda de un nuevo contrato en función de los nuevos conocimientos adquiridos o, al menos, apuntalados. El conocimiento matemático resolverá las crisis originadas por las rupturas del contrato

El papel del profesor en el paradigma cognitivo

Dos de las cuestiones centrales que a los psicólogos educativos de tendencia cognitiva les ha interesado resaltar, son las que señalan que la educación debería orientarse al logro de aprendizajes significativos con sentido y al desarrollo de habilidades estratégicas generales y específicas de aprendizaje (Ausubel 1975, Coll 1988, Gagné 1990, García Madruga 1990, Novak y Gowin 1988, Pozo 1990). La Educación es un proceso sociocultural mediante el cual una generación transmite a otra saberes y contenidos valorados culturalmente, que se expresan en los diferentes currículos, estos contenidos deberán ser aprendidos por los alumnos de la forma más significativa posible, ya que los contenidos curriculares deben ser presentados y organizados de tal manera que los alumnos encuentren en ellos un sentido y un valor funcional para aprenderlos; sin embargo no basta con la mera transmisión de los contenidos por parte de los agentes instruccionales incluyendo esto al profesor, el cual parte de la idea de un alumno activo que aprende significativamente que puede aprender a aprender y a pensar, en este sentido se centra especialmente en la confección y la organización de experiencias didácticas para lograr estos fines, a diferencia del profesor tradicionalista no debe centrarse exclusivamente en la enseñanza de la información, ni en tener el papel protagónico, por el contrario debe estar interesado en promover en sus alumnos el aprendizaje con sentido de los contenidos escolares, para tales fines será necesario hacer un uso creativo de las denominadas estrategias cognitivas de enseñanza, en sus cursos o situaciones instruccionales.

Características y necesidades del estudiante del nivel medio superior

El docente no siempre toma en cuenta las características y necesidades de los estudiantes del nivel medio superior, al planear y diseñar sus estrategias de enseñanza, aprendizaje y evaluación; tales como:

- Adaptarse a profundo cambios físicos, intelectuales, sociales y emocionales.
- Desarrollar un concepto positivo de sí mismo
- Experimentar y crecer hasta conseguir si independencia
- Desarrollar un concepto de identidad y de valores personales y sociales
- Experimentar la aceptación social, la identificación y el afecto entre sus iguales, superando los conflictos de género.
- Desarrollar enfoques positivos con respecto a la sexualidad, emoción y el deseo en el contexto de unas relaciones afectivas responsables.
- Ser plenamente conscientes del mundo social y político que les rodea, así como de su habilidad para afrontarlo y de su capacidad para responder de forma constructiva al mismo.
- Establecer relaciones con adultos y con los niños en las que puedan tener dichos procesos de crecimiento[3]

[3] *Hargreaves, A., Earl, L. y Ryan, J. Una educación para el cambio./ Reinventar la educación de los adolescentes. Pág.37.*

Diferentes tipos de contratos que regulan las interacciones en el aula[4]

Tipo de Contrato	Cómo se define	Implicaciones y asignaciones para el profesor	Implicaciones y asignaciones para el alumno
Didáctico	Puede considerarse formado por el conjunto de cláusulas (redefinidas continuamente), que de una manera más o menos implícita, rigen, en cada momento, las responsabilidades recíprocas de los alumnos y el profesor, en lo que concierne al conocimiento matemático enseñado. Tomando un sentido preciso en el marco de la teoría de situaciones de Guy Brousseau, indicando que debería de hablarse de un proceso de búsqueda de un contrato hipotético	Asigna al profesor en cuanto a director de estudio la responsabilidad de elegir los tipos de problemas que constituyen el currículo y de ejemplificar en cada caso la manera de resolverlos.	Es responsable de interpretar las resoluciones propuestas por el profesor y resolver por su propia cuenta algunos problemas de cada tipo.
Pedagógico	Regula las interacciones entre alumnos y profesores independientemente del contenido de estudio (asignatura), gobernando los aspectos generales que afectan al entorno del estudiante.	Exige del profesor una atención y responsabilidad especiales a sus alumnos y sus condiciones de trabajo	Exigiendo al alumno una confianza general a sus profesores en sus decisiones y l respeto a su autoridad.
Escolar	Gobierna las instituciones sociales particulares (escuelas), definiendo la posición genérica del alumno.	Es el encargado de conducir (guía) al alumno hacia y hasta las obras que éste debe estudiar (pedagogo)	Considera al alumno como toda aquella persona que interrumpiendo sus actividades "normales" va a una escuela a instruirse, proporcionando un salvoconducto para acceder legítimamente a ciertas obras de la sociedad que no le son normalmente accesibles, en esta posición tiene más libertad que en cualquier otra con respecto a las normas sociales y culturales de su entorno.

[4] Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. Estudiar Matemáticas./ El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje pp. 203-206 y 278-280.

La naturaleza epistemológica y los modos de pensamiento del álgebra lineal. Distingue Sierpinska (1996) para el pensamiento matemático tres modos de pensamiento: *Sintético-geométrico*, *analítico aritmético* y *analítico estructural*, sin que la aparición de alguno de ellos elimine a su antecesor. Aclara la autora que no es conveniente considerar a los modos de pensamiento citados como: *"estados en la evolución del pensamiento algebraico… es preferible verlos como modos de pensamiento que son igualmente utilizados, cada uno dentro de su propio contexto y para propósitos específicos, principalmente cuando ellos están en interacción".* El álgebra lineal se inicia como un proceso de pensar analíticamente acerca del espacio geométrico, según etapas referidas a dos procesos:

> Uno fue la *aritmetización* del espacio, al pasar de la geometría sintética a la geometría analítica en R^n. En esta etapa, se define un objeto mediante una fórmula que permite calcularlo. El otro fue la *desaritmetización* del espacio o su *estructuralización*, cuando los vectores perdieron las coordenadas que los ataban al dominio de los números y los espacios aritméticos en R^n, fueron definidos mediante un conjunto de axiomas o propiedades. En esta segunda etapa, un objeto estaba mejor definido mediante un conjunto de propiedades y se pretendía lograr, según Hamilton (1967), el estatuto de un sistema de verdades o "Ciencia como la geometría", por oposición a ser sólo un sistema de reglas (Arte) o un sistema de expresiones (Lenguaje).

Se habla entonces de dos tipos de pensamiento en el álgebra lineal, llamados: *"Analítico" y "Sintético". Analítico,* es similar a la expresión "geometría analítica", es el tipo de pensamiento y lenguaje que caracteriza al álgebra lineal en el periodo de la aritmetización. El *Sintético* por su parte se divide en sintético–geométrico y sintético-algebraico. Ambos son característicos de la *desaritmetización*, ambos son visuales. El primero construye cosas mediante la interacción de rectas o planos y la construcción algebraica se acerca más a la síntesis como es entendida por *Kant*; dado un objeto y luego generamos su concepto formulando un conjunto de axiomas que describen sus propiedades. La principal diferencia entre los modos de pensamiento *sintético y analítico* es que en el modo sintético los objetos matemáticos son en cierto sentido, dados directamente a la mente la cual entonces trata de describirlos, mientras que en el modo analítico ellos son dados indirectamente. De hecho, son construidos solamente por la definición de las propiedades de los elementos. Dorier *(1995)*, menciona que los conceptos del álgebra lineal son difíciles de entender, porque son de naturaleza epistemológica sofisticada y abstracta. Cuando los conceptos son introducidos como herramienta del pensamiento, acerca de problemas en varios contextos (Fletcher, 1972) habría en los estudiantes un proceso de conceptualización y no una aplicación mecánica de cálculos técnicos, por lo que la actividad teórica sería desarrollada en la interacción con la actividad práctica.

Planteamiento del problema *(que veo y que pretendo observar).*

La enseñanza de las matemáticas tiene que tener en cuenta los significados matemáticos, tal y como se construyen en las interacciones directas o mediadas entre seres humanos, resaltando que en la comunicación del contenido o significado puede ser más importante que el modo de interacción personal, por lo anterior y debido a la complejidad epistemológica del contenido que nos ocupa, surge la necesidad de hacer este estudio de caso, dirigido a los maestros que imparten la asignatura de Álgebra II, específicamente en el tema sistemas de ecuaciones lineales en el plano y en particular los modos de pensamiento abordados y propiciados por el docente en la interacción dentro del aula.

Bibliografía

Bachelard, G. (1938) *La formation de l´esprit scientifique.* Libraire J.Brin, Siglo XXI editores, París.

Bishop. A. J. (1999) *Enculturación Matemática* Capitulo 4, 5, 6 y 7. Editoral Paidos Ibérica, S. A. Barcelona España, pp. 111-222.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997) El Eslabón Perdido entre enseñanza y aprendizaje, anexo de *Esbozo de la Teoría de situaciones didácticas* editorial Horsori/ICE Universitat de Barcelona pp. 224-225

Eslava, M. (2000) *Análisis de los libros de álgebra en el tema de dos y tres ecuaciones lineales con dos y tres incógnitas, bajo la perspectiva de los modos de razonamiento sintético y analítico* Tesis de Maestría, UAEH

Carr, W. Y Kemmis, S. (1988), *Teoría Crítica de la Enseñanza*, Editorial Martínez Roca S.A., Barcelona España.

Dorier, J. L. (1995). Meta level in the teaching of inifying and generalizing concepts in mathematics. *Educational Studies in Mathematics* 29 (2) 175 – 197.

Hargreaves, A., Earl, L. y Ryan, J. (1998) *Una educación para el cambio/ Reinventar la educación de los adolescentes*. Ediciones Octaedro, España.

Hamilton W. R. (1967). Theory of conjugate functions, or algebric couples: with ap preliminary and elementary essay on algebra as the science of pure time. First published in *Trans. Roy. Irish Acad, vol. XVII (1837). Pp. 293 – 422. In H. Halberstam and R. E. Ingram* (Eds). The mathematical papers of Sir William Rowan Hamilton, Vol. III. Algebra. Cambridge: Cambridge University Press.

SECYBS. (2002) *Informe Anual de Actividades de la Subdirección de Bachillerato General en el Estado de México*

SECYBS (1994) *Programa de Álgebra II del nivel medio superior*

Sierpinska, A. (1996) Synthetic and Analytic modes of Thinking in linear algebra. Para ser publicado en BaCoMeT 4. publication, H.N. Jahnke, N. Knoche; M. Otte (Eds), *Interaction between History of Mathematics and Mathematics Learning* Göttingen. Vandenhoeck and Puprecht.

Sierpinska, A. (1996) Epistemologies of mathematics and of mathematics education. En: A. J. Bishop et al (eds*), International Handbook of Mathematics Educatión* (pp. 827– 876). Dordrecht, HL: Kluwer, A. P. (Traducción de Juan D. Godino)

Strong, R., Silver, H. and Robinson, A. (1995) What do students want (and what really motivates them?, *Educational Leadership*, 53, 1.

Puig, L. Calderón, J. (1996) *Investigación y Didáctica de las Matemáticas*, imprenta Solana e hijos Artes Gráficas, S. A., Madrid, España.

Puig, L. Calderón, J. (1996) *Investigación y Didáctica de las Matemáticas*, imprenta Solana e hijos Artes Gráficas, S. A., Madrid, España.

EDUCACION MATEMATICA Y EDUCACION A DISTANCIA. UN ESTUDIO DE ARTICULACIÓN ENTRE LA UNIVERSIDAD Y LA EDUCACION POLIMODAL.

Graciela Guala; Edgardo Güichal; Ana Malet, Viviana Oscherov
Departamentos de Matemática y de Humanidades. Universidad Nacional del Sur. Argentina
gguala@arnet.com.ar; eguichal@criba.edu.ar; oscherov@criba.edu.ar; amalet@criba.edu.ar

Resumen

En este trabajo se analiza la articulación entre la Educación Polimodal y la Universidad en el área de Matemática, problema real y de gran actualidad en el marco de la crisis que está sufriendo nuestra sociedad en general y la educación en particular. Crisis no sólo económica y social sino también de acceso al conocimiento. El mismo se enmarca en el Proyecto de Investigación Interdepartamental: *La Universidad y las formas alternativas de acceder al conocimiento. Diseño, implementación y seguimiento de una propuesta de Educación a Distancia en la Universidad Nacional del Sur,* que tiene por objetivos: identificar los modos de comunicación didáctica pertinentes para una propuesta de educación a distancia, establecer relaciones entre los distintos soportes y las estrategias de lectura que se ponen en juego y evaluar los alcances de la experiencia en vistas a prever nuevas alternativas en la enseñanza universitaria. El Proyecto toma inicialmente el problema de la articulación tanto en el ámbito de Matemática como en el de Comprensión de Textos. Desde el punto de vista metodológico se ha trabajado con una propuesta de estudio de casos, seleccionándose para la investigación una escuela Agrotécnica de Educación Polimodal que incluye en su programa institucional la articulación con la Universidad. Con respecto a la Educación Matemática se optó por la resolución de problemas como estrategia de trabajo con los alumnos y la propuesta se desarrolló desde la perspectiva pedagógica de la Educación a Distancia. La particularidad de esta situación promovió la elaboración de materiales de estudio, la implementación de tutorías presenciales y por e-mail. El propósito de esta ponencia es presentar los resultados provisorios obtenidos en la experiencia iniciada en el 2001 y continuada en el transcurso del 2002.

Introducción

Este trabajo da cuenta de una experiencia en Educación a Distancia realizada en el marco del Proyecto de Investigación Interdepartamental: *La Universidad y las formas alternativas de acceder al conocimiento. Diseño, implementación y seguimiento de una propuesta de Educación a Distancia en la Universidad Nacional del Sur,* que tiene por objetivos: identificar los modos de comunicación didáctica pertinentes para una propuesta de educación a distancia, establecer relaciones entre los distintos soportes y las estrategias de lectura que se ponen en juego y evaluar los alcances de la experiencia en vistas a prever nuevas alternativas en la enseñanza universitaria. Nos abocamos inicialmente al problema de la articulación entre Universidad y Nivel Polimodal en el Area de Matemática. Nuestra hipótesis de trabajo se centró, más que en incrementar la posibilidad de acceso a la información en la actualidad, en el problema del desarrollo de estrategias para favorecer o potenciar un aprendizaje autónomo. Pensamos que la modalidad a distancia para llegar a los alumnos en el año previo a su ingreso a la Universidad, es una herramienta que les permitirá una primera aproximación al conocimiento de algunas características de organización y modos de trabajo de la institución en la que continuará sus estudios, contrastando con sus propias representaciones. En lo metodológico se trabajó con una propuesta de estudio de casos, seleccionando una escuela Agrotécnica de Educación Polimodal que incluye en su Proyecto Institucional la articulación con la Universidad. Con respecto

a la Educación Matemática se optó por la resolución de problemas como estrategia de trabajo con los alumnos y la propuesta se desarrolló desde la perspectiva pedagógica de la Educación a Distancia, elaborando materiales de estudio e implementando tutorías presenciales y por e-mail.
¿Por qué la educación a distancia? El crecimiento año a año de los porcentajes de abandono y deserción de los alumnos del primer año universitario demandan un trabajo de articulación de la Universidad con el Nivel Polimodal, y ello debe realizarse no sólo con los alumnos residentes en la ciudad de emplazamiento de la universidad sino, y muy especialmente, con los que habitan la amplia zona de influencia de la misma.

La elección del concepto matemático a tratar: el concepto de función. Consensuamos a abordar el *concepto de función,* en su doble carácter de herramienta y de objeto y dado que la importancia de lograr su comprensión va más allá de la consideración de su uso en un curso de Cálculo. Este concepto está ligado al rol central que juega como unificador en Matemática y como eje vertebrador tanto en el Nivel Polimodal como en el primer año del Nivel Universitario. En la actualidad y particularmente en los medios de comunicación, la mayor parte de la información referida a fenómenos de cambio, se expresa a través de tablas y de gráficos. Ambos constituyen registros de representación de una función. De la misma forma y en el campo de enseñanza de las ciencias, aparece fuertemente el uso de la función como modeladora de situaciones tanto del mundo real como de la matemática.

¿Por que nuestra elección de la resolución de problemas como metodología de trabajo? Uno de los objetivos esenciales de la enseñanza de la matemática es que lo que se enseña tenga sentido para el alumno. Al respecto Brousseau (1993) indica que el sentido de un conocimiento matemático se define: no sólo por la colección de situaciones donde este conocimiento es realizado como teoría matemática; no sólo por la colección de situaciones donde el sujeto lo ha encontrado como medio de solución, sino también por el conjunto de concepciones que rechaza, de errores que evita, de economía que procura, de formulaciones que retoma, etc. Nos surgen las siguientes preguntas: ¿Cómo hacer para que los conocimientos que enseñamos tengan sentido para el alumno? ¿Cómo pasar de las representaciones parciales y fragmentadas que del significado de un concepto tienen los alumnos a representaciones más abarcativas y completas? Según Charnay (1994) es la aparición de las nociones matemáticas como herramientas para resolver problemas las que favorecerán la construcción del sentido, sólo después se podrán estudiar estas herramientas por sí mismas. En el mismo sentido, Regine Douady sostiene que los conocimientos matemáticos deben ser construidos por los alumnos en un proceso dialéctico, proceso en el cual los conocimientos son primero instrumentos, herramientas, recursos para resolver problemas, para luego ser considerados como objeto de estudio en sí mismo. Coincidimos en que los conceptos se elaboran a partir de la interacción con un conjunto de problemas que le dan sentido. Un primer aspecto a considerar es brindar la oportunidad de emplear el concepto en la mayor cantidad de situaciones diferentes para las cuales el mismo constituya un instrumento adaptado así como propiciar que los alumnos establezcan relaciones entre las distintas clases de problemas de manera de entender por qué todos se resuelven utilizando el mismo concepto. Considerando el privilegio habitual del contexto algebraico, definimos un espacio de problemas en el que tratamos de poner en juego diversos contextos de utilización del concepto relacionándolos. Así mismo se trabajó con distintos registros de representación procurando presentar actividades que permitieran su articulación.

¿Con quiénes y cómo se planteó la experiencia?

Se planteó en una escuela Agrotécnica, a 120 Km. de la ciudad de Bahía Blanca, que contaba con un espacio institucional destinado a facilitar a los alumnos de tercer año de Polimodal "el camino hacia la universidad". Se concretaron acuerdos específicos que permitieran ajustar el trabajo de apoyo que ya estaba en marcha, con nuestra propuesta, más cercana a los procesos de nivelación en Matemática y Comprensión de Textos habituales en nuestra universidad. Estos acuerdos establecieron lo siguiente:

- La escuela seguiría manteniendo los dos Talleres de su Proyecto Institucional: uno destinado a la resolución de problemas matemáticos y el otro enfocado a afianzar distintas técnicas de estudio, vinculada a la comprensión de textos. Ambos coordinados por un docente de la institución.
- Se establecía, además, un espacio virtual en el que trabajarían los tutores integrantes del equipo de investigadores de la UNS y los alumnos inscritos en ambos talleres. La comunicación quedaría asegurada a través del correo electrónico.
- Los profesores a cargo de los talleres deberían monitorear la marcha de la experiencia y podrían señalar obstáculos y logros, pero sin intervenir en cuestiones disciplinares.
- Se instauraba un espacio virtual en el que los integrantes del equipo de investigación y los docentes mencionados trabajarían sobre cuestiones vinculadas a la capacitación.
- Se preveían también algunos encuentros presenciales en ambas instituciones.

La experiencia se planteó desde el equipo de Matemática acordándose una modalidad de trabajo con los alumnos del último año que comprendía encuentros virtuales y presenciales.

Los primeros estuvieron organizados del siguiente modo:

- Envío por parte de los tutores, a través del correo electrónico, de tres módulos conteniendo problemas, uno por cada trimestre. Se estableció un cronograma con fechas de entrega tanto de los módulos como de las respuestas de los mismos y corrección.
- Consultas al tutor, por e-mail, intercambiando información y orientaciones pertinentes.
- Envío de las resoluciones a las direcciones electrónicas dispuestas para tal fin.
- Envío de la corrección a cada grupo.
- Reflexiones conjuntas sobre los errores en los casos en que fue necesario.

Los encuentros presenciales fueron tres, dos en la universidad y uno en la escuela.

Material utilizado y actividades realizadas. Módulos: Fueron enviados a los alumnos a través del correo electrónico en tres entregas, previo un diagnóstico para saber cuáles eran los conocimientos disponibles de los alumnos participantes de la experiencia.

Primera entrega: En esta primera entrega se propone la resolución de problemas referidos al número real. Pensando en resignificar herramientas necesarias para trabajar con funciones se propuso la lectura e interpretación de diagramas de barras de los cuales se podía extraer información, uso de intervalos, orden en el eje real, identificación de puntos sobre una recta graduada, porcentaje, ecuaciones, conceptos y procedimientos necesarios para trabajar las funciones teniendo en cuenta distintos contextos y representaciones. **Segunda entrega:** En este caso podríamos distinguir dos etapas. En la primera utilizamos problemas en los que las funciones se definen por medio de gráficos. Ninguno de ellos responde a modelos elementales puesto que el objetivo no era la elaboración de modelos sino la lectura e interpretación de gráficos. Ambas cosas son perfectamente abordables y permiten una interesante introducción al concepto que estábamos trabajando a partir de situaciones reales, externas a la Matemática en este caso, que sirven de soporte concreto para la elaboración del concepto. Se propusieron situaciones en distintos contextos que favorecieran el desarrollo de una capacidad de análisis para obtener la máxima información correcta posible. Desde la visualización e interpretación, se requería obtener la información necesaria para la identificación de aquellas características del concepto objeto-función: intervalos de crecimiento y decrecimiento, puntos máximo y mínimo, concavidad. En la segunda etapa consideramos el aspecto modelizador de las funciones y trabajamos con problemas para los cuales las funciones polinómicas y particularmente las de primero y segundo grado constituyeron el modelo, incluyéndose aspectos cuantitativos y cualitativos, teniendo presente que los alumnos no conocían los elementos del cálculo diferencial pero sí características de funciones tales como la lineal y la cuadrática que permitieron la búsqueda de respuestas desde lo gráfico, lo geométrico y lo numérico.

Tercera entrega: Propusimos una nueva vuelta de tuerca al concepto de función, desde lo geométrico en un tratamiento dinámico, tanto en el plano como en el espacio.

Los encuentros presenciales en la modalidad de taller. Estos encuentros fueron pactados con la escuela, teniendo como objetivo principal el llevar a cabo una real articulación, de tal manera que, los alumnos que participaban de la experiencia, no solo concurrieran a los Talleres organizados por el equipo, sino que también tomaban contacto con la Universidad en sus distintos aspectos: edilicio, académico, normativo. Visitaron la Biblioteca Central, estuvieron en contacto con alumnos de distintos centros de estudiantes, recibieron informaciones generales sobre carreras y servicios que nuestra universidad brinda al estudiante (becas, comedor, residencias, etc), visitaron distintas dependencias. Por otra parte estas reuniones permitieron el encuentro del equipo de investigación con los alumnos que participaban en la experiencia, docentes y directivos de la escuela. La interacción cara a cara posibilitó un espacio para la consulta y la orientación, la reflexión sobre los errores y formular aquellas preguntas que la comunicación por e-mail había acallado. Además permitieron plantear nuevos problemas integradores que hacían hincapié en distintos aspectos del concepto de función, que a través de las respuestas enviadas por mail, se habían detectado como fragmentados. En el primer encuentro se trabajaron situaciones problemáticas que abordaron el contenido números reales, fundamental para la construcción del concepto de función, y hubo un espacio de consulta y de reflexión sobre la forma de comunicación de resultados. En el segundo encuentro - en la escuela - los alumnos, el docente responsable del grupo en la misma y el equipo de investigación participaron de un Taller trabajando con situaciones problemáticas en las que se abordaba el contenido funciones de segundo grado como modelos en distintos contextos. Esta instancia resultó fundamental para la recuperación de saberes y para el trabajo con distintos registros de representación. En el tercero y dado que para la resolución de los problemas correspondientes a la tercera entrega los alumnos habían tenido mayores dificultades - el contexto geométrico había sido muy poco trabajado en años anteriores - se dejó un amplio espacio para la consulta, la orientación y la reflexión sobre estos aspectos del concepto.

Observaciones que dan cuenta de algunos logros y dificultades

En cuanto a lo técnico. El material se envió por e-mail a cada estudiante con acceso a Internet, a la escuela y al docente a cargo del Taller en la escuela, asegurándose la recepción del material por parte de todos los participantes. Las dificultades se manifestaron en el envío de respuestas a los problemas por los alumnos, lo que mostró claramente las diferencias entre quienes contaban con acceso a la tecnología y quienes no.

En cuanto a lo disciplinar. Puesto que el concepto de función ya ha sido tratado en años anteriores, el objetivo fue el de la resignificación del mismo pero considerando la necesidad de que el alumno comience a ajustar notaciones que tienen que ver con el lenguaje matemático. Tanto el desconocimiento como la ambigüedad en la expresión constituyen importantes obstáculos en el primer año universitario al momento de comprender el lenguaje científico, no sólo en Matemática, es fundamental la adquisición gradual del mismo. En este sentido, observamos que notaciones como la de intervalo, particularmente al utilizarla para expresar el dominio de funciones, no son conocidas, o no se tienen en cuenta al momento de escribir la respuesta a una pregunta específica. En general, estas respuestas no estaban claramente expresadas y en algunos casos, el desarrollo del problema no aparecía explícitamente. El primer encuentro presencial posibilitó la reflexión conjunta sobre cuestiones que tienen que ver con la comunicación. En algunos casos, cuando la solución del problema requería usar la función lineal como herramienta, se utilizaba la *regla de tres simple*, aun en los casos en que su uso era incorrecto. Siempre trabajando con funciones lineales y en el caso de la determinación de puntos de equilibrio, igualaron expresiones algebraicas pero sin tener en claro que lo que realizaban era la igualdad entre funciones y que resolvían un sistema de ecuaciones. En general, los alumnos tuvieron dificultades y en algunos casos no pudieron resolver problemas que se modelizaban con la función cuadrática, ya sea por falta de conocimiento o porque habían puesto el foco en gráficos realizados utilizando tablas de valores. El segundo encuentro presencial, permitió la recuperación de saberes desde lo algebraico, su utilización al completar cuadrados y su uso para determinar el vértice de la parábola y su eje de simetría. Así mismo se trabajó con la resolución de la ecuación de segundo grado, que los alumnos tenían bien presente, pero ahora resignificándola para determinar ceros de la función y relacionarlos con los puntos de intersección de la parábola con el eje X. Estos elementos permitieron realizar un gráfico más ajustado de dicha función, cambiar de registros de representación y resolver problemas de optimización sin necesidad de recurrir a herramientas del cálculo. Si bien habían trabajado en años anteriores las herramientas algebraicas, no las reconocían al momento de cambiar de registro de representación. Al tratar la función vinculada a cuestiones geométricas tanto en el plano como en el espacio los alumnos tuvieron dificultades para reconocer la necesidad del uso de semejanza, el Teorema de Thales, que parece que no se hubiera visto en años anteriores, no así el Teorema de Pitágoras, cuyo enunciado, aunque no su uso, parece muy presente en la mayoría de los alumnos.

La encuesta. No analizaremos aquí las respuestas a todas las preguntas. Queremos, con respecto a las preguntas: ¿Qué aprendizajes nuevos crees que lograste por la realización del curso? y Con respecto a los contenidos tratados: ¿Algunos fueron nuevos? ¿Cuáles? ¿Tuviste dificultades con alguno de ellos? ¿Con cuáles? señalar algunas respuestas que nos parecen interesantes:

- *Aprendí a pensar y razonar más las situaciones problemáticas.*
- *Los aprendizajes fueron matemáticos y a interpretar un problema, analizarlo y probar distintas chances de resolución.*
- *Incorporé nuevos temas, reví los temas que ya no me acordaba o simplemente nunca lo había aprendido.*
- *Creo que el mayor aprendizaje que tuve o que mejor pude profundizar es la interpretación de problemas, que me cuesta mucho actualmente y me va a seguir costando, creo que en la mayoría de los problemas había que tener en cuenta muchas cosas ya vistas en años anteriores que ya no se acordaban en mi caso.*
- *Lo que sí aprendí es a encarar los problemas de distinta forma y siempre llegar a una misma respuesta.*
- *Hubo muchos contenidos que no tenía muy en claro y con este curso pude profundizar más los temas y darme cuenta que cada situación tiene muchos caminos que la resuelven.*
- *Como aprendizaje podría decir que me sirvió para una mejor comprensión de los enunciados.*
- *Aprendí a trabajar con trabajos prácticos y plazos de entrega.*
- *Nos ayudó a resolver los problemas que están más conectados con la realidad y así aplicarlos.*
- *Los aprendizajes nuevos que logré es poder entender algunas otras cosas que por ahí no me quedaban muy en claro en años anteriores y que pienso que ahora se aclararon ...*
- *No se si algunos temas fueron nuevos, pero de lo que puedo estar seguro es que en los temas ya vistos en los cursos anteriores, este año se fueron metiendo más a fondo sobre los temas, en una palabra los profundizaron.*
- *Teorema de Tales, alguna fórmula de proporcionalidad y algunos temas tratados en el primer encuentro. Creo que lo que más me costó fue trabajar*

durante el primer encuentro, ya que no estaba tan acostumbrado a tratar algunos de esos temas.

-*Creo que ningún contenido fue distinto solo que lo que fue distinto es la forma de resolverlos.*

-*.... en sí lo más nuevo era descubrir cuántas formas existen de llegar a un mismo resultado*

-*No se si algunos temas fueron nuevos pero a la vez eran distintos totalmente a los que nos dan en la escuela.*

Reflexión final

Como un anticipo a las conclusiones de este proyecto, se pueden señalar como relevantes el reconocimiento de un quiebre entre el tratamiento metodológico del objeto matemático en el transcurso de la escolaridad polimodal y la propuesta planteada desde el apoyo para el ingreso universitario. Los alumnos muestran o bien tendencias a resolver los problemas a partir de la aplicación mecánica de procedimientos o el desconocimiento de contenidos conceptuales y/o procedimentales que resultan básicos al momento de resolver los problemas. Una vez identificada esta situación, la misma pudo atenuarse a partir del trabajo personalizado con la profesora responsable de la Escuela Polimodal y las docentes universitarias del área de matemática integrantes del Proyecto. Los talleres presenciales en los que participaron conjuntamente estos docentes y los alumnos fueron otro factor que contribuyó a un acercamiento tanto en lo metodológico como en lo disciplinar. Desde la encuesta y en lo referido a los contenidos en general, es importante señalar que los temas abordados no resultan desconocidos para los alumnos pero sí el particular enfoque que se les da en la Universidad y el descubrimiento de que un problema puede tener distintas estrategias de resolución y que el resultado siempre será el mismo. De esta experiencia emerge en forma clara la importante labor del docente tutor que monitoreó la experiencia que se realizó y señaló los obstáculos que se presentaron pero que desarrolló su actividad en la escuela sin intervenir en las actividades disciplinares de los alumnos. Las instancias de comunicación que permitieron la construcción de un proyecto compartido y su desarrollo nos permiten pensar que desarrollos semejantes al analizado pueden dar lugar a formas alternativas de actualización y capacitación docente, mediante el trabajo colaborativo entre docentes de ambos niveles con los alumnos.

Bibliografía

Artigue, M; Douady, R; et al (1995): *Ingeniería didáctica en Educación Matemática*. GEI. Bogotá.

Azcárate, C; Deulofeu, J. (1990): *Funciones y gráficas*. Colección: Matemáticas: cultura y aprendizaje. Editorial Síntesis. España.

Brousseau, G. (1994): *Los diferentes roles del maestro*. En Parra y Saiz (comps): *Didáctica de Matematicas. Aportes y reflexiones*. (pp. 65-94). Paidós Educador. Bs. As.

Brousseau, G. (1993): *Fundamentos y Métodos de la Didáctica de la Matemática.* En Trabajos de Matemática Nº 19. Universidad Nacional de Córdoba.

Camuyrano, M. et al (1998): *Matemática. Temas de su didáctica*. PROCIENCIA. Conicet. Programa de perfeccionamiento docente. Ministerio de Cultura de la Nación. Buenos Aires.

Charnay, R. (1994): *Aprender (por medio de) la resolución de problemas* En Parra, C y Saiz, I: *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones*. (pp. 51-63) Paidós Educador. Argentina.

D'Amore, B. (1997) *Pedagogía y Psicología de la matemática en la actividad de resolución de problemas*, Madrid: Síntesis.

Douady, R.(s/d) *Relación enseñanza – aprendizaje. Dialéctica instrumento – objeto, juego de marcos.* Cuaderno de Didáctica de la Matemática nº 3. ISFD 41. Doc. de uso interno.

Duval, R. (1996): *Registres de représentation sémiotique et functionnement cognitif de la pensée.* Traducción para fines educativos, Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav – IPN. México.

Fernández de Carrera, E (1999): *La educación a distancia y la articulación enseñanza media – universitaria. El caso de la educación matemática*. En *Acerca de la distancia*. Tercer Seminario Internacional de Educación a Distancia. (pp. 115-122). RUEDA. EUDECOR. Argentina.

Litwin, Edith (comp) (2000): *De las tradiciones a la virtualidad*. En *La educación a distancia. Temas para el debate en una nueva agenda educativa*. Cap. 1 Amorrortu Editores. Buenos Aires.

Polya, G. (1979) *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Editorial Trillas.

Schoenfeld, A. (1997) "La enseñanza del pensamiento matemático y la resolución de problemas", en Resnick, L; Klopfer, L. (compiladores): Curriculum y cognición, Buenos Aires: Editorial AIQUE. Colección: Psicología Cognitiva y Educación. Pag 141 a 170.

Waisman, R.; Giunta; M.; Olivares, M. (2002): Material de aprendizaje. Módulo I: La educación a distancia. Curso Interuniversitario de Educación a Distancia. Edición 2002.

EL COMPROMISO CON EL HORIZONTE DE RACIONALIDAD/MODERNIDAD. EVIDENCIAS DE DESPLAZAMIENTO EPISTÉMICO EN EL CONCEPTO DE SOLUCION

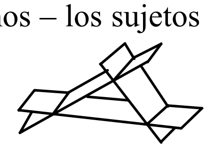
Juan Guadarrama Méndez
Cicata IPN- UPN, México
jguadarrama1@starmedia.com

Resumen

Se presenta el reporte de investigación relacionado a un proyecto de investigación doctoral titulado ***La Construcción Social del Concepto de Solución.*** Su propósito es delinear un marco de argumentación teórico analítico-racional que explique lo que está ocurriendo en los procesos de creación de conocimiento, sobre la base –por una parte- de los entendimientos y concepciones que evidencian las personas al momento de trabajar con el concepto de solución por un lado, y por la otra, de los juicios sintéticos *a priori* de Kant. El análisis de estos juicios señala que el conocimiento centra ***la experiencia y la razón*** como los actos de conocer, colocándolos como opuestos irreconciliables, requiriéndose superar la contradicción, el obstáculo epistemológico[5], en un acto de síntesis que propone Kant, para alcanzar la razón mas elevada, la razón pura, la más dominante. Debido al estado que guardan los entendimientos y las concepciones de las personas, relativas al concepto solución, puede estarse efectuando aquí una doble operación epistémica, sobre las prácticas sociales y las discursivas, al desplazar el sentido epistémico del concepto de solución, *dificultando sus entendimientos*. En ese sentido se formula la pregunta ***¿se puede pensar que el uso de los juicios sintéticos a priori de Kant, pertenecientes al horizonte de racionalidad que los enunció, sea fuente de dificultades respecto al aprendizaje del concepto de solución?*** Se conjetura que el horizonte racional que enunció los juicios sintéticos a priori - *racionalidad/modernidad* del siglo XVI que aborda la discusión filosófica de reducir sobre la acción los objetos y las cosas a la forma o al contenido - añade dificultades a las personas, derivadas de las exigencias de operar el concepto de solución en matemáticas. Al contrastar el examen de los argumentos kantianos mencionados y las evidencias. Tal contraste da cuenta de entrecruzamientos epistémicos de horizontes racionales de enunciación diferentes - respecto a la solución - en estudiantes y profesores del nivel de educación superior, proveyendo datos y evidencias de las dificultades en las personas, de carácter epistemológico, afín a la formulación de Cantoral y Farfán de "que el conocimiento matemático (...) tiene un origen y una función social y esta afirmación puede ser entendida en (…) que *todo conocimiento matemático obedece a una necesidad de naturaleza práctica*". A la luz de esta aproximación, entonces, la problemática debe establecer la interacción entre la elaboración teórica y la evidencia empírica, interacción impedida dados los entrecruzamientos epistémicos de horizontes racionales de enunciación diferentes al momento de trabajar con el concepto de solución.

Antecedentes

En el proceso de localizar evidencias (Guadarrama, 2000) sobre la actuación de los modos de pensamiento de Sierpinska (1996), fundamentados en la postura filosófica de Kant de los juicios sintéticos *a priori,* se observó que, al considerar la solución de un sistema de tres ecuaciones lineales en su representación gráfica - punto en el que concurren tres planos – los sujetos del estudio[6] la miraban como la intersección dos a dos de los planos.



Esto podría pensarse contradictorio a lo que se considera la representación gráfica de la solución: que rectas y planos convergen en un punto.

[5] Como refiere Bachellard

[6] Profesores de educación superior que participaron en la investigación y también hallados en reportes de investigación en estudiantes de bachillerato

Estado que guardan los entendimientos y las concepciones de las personas, relativas al concepto de solución. Las evidencias empíricas del estudio muestran cómo se expresan los profesores de matemáticas - tanto en lo lingual como en lo gestual - en un discurso matemático "escolar", ante los cambios epistémicos producidos en el discurso matemático teórico. A pesar de que enseñan el tema a sus alumnos, tienen dificultades en interpretar situaciones que no son típicamente tratados en los textos escolares ni en las currícula respectivas. Esto es, su enseñanza suele centrar más la atención en los algoritmos que en las interpretaciones y los significados. También se identificó prácticas de reconocimiento gráfico común en el plano R2 y en el espacio R3 - determinadas por la necesidad de proveer respuesta a las preguntas formuladas a la solución. Llamó la atención una persistencia que se identificaba en la localización de lo común de los dibujos, que ancla el problema a la dimensión didáctica, cognitiva, epistemológica y sociocultural, ilustrada por el argumento "Si se intersectan, tiene solución. Si no se intersectan, no tiene solución", enlazado más con lo epistemológico. Para profundizar en ello, se diseñó un instrumento de indagación (2000) consistente en preguntas sobre datos generales y una secuencia que requería efectuar la síntesis (explorar) y uso de los juicios sintéticos a priori, en un formato que contenía preguntas, con la idea del reconocimiento a través de la asociación con sistemas de ecuaciones lineales 3X2 y 3X3, de 36 gráficas, para que indicaran los casos observados; Si la gráfica asociada a un sistema de ecuaciones lineales representaba el caso de solución y la no existencia de la solución en el sistema de ecuaciones hipotético asociado, también si era única o tenía un número infinito de soluciones, localizándolas en el dibujo o gráfica. Recurrieron, en su necesidad de asignar significado cuando miran las representaciones gráficas asociadas al concepto, a expresiones linguales de uso y empleo del cuerpo como mediadores de expresión, anclados en que "algo tenía que estarse intersectando". Se identificaron los casos siguientes en las entrevistas, evidenciando el uso de los juicios sintéticos a priori respecto a la solución: A) La intersección con respecto a una recta vertical, que puede coincidir con un eje en un sistema de coordenadas; B) En el plano y en el espacio, la intersección dos a dos coinciden con cierta estructura, la coincidencia sería la intersección dos a dos de los objetos -planos o rectas-; C) Tercera categoría: dos paralelas y un transversal, en el plano y en el espacio; D) Cuarta categoría, la intersección de tres planos en una recta.

Problemática.

En orden a encontrar más evidencias para responder a las interrogantes que se formulan en el proyecto de investigación doctoral sobre la construcción social del concepto de solución se formuló la pregunta *¿Se puede pensar que el uso de los juicios sintéticos de Kant, pertenecientes a un horizonte de racionalidad que los enunció, sea fuente de dificultades respecto al concepto de solución y su aprendizaje?* Tal horizonte de racionalidad - que no supera el dualismo de dos experiencias, la del conocimiento y la de la acción - pudiese estar instalado en las exigencias racionales al momento de trabajar con el concepto de solución, influyendo en los entendimientos y concepciones relativas al mismo.

Para responder a esta pregunta, se delineó un marco de argumentación teórico analítico-racional – argumentación que se expone en el presente artículo - que explicara lo que está ocurriendo en los procesos de creación de conocimiento, a la luz de los entendimientos y concepciones que muestran las personas al momento de trabajar con el concepto de solución. Se conjeturó que la filiación a un cierto horizonte de racionalidad - parte del movimiento de la modernidad - enunciado bajo los elementos epistémicos con que se formuló, estaría incidiendo en la conceptuación de solución, sin atender a que posiblemente los entendimientos de las personas respecto al concepto referido, se encuentren instalados en otros horizontes racionales, provocando entrecruzamientos – dificultades por los desplazamientos epistémicos que exige el reemplazo de un horizonte por otro, exigidos por el movimiento de la razón y la modernidad, dificultando la creación de nuevos entendimientos y concepciones que posibiliten la comprensión y manejo adecuado de la solución en el contexto solicitado. Tales desplazamientos añaden dificultades de carácter epistémico, didáctico, cognitivo y sociocultural a las prácticas sociales, culturales, docentes y discursivas del quehacer educativo.

Marco de Referencia

Kant buscaba con el establecimiento de los juicios sintéticos a priori, dar *solución al problema de la experiencia.* Los antecedentes del horizonte de racionalidad en que los enunció, son aquellos que sustentan la racionalidad/modernidad constituida a partir del siglo XVI, afinada y establecida con todas las implicaciones hasta el siglo XVIII. Ese horizonte racional dominó la producción de ideas, de pensamiento, de conocimiento científico, matemático, de prácticas sociales y culturales, incluidas las discursivas. Bajo el principio de Descartes, *cogito ergo sum*, basado en la verdad: *pienso, luego existo,* se marcó un sentido de lo que significaba conocer y desde entonces ese código[7] es parte de los supuestos que subyacen a este horizonte racional. Kant aborda la discusión filosófica de la época, del problema sobre la acción de reducir los objetos y las cosas a la forma o al contenido, es decir, pretender resolver el problema de la materia y la forma. Distingue tres tipos de juicios: analíticos *a priori*, sintéticos *a posteriori* y los sintéticos *a priori*[8]. Kant intenta superar el racionalismo y el empirismo planteando su síntesis sobre la base de limitar la aplicación de las categorías o conceptos puros a contenidos que se den en la experiencia sensible, en el espacio y en el tiempo, sin resolver –por no disponer de las herramientas de que hoy disponemos - el dualismo teoría – práctica que el mismo instaura (Echeverria, 1986). Estudiará el método científico desde su tabla de categorías, que "regulan" la actividad de la razón, desplazando la atención desde el seno de la ciencia a la manera en que el hombre la aprende y domina. E*l conocimiento se centrará en dos aspectos que estarán presentes en los actos* de una *nueva relación de conocer: la experiencia y la razón* – relación que deja oscura al no explicitar los modos de producirla. En el acto de síntesis basado en los juicios sintéticos a priori pretende alcanzar la razón más elevada, la razón pura. La modernidad la constituye en hegemónico-dominante,

[7] Al examinar su enunciación generalmente se señala que lo lleva por lo evidente, a describir por qué es concebido en forma clara y precisa, donde lo claro es lo que se presenta de inmediato a la mente, y lo preciso es lo que es claro y sin condiciones, o sea que es evidente (Pérez, 2000),

[8] Los analíticos *a priori* son exactos, pero no aportan ninguna información, ya que sólo son claros cuando son parte de alguna definición; los sintéticos *a posteriori* aportan información, pero están sujetos a los errores de la percepción; los sintéticos *a priori* son exactos y aportan información, son obtenidos por intuición y son la fuente del conocimiento.

aportando bases a un tipo de práctica escolar en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Propone como fundamento - este horizonte racional - que la función epistémica se obtendría elevando la razón a la razón pura, llegando de esta manera al conocimiento como tal, en nuestro caso al concepto de solución y sus entendimientos. Ahora bien ¿cómo se proponía metódicamente este acto del pensamiento de elevar la razón? Estableciendo *una división del conocimiento por grados, los cuales parten desde las nociones y van a los conceptos y, entonces, a las categorías* (González, 2003) sosteniendo que en este ultimo nivel *radica el conocimiento epistemológico.* Este tiende a explicar no sólo los fenómenos, datos o procesos, sino que trasciende los conceptos, pretende entender y explicar la esencia de la realidad y el conocimiento de la misma, es decir, el acto de generalizar y abstraer[9]. Por su parte, González (op. cit. 2003) en un marco del *ser-conocer integrados*, postula que la *relación sujeto-objeto* es transformadora y transformativa. La relación de conocimiento se encuentra en un tercer nivel "epistemológico", de un *ser-conocer integrados, pero devenido*. Señala que lo anterior se rompe históricamente en el momento que la revolución científica galileana-mecanicista, desvió su intención - y que hoy atañe también al ser humano, en particular a ese otro llamado marginado, excluido, reprobado, colocado en la exterioridad del sistema mundo moderno - porque fue modificada esa relación, separando a la naturaleza del ser humano. Este horizonte formuló su entender y conocer mediante escuelas del pensamiento cuya tendencia general para explicar el conocer ha respondido a dos axiomas: El de *Parménides de Elea* a través del principio de la identidad y el de *Heráclito de Efeso,* que sostuvo que la contradicción es la base de la realidad; que la realidad es dinámica por esa lucha procesal. Bajo *dos principios* considerados opuestos[10], la perspectiva idealista, que sostiene que el conocimiento nos viene de las ideas puras, conforme Platón y la otra, la perspectiva materialista que sostiene que el conocimiento es elevarse de lo abstracto a lo concreto, de lo simple a lo complejo y siempre de lo menor a lo mayor, es decir, lineal y acumulativo. *Aquí es donde ubicamos el punto del análisis racional,* pues se observa que ambas perspectivas niegan la otredad pues se postulan por dentro del sistema en este horizonte racional, para los de adentro, y singularmente se proclamaron como universales, incluyendo más condiciones sobre los objetos de conocimiento, y sobre los sujetos cognoscentes y precisamente esto es convertir el asunto en un acto ontológico, convirtiendo y transformando la relación de conocimiento, que al emplear la división de González (op. cit. 2003) actúa en tercer nivel de lo epistemológico, sin embargo regresa el conocer, entender, y explicar docente al segundo nivel de la realidad y del conocimiento del mismo, discurriendo que se encuentra en el tercer nivel, es decir, epistemológico, ser-conocer integrados, pero devenido. *Importante en el análisis acerca de la enseñanza de la solución, incluido el lenguaje con que comunican entendimientos y concepciones relativas al concepto*. Pues produce desplazamientos epistémicos, en la relación del

[9] Las *nociones* colocan un primer nivel, se mueven en el plano de lo descriptivo de las apariencias u óntico. El plano de los c*onceptos* u ontológico, es el plano de lo explicativo en términos de funcionamiento o estructuras. El plano de las *categorías* es epistemológico. Estas, para constituir conocimiento válido, debían aplicarse a contenidos que se expresasen en el tiempo y el espacio, asequibles por tanto a nuestra sensibilidad. No visualiza Kant las complejidades comprometidas en la constitución de esa "sensibilidad" por lo que no articula, precisando, la naturaleza de una interacción sintetizadora entre el conocimiento y la acción humana.

[10] Enajenación de la negación y de la lucha de los contrarios

conocimiento, reduciendo y enmarcando en parámetros toda su actividad a relaciones de conocimiento de objetos: saberse los algoritmos, las reglas con que se opera un determinado método, como los pasos para obtener la solución y desde luego la solución misma, como si fueran éstas las únicas, que se tiene que saber y conocer. Por ejemplo se puede compartimentar la secuencia de contenidos del curso, estos tienen la misma secuencia de organización lógica, coincidente con los textos que se emplean en clases y salones, indicándonos este desplazamiento epistémico, la dirección con la que actúa la racionalidad/modernidad al establecer –hacer invisible lo visible, para actuar y sostener el hacerse invisible la operación de *cómo lo asume el todo*- Producción de separación de conocimiento y del productor del conocimiento, entre experiencia y razón, entre aplicación y teoría, entre ciencia y ciencia educativa, entre prácticas formalizadas y prácticas de uso. *Al crear ausencia de conexión entre ellas, coloca la necesidad de establecer mediadores que posibiliten la comunicación,* lo que necesariamente implicará ausencia de sentido comunicativo, desplazamiento epistémico en las relaciones de conocimiento, reorganización de la estructuración de sistemas conceptuales y de conexión de ideas y formulación de un pensamiento. Observado en las formulaciones históricas, filosóficas (De Sousa[11], 2001). Linea de argumentación central –la herramienta analítica formulada- que observa los actos del conocer, que actúan, que se desvían, con sus intencionalidades, que actúan sobre las personas que aprenden y las que enseñan, en las exigencias de la escuela, los profesores, la matemática, sus contenidos, acordes al horizonte racional vigente, creando, una doble práctica en: el conocer, pensar, actuar, hacer, discurrir, idear. *Operación que ejerce el sistema* sociocultural, que determina variaciones, modificaciones en las componentes elegidas de la dimensión Sociocultural - cultura, prácticas discursivas e identidad - y que sin pérdida de categorización, detallan variaciones encontradas, por ejemplo, en las maneras linguales, culturales que emplean las personas para resolver la contradicción, superar el obstáculo o de realizar la síntesis en el sentido de Kant, al des-apropiar el conocimiento matemático y el concepto de solución dados, de su naturaleza, por una necesidad de preservación identitaria, cultural, pero también de hacer posible, la entronización y empatía con la cultura que se impone, representada en este caso por el conocimiento matemático proveniente de afuera y de la racionalidad/modernidad que lo creó. En nuestro caso *la solución, en los sistemas de ecuaciones lineales, en la ecuaciones o en los problemas donde se formula hallar la solución*, que sintetiza la razón pura, parametrizando su *significado, y reduciendo el espacio de interpretación, de conexión con la experencialidad de las personas "para ganar precisión", implementando la acción de separación (*teoría de la separación en la idea de De Sousa, 2001). *Elaborando y creando un lenguaje que exprese estas nuevas formas sintetizadas y elevadas de la razón,* que llamó: *construcción del lenguaje formal y estructurado, es decir, de un lenguaje científico* para arribar a un nuevo estado de producción del conocimiento científico matemático, volviéndolo un conocimiento hegemónico y por tanto

[11] Nos dice la misma autora la idea bíblica y medieval de la sucesión de los imperios (*translatio imperii*), en cada era, un pueblo asume la responsabilidad de conducir la Idea universal, convirtiéndose así en el pueblo universal histórico, un privilegio que por turnos ha pasado de los pueblos asiáticos a los griegos, luego los romanos y, finalmente, a los germanos. América, o más bien Norteamérica, conlleva para Hegel un futuro ambiguo, en tanto no choque con el cumplimiento último de la historia universal en Europa.

dominante. Colonizando las formas de aprender, conocer, hacer, que crea una práctica diferenciada a la del locus de enunciación. En ese sentido se considera que *el acto que promueve una doble práctica se ubica, en pretender por una lado, saber la definición y por otro entender e interpretar la misma en un mismo acto mental, pero separándolo* según los requisitos del horizonte racional de los juicios sintéticos de Kant - empleando un mediador lingual para dar a entender lo que se indica: "juntos pero no revueltos" - La definición de solución entendida como un acto de síntesis basado en los juicios sintéticos de Kant, "que se eleva sobre la experiencia", incluida su superación intuitivo geométrico-sintética, para ser colocada en la formalidad, en lo analítico-estructural como proyecto de elevación de la razón y alcanzar la razón pura. Por su parte, *los entendimientos y las concepciones* son elaborados como parte del conjunto de experiencias que las personas realizan y obtienen al ir construyendo y constituyendo socialmente el concepto de solución (bajo consensos y negociación de significados, uniendo, no unificando, es decir, sin parametrizar (SIC)(De Sousa, 2001). De este modo, en estos dos planteamientos (irreconciliables) exigencia de la racionalidad-modernidad, se abre un abismo que no los comunica.

Metodología

Se eligieron 3 grupos de estudiantes de ingeniería (85), de los primeros semestres de una Institución Educativa del Nivel Superior, en la Ciudad de México, para indagar respecto a los aprendizajes, entendimientos y concepciones que tenían respecto a la solución en condiciones escolares, es decir, en su semestre escolar, en las actividades del curso, llevando a cabo la aplicación a través de los profesores de la materia. Se implementó un *Instrumento de Exploración Ia. Parte* (2002)**,** consistente en tres aspectos: 1) la sección que inspecciona sus entendimientos, experiencias, concepciones, dividido a su vez en tres componentes: a) La relativa a la exploración de si existían diferencias en el lenguaje al transitar en distintos niveles educativos, ejemplificándolo a lo largo de su trayectoria académica, b) Sobre: qué es la solución, y el resolver desde y para ellos, y c) De las dificultades identificadas con la aplicación del instrumento de exploración. En su segunda sección se exploró la situación de resolver una ecuación lineal con dos incógnitas. La idea era observar *cómo la resolvían* y los *procedimientos mas típicos* que empleaban. Finalmente una tercera sección que exploraba la asociación de representaciones geométricas asociadas a la existencia de la solución o no para sistemas de tres ecuaciones con dos incógnitas. En este reporte el análisis refiere a la primera sección, rubro b) y en particular los relativos a *qué es la solución* pues las respuestas de c) apoyaron a b), inclinándose por explicitar sus dificultades mediante la información requerida

Resultados

Exhiben el tránsito entre un horizonte y otro expresado en las respuestas, permitiendo localizar y aportar nuevas evidencias al proyecto de investigación: *La Construcción Social del Concepto de Solución.* En efecto, a pesar de que la definición elegida (1900) por el primer grupo de estudiantes estuviese distanciada en el tiempo, ella a su vez es cercana al segundo grupo de respuestas de estudiantes, que deviene de un horizonte de enunciación distinto al actual. La contrastación se observa en las respuestas que proveyeron para observar lo aquí identificado, verificación de nuestras conjeturas, que se formularon empleando la herramienta analítico racional que lo predecía. Tal horizonte tiende influencias en los entendimientos y concepciones de las personas al momento de trabajar con el concepto de solución, por tanto importante de considerar en los procesos de aprender y enseñar matemáticas. Lo que pareciera una obviedad, sin embargo, no lo es. Produce efectos diferentes frente a los procesos señalados, y en la formación de las personas, por lo que no se trata de un problema didáctico o referido a un problema filosófico relativo con la didáctica, sino una evidencia. En los profesores también fue observado. Se trata de evidencias instaladas en lo epistemológico que responden a horizontes racionales de enunciación diferente que se entrecruzan, deviniendo en dificultades que adoptan en el sentido didáctico, cognitivo, fuertemente epistémicos, como socioculturales (Guadarrama, 2002 a). No se potencia la razón más alta o epistémico sino más bien se regresa a niveles anteriores y desagregados.

Bibliografía

Cantoral, R. y Farfán, R. (2000).A sociocultural approach to infinitesimal calculus. International Congress, 32-33 August, Japan.

Echeverría, R. (1986). *El búho de Minerva*. Edición PIIE. Santiago de Chile.

Ramírez y González (jul-dic 1998). Las nociones de comunidad epistémico y planeación prospectiva: fundamentos de la escuela modelo del s XXI. Rev. *La Casa del Pensamiento* pp 3-12 Plaza y Valdés Mx

Guadarrama, J. (2000). Estudio de la Interpretación Geométrica del Concepto de Solución en los Sistemas de Ecuaciones Lineales. Tesis de Maestría no publicada. Cinvestav. México.

(Idem) (2002, a). La Dimensión Sociocultural en la Conformación de Sistemas Conceptuales. Sistemas conceptuales en los saberes matemáticos. Extenso Ponencia RELME-16, Sept. , México.

(Idem) (2002, b), La Construcción Social del Concepto de Solución. Memoria predoctoral Cicata, Sept. Mx.

De Sousa, B. (2001). Nuestra América. Reinventando un paradigma subalterno de reconocimiento y redistribución. *Revista Chiapas*, N°12. Era y IIE-UNA

EL CONTENIDO MATEMÁTICO ESCOLAR EN SITUACIONES DE APRENDIZAJE EN LA FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES

Hugo Parra S.
Universidad del Zulia
parraortiz@cantv.net

Resumen
Las reflexiones que se presentan a la discusión tienen su origen en una investigación que tiene entre sus objetivos analizar el uso del contenido matemático escolar en situaciones de aprendizaje, desarrollados por los estudiantes del último semestre de la Licenciatura en Educación mención Matemática y Física y su nivel de correspondencia con el uso propuesto por sus profesores universitarios. Entre otros elementos que determinan la incorporación de contenidos matemáticos en situaciones de aprendizaje por parte del docente, se encuentra la manera como éste entiende la naturaleza de la matemática, su enseñanza y su aprendizaje. Para abordar el problema, se consideró pertinente asumir un enfoque cualitativo etnográfico porque el mismo nos ha permitido reconstruir la realidad objeto de estudio y analizarla con profundidad (Goetz & LeCompte, 1988). El presente trabajo forma parte de un proyecto de investigación que estudia la cultura matemática escolar y las prácticas pedagógicas[12].

Introducción

El presente trabajo forma parte del proyecto de investigación denominado *cultura matemática escolar y prácticas docentes* de la Universidad del Zulia. Dicho proyecto tiene como propósito estudiar la acción docente en matemáticas en el contexto de la institución escolar con miras a buscar su transformación, de manera que la educación matemática que se genere resulte pertinente a los fines de construir una sociedad democrática y justa.

En el marco antes descrito nos hemos planteado entre otras metas analizar el uso del contenido matemático escolar en situaciones de aprendizaje, desarrollados por los estudiantes del último semestre de la Licenciatura en Educación mención Matemática y Física y comparar su correspondencia con el uso propuesto por sus profesores universitarios; de esta manera al conocer esta realidad podremos en un futuro inmediato proponer cambios en los planes de estudios y en las rutinas escolares que se generan en el proceso de formación de estos docentes con miras a formar educadores en matemática acordes con las necesidades que la realidad exige.

El enfoque que hemos asumido para la recolección de la data es el etnográfico (Goetz & LeCompte, 1988) y tres han sido las fuentes para obtener la información: la recolección y posterior análisis de las planificaciones de los estudiantes de las pasantías, registro de las notas de campo en el desarrollo de las reuniones semanales que tienen los estudiantes con sus profesores de las pasantías y por último, entrevista a profesores que han dictado cursos a este grupo de estudiantes. Es importante destacar que las reflexiones e informaciones aquí presentadas tienen carácter provisional porque aun no se ha culminado la investigación.

El contenido matemático escolar. Características de su incorporación

Como principio asumimos que el uso que se hace del contenido matemático escolar no es neutral (García, 1998); el mismo responde a diversos elementos presentes en el

[12] Este proyecto está auspiciado por el Consejo de Desarrollo Científico y Humanístico de la Universidad del Zulia bajo el no. 0494 - 2002

desarrollo de la acción docente en el ámbito escolar. Desde el punto de vista social los contenidos escolares matemáticos responden a las demandas que la sociedad hace a la institución escolar con relación a lo que se espera que enseñe; además, también se toman en consideración elementos de orden psicológico relativo al sujeto que aprende (significatividad y funcionalidad de lo que se le presenta a los estudiantes). Por otra parte, hallamos el contexto, el cual constituye un factor fundamental del hecho educativo (¿dónde se enseña y bajo qué condiciones?) (Parra, 2002; Raymond, 1997) y por último, existen otros elementos relacionados con el docente que en nuestro caso constituyen el foco de atención del presente escrito.

La manera como incorporan los contenidos matemáticos los docentes responde a diversos elementos, entre ellos destacan aquellos de orden epistemológicos, es decir, los relativos a la forma cómo él entiende cómo se debe enseñar, cómo se aprende y cual es la naturaleza del conocimiento que se enseña, en este caso el matemático.

Desde el punto de vista epistemológico existen diversas visiones acerca de la naturaleza de las matemáticas; lo que a su vez determina en gran parte la manera de incorporar los contenidos matemáticos en situaciones escolares (Parra, 2002; Azcárate, 1996; Ernest, 1989; Ruiz, 1987).

La matemática se puede entender de diversas formas. Si se concibe como un lenguaje los contenidos matemáticos escolares se centrarán en presentarles a los estudiantes un conjunto de reglas de sintaxis válidas universalmente. En consecuencia, la matemática como lenguaje tiene como función primordial ser aplicada en otras áreas del conocimiento, como la física, entre otras áreas del saber (Ruiz, 1987).

Si la matemática es concebida como un conjunto de axiomas estructurados de manera formal, se ubicaría en la llamada escuela logicista; ello supondría en el plano de las situaciones de aprendizaje, que el docente consideraría para la organización de los contenidos el orden lógico establecido por la comunidad académica de la matemática (Ruiz,1987) sin considerar en lo absoluto los diversos avances y retrocesos que todo saber matemático ha sufrido a lo largo de la historia, para finalmente conocerlo como hoy se nos presenta a través de los textos.

Por otra parte, si la matemática es concebida como un conjunto de ideas independientes del mundo – lo que se denomina como *platonismo matemático* (Ruiz,1987) - ésta sería concebida desde una perspectiva racionalista; por tanto la forma de organizar los contenidos en las situaciones de aprendizaje seguirían una metodología deductivista; lo que en realidad consistiría que el docente organizara su clase de manera que el alumno “descubra” de manera organizada – sin contratiempos como en el enfoque logicista – un conjunto de verdades absolutas.

Estas tres maneras de entender las matemáticas dominan entre las poblaciones parcialmente estudiadas por nosotros hasta el momento. Por los resultados hasta ahora obtenidos, tanto entre los estudiantes a optar por la Licenciatura en Educación en el área de Matemática y Física como en tres de sus profesores entrevistados, hemos hallado que entremezclan ideas acerca de la naturaleza de la matemática que pertenecen a las corrientes antes citadas. Igualmente, al momento de ver las planificaciones de las clases que plantean los estudiantes en sus Prácticas Profesionales, observamos entre ellos semejanzas notables a la hora de incorporar los contenidos matemáticos a las mismas. Todos ellos conciben sus clases con un gran propósito: mostrar un conjunto de reglas asociadas de manera coherente desde el punto de vista de la matemática y a su vez, presentar una serie de mecanismos que le permitan a sus alumnos desarrollar algunas destrezas básicas. En todos los casos tanto la historia de la matemática como los saberes matemáticos no formales presentes en nuestras sociedades están ausentes. Un ejemplo de ello es la ausencia en las situaciones de aprendizaje planteadas y ejecutadas acerca del uso de medidas no convencionales como la brazada, la cuarta, etc. De la misma manera podemos afirmar que el acervo cultural dejado por nuestros indígenas - caso de los mayas, por ejemplo – no es nunca incorporado.

Existen otros docentes – una minoría en nuestro estudio realizado hasta el momento y además, focalizados entre los estudiantes - que entienden la matemática como producto de una realidad concreta y de la experiencia. Ellos se ubican desde el punto de vista epistemológico en lo que se conoce como empirismo (Ruiz, 1987). Sus clases se podrían caracterizar como producto de la inducción y la generalización. Ellos manifiestan un fuerte interés por incorporar a sus clases un conjunto de contenidos matemáticos que le provean al alumno una aplicación práctica y para ellos, la realidad cercana a sus alumnos – esto es, la cotidianidad – es el punto de partida para encaminar a los alumnos hacia dicho propósito (Santos, 2001).

Ahora bien ¿Cuál creemos que debería ser la organización de los contenidos matemáticos escolares, para que estos respondan a las necesidades que la actual realidad exige y que a su vez, ofrezca un conjunto de saberes matemáticos acordes con lo que la comunidad académica matemática propone? Creemos que el conocimiento matemático escolar que se debe incorporar en las clases debe partir de la construcción que realiza el individuo en interacción con sus pares, incorporando de manera crítica y reflexiva los conocimientos matemáticos formales y no formales (conocimiento complejo y crítico). Esta manera de entender el conocimiento escolar implica incorporar dos elementos hasta ahora ausentes en los enfoques planteados, nos referimos a la consideración de conocimientos no formales matemáticos y a la historia de las matemáticas. El conocimiento matemático no formal es aquel que no es considerado relevante a nivel de la comunidad académica, pero igual son utilizados por el común de la gente en situaciones cotidianas. Casos como el de la sustracción en los naturales es emblemático; en el conocimiento formal la sustracción es la diferencia entre el minuendo y el sustraendo, sin embargo, cuando el común de la gente realiza las transacciones de compra y venta en la cotidianidad, nos encontramos que el mecanismo para la sustracción se realiza a través del complemento. Esto es, si se entrega un billete de 5.000 unidades monetarias cualquiera y el costo es de 3.800 unidades monetarias, tanto el vendedor como el comprador es muy probable que no halle la diferencia (si no posee calculadora) sino que calcule adicionando de manera progresiva las cantidades que faltan para completar las 5.000 unidades monetarias. A 3.800 le suma 200 para llegar a 4.000 y luego sabe que un billete de 1.000 unidades más completará la devolución requerida.

En cuanto a la historia de la matemática, consideramos que ésta contribuye a una formación reflexiva y crítica del saber matemático, a objeto de permitir a los alumnos descubrir la complejidad del pensamiento matemático. Se debe descubrir que la matemática ha sido producto de un conjunto de avances y retrocesos en búsqueda de nuevos conocimientos, y que estos no han sido producto de unos pocos genios. Advertimos sin embargo, que la historia de la matemática debería sobrepasar la característica de anecdótica que hasta el momento notamos en diversos textos escolares. La historia debe constituir un elemento que permita reconstruir el proceso que llevó a lo que hoy conocemos y no, una lista de hechos y personajes aislados que existen desvinculados de las vicisitudes que la historia muestra y enseña.

A manera de conclusión

Las reflexiones aquí descritas plantean que la incorporación de los contenidos matemáticos responde entre otros factores, a la manera como los docentes entienden la matemática y como esto se ve reflejado en la manera como entienden que debe ser su enseñanza y su aprendizaje.

En las clases de matemáticas por nosotros estudiadas, se percibe que la mayoría de los estudiantes de las Prácticas Profesionales como la de sus profesores universitarios, entremezclan la idea de una matemática como un lenguaje y asociada a ideas que se ubican en las escuelas logicistas y formalistas.

Sin embargo, pensamos que tales enfoques no responden a las exigencias de incorporar un contenido matemático de características compleja y crítica. A objeto de lograr esta característica del contenido matemático se hace necesario trabajar tres elementos claves en los procesos de formación de docentes de matemática: La historia de las matemáticas, los saberes matemáticos no formales y la epistemología de la matemática.

La incorporación de saberes matemáticos no formales y de la historia de la matemática, no sólo en los contenidos escolares a nivel de educación pre – universitaria, sino que se hace imprescindible abordar dichos aspectos durante el proceso de formación de los docentes en matemática. Al respecto en diversas instituciones de formación docente han incorporado cursos de historia de las matemáticas; sin embargo a nuestro entender esto se hace insuficiente. La incorporación de la historia de las matemáticas y de saberes no formales es una tarea que deberá estar presente a lo largo de todas y cada uno de los cursos de matemática y matemática educativa. Sólo de esta manera podremos lograr una matemática capaz de ofrecerle herramientas útiles para la vida, sino que además formará en nuestros estudiantes de cualquier nivel educativo un pensamiento crítico – reflexivo necesario para un mundo cada vez más complejos, inundado por la información y de cambios que ocurren a velocidades nunca antes vistas en la historia de la humanidad.

Bibliografía

AZCÁRATE, P. (1996) *Estudio de las concepciones disciplinares de futuros profesores de primaria en torno a las nociones de la aletoriedad y probabilidad*. Editorial COMARES. España.

ERNEST, P. (1989) The Knowledge belief and Attitudes of the Mathematics Teacher: a Model. *Journal for Teaching.* 15 (603 – 612)

GARCÍA, E. (1998) *Hacia una teoría alternativa sobre los contenidos escolares.* Editorial Síntesis. España.

GOETZ, J.P. & LeCompte, M.D. (1988) *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa.* Editorial Morata. España.

PARRA, S., H. (2002) *Cultura escolar matemática y transformación de la práctica pedagógica.* Tesis Doctoral. La Universidad del Zulia. Venezuela.

PELTIER. M. (1999) Representaciones de los profesores de escuela primaria sobre las matemáticas y su enseñanza. *Educación Matemática.*Vol. 11, No. 3 (5 – 24)

RAYMOND, A. (1997) Inconsistency Between a Beginning a Elementary School Teacher's Mathematics Beliefs and Teachimg Practice. *Journal for Research in Mathematics Education.* Vol. 28, No. 5 (550 – 576)

RUIZ Z., Angel (1987) Algunas implicaciones de la filosofía y la historia de las matemáticas en su enseñanza. *Educación.* Vol. 11, No. 1. 7 - 19

SANTOS, T., Luz Manuel (2001) ¿Qué piensan los maestros sobre la enseñanza relacionada con la resolución de problemas?. *Educación Matemática.* Vol. 13, No. 1 (31 – 50)

EL DISCURSO EN EL AULA Y LA CONSTRUCCIÓN DE SIGNIFICADOS A TRAVÉS DE LA EXPLICACIÓN, EN EL MARCO DE CLASES SOBRE LA VARIACIÓN

Evelia Reséndiz Balderas y Ricardo Cantoral Uriza
Universidad Autónoma de Tamaulipas / Cinvestav-IPN, México
erbalderas@uat.edu.mx

Resumen
Esta investigación centró la atención en el papel del discurso en la clase de matemáticas cuando se pretende enseñar conceptos y procesos matemáticos ligados a la noción de *variación*. Pues el discurso constituye el espacio donde se construyen, negocian e interpretan los significados en la interacción social que se realiza en la escuela, por lo tanto construir conocimiento en interacción requiere del lenguaje usado socialmente. Nos ocuparemos de analizar el papel de las explicaciones en la clase de matemáticas, primer semestre de ingeniería, cuando la noción de variación está siendo usada por los profesores y cuando los estudiantes intervienen a propósito de dicha noción, en clases donde se impartía los conceptos de función y derivada que son vistos como modelos para el estudio de la variación. Los registros y las transcripciones de las clases, que se audiograbaron, fueron analizadas considerando un modelo de investigación cualitativa.

Introducción

La comunicación continúa siendo un tema central en la reforma de la educación de las matemáticas (NCTM, 1998). Sin embargo existen todavía muchas preguntas que deben ser contestadas con relación con el discurso en el aula y acerca de los factores que contribuyen al desarrollo del discurso matemático. Las matemáticas generalmente se consideran como un cuerpo de conocimiento individual y socialmente construido y como lenguaje especializado para comunicar diversos aspectos de nuestro mundo (Pimm, 1991). Sin embargo, el nuevo conocimiento matemático (individual o compartido) se construye a través de interacciones y conversaciones entre profesores y sus alumnos. De ahí que el movimiento entre el sentido personal de un concepto y el significado matemático compartido es crucial para que el aprendizaje se lleve a cabo (Bartolini Bussi, 1998). El papel del profesor y los estudiantes en este movimiento ayuda a determinar que el aprendizaje ocurra. Esta consideración del proceso de enseñanza-aprendizaje enfatiza la importancia de las interacciones en el aula y el contenido matemático que se está discutiendo. Aquí nos ocupamos del contenido matemático o del significado compartido de conceptos que se van configurando en el desarrollo de las discusiones.

Por otro lado, algunas investigaciones en el campo de la matemática educativa (García, 1998; Zubieta, 1996; Cantoral, 1992; Pulido, 1998; o Artigue, 1991 reportan la existencia de robustas dificultades entre los estudiantes para tratar con cuestiones que exigen algún tipo de estrategia variacional. Con nuestro estudio no pretendemos "remediar" ese estado de cosas, ni mucho menos. Tampoco pretendemos decir como se debe enseñar la noción de variación, o si un profesor enseña bien en el aula. Nos proponemos algo aún más modesto, más particular. Lo que intentamos es la comprensión del complejo y rico entramado de pautas de interacción, que se dan para producir conocimiento entre docentes y alumnos, consideramos que es necesario como punto de partida para cualquier propuesta que pretenda mejorar la enseñanza del cálculo en su contexto real. En este trabajo nos hemos propuesto estudiar la interacción discursiva en el aula desde la perspectiva del profesor; aunque se tiene como principal propósito la forma en la que participa el docente, es necesario aclarar que no es posible analizar la perspectiva del docente sin considerar a los alumnos, ya que ambos actúan como referentes de sus contribuciones y el significado de éstas dependen del contexto interactivo (Reséndiz, 2003). Pretendemos construir una respuesta, parcial, que centre su atención en algunos de los fenómenos de enseñanza específicamente involucrados con las dificultades del aprendizaje en clases acerca de la variación.

El problema de investigación

En el marco de comprender las tramas de relaciones entre el profesor, los alumnos y el contenido curricular y, dado que hemos considerado al profesor como el portador del saber que habrá de escenificarse en el aula, emprendimos un amplio estudio sobre las formas en que los profesores desarrollan un conocimiento específico sobre la manera de enseñar su materia cuando se precisa tratar una idea matemática fundamental para el cálculo, una noción compleja conocida como variación. El objetivo principal de esa investigación es *localizar y analizar las maneras en que se introduce y desarrolla la noción de variación en situación de enseñanza en el nivel superior.*

Una forma de abordar el estudio sobre la enseñanza de la variación es por medio del discurso en el aula. Es en el aula en donde la palabra se utiliza la mayor parte del tiempo. La comunicación y, específicamente, la interacción entre el docente y el alumno y alumno-alumno, se considera en la actualidad la base de proceso de aprendizaje (Tusón & Unamuno, 1999). El problema de investigación que se reporta en este artículo se delimitó por medio de la siguiente pregunta: ¿Qué procesos de interacción propician los docentes, tendientes a la construcción de significados en el aula, a propósito de la enseñanza de nociones de variación? Para intentar responder a esta cuestión es necesario desarrollar perspectivas teóricas que sean útiles para interpretar y analizar la complejidad de las clases de matemáticas.

Participantes y escenario

Para el desarrollo de este estudio se ha considerado de fundamental importancia, tomar en cuenta a los *profesores* que son los portadores del saber que habrá de escenificarse en el aula. Los participantes en la investigación fueron tres profesores que impartían la asignatura de Matemáticas I, del Tecnológico de Estudios Superiores de Ecatepec. Los profesores fueron seleccionados aleatoriamente entre los que impartían la materia. Se platicó con cada uno de los profesores y se les dijo que deseábamos observar y registrar la manera como ellos enseñaban los conceptos de función y derivada y estuvieron de acuerdo. Las observaciones se realizaron por un periodo largo, solamente en las clases donde se impartía los conceptos de función y derivada, ya que son vistos como modelo para el estudio de la variación. Ellos son profesores de las diferentes carreras de ingenierías. La información se recabó por medio de las observaciones de sus actividades en el aula, en condiciones "normales". La información recopilada consistía de cintas auditivas de las discusiones que se realizaron en el aula durante el semestre, así como notas de campo (registro de la observación) para complementar las cintas de audio. Esto permitió contar con una fuente de datos que nos facilitó para obtener información que ilustró lo que sucede en condiciones "normales" en el salón de clase, lograr un acercamiento con los profesores y con el grupo, pero sin provocar modificaciones importantes en las formas cotidianas de trabajo y de relación. Esto nos permitió tener registros reales y obtener información de lo que sucede en la interacción social, esto es, en el proceso educativo donde participan los profesores y los alumnos. Contar con elementos de interpretación de los acontecimientos "desde la perspectiva" de los sujetos bajo estudio.

Aspectos teóricos y metodológicos

Para realizar la investigación nos apoyamos en nociones de la didáctica fundamental, a saber, la transposición didáctica, las situaciones didácticas un fenómeno ligado al control de la transposición didáctica, el “envejecimiento de las situaciones de enseñanza”[13], en el cual, los patrones de interacción se refieren a las relaciones entre el profesor, los alumnos y las propias situaciones. Se ha podido dar cuenta de un fenómeno relacionado a éste último: al interior del aula, en la interacción, se modifican las intervenciones de la enseñanza del profesor, reaccionando de modo plástico con las interacciones del estudiantado. Asimismo se constata como, cuando hay interacciones cambian las relaciones de poder y las secuencias de enseñanza. En nuestro caso particular estamos estudiando un fenómeno didáctico en el campo de la matemática universitaria usando la aproximación sistémica que brinda la didáctica de la matemática como disciplina científica. Reflexionamos sobre lo educativo desde una perspectiva en la que la triada, saber, profesor, alumno, desempeña el papel de unidad de estudio. Sin embargo aunque podemos explicar las interacciones entre los polos, saber, profesor, alumno, con base en las nociones, contrato, situación o transposición, quisimos profundizar en el papel del discurso en el aula. Razón por la que incorporamos elementos de los estudios cualitativos de corte etnográfico. Los análisis y la discusión del trabajo, ha implicado interpretaciones y análisis en direcciones específicas. De los datos recolectados se han producido diversas formas de reducción y las perspectivas pueden conducir a la formulación de explicaciones o conclusiones que pasan por un proceso de verificación y que puede obligar a realizar nuevas organizaciones de los datos y así se regresa nuevamente al proceso de reducción de datos y así sucesivamente. Este proceso concluye cuando se han formulado interpretaciones sólidamente fundamentadas en los datos. Tomando al discurso como medio para estudiar las prácticas sociales, en esta investigación nos interesa analizar los elementos y características de una sesión de clase y los recursos discursivos, o elementos discursivas de los profesores para enseñar una noción compleja, como la noción de variación, sin dejar de lado la participación de los estudiantes. A continuación presentamos un ejemplo de la construcción de

[13] Se observa en los docentes dos conductas características: por una parte, si los alumnos fracasan el docente tiende a proveer una “nueva oportunidad” (plantea un problema “igual al viejo”) y en consecuencia, la solución se obtiene por la repetición y no por la comprensión. Por otra parte, el docente debe estar consciente que el proceso didáctico sufre también de “envejecimiento” que se observa en la repetición de los mismos procedimientos didácticos y que éstos no tienen el mismo efecto. Brousseau (1991) observa que en aquellos procesos donde el docente interviene menos hay menor fracaso y “menos envejecimiento”.

significados a través de la explicación, en el marco de clases en que se impartía los conceptos de función y derivada.

La construcción de significados. La explicación en la interacción

Uno de los objetivos del docente es hacer comprender a los estudiantes los conocimientos matemáticos o los saberes que él enseña (Mopondi, 1995). Entre los esfuerzos que el profesor emprende figuran las *"explicaciones"*. Nos interesan las diversas formas que toman sus explicaciones al enseñar una noción como la variación y sus efectos sobre las producciones de los estudiantes. La construcción de significados, de explicaciones, como objeto de análisis, dado su carácter interactivo, demanda que las unidades mínimas de análisis sean secuencias de interacción y no frases o mensajes descontextualizados (Candela, 1999). Así el problema planteado condiciona las características de las unidades de análisis; siendo el objeto de estudio la construcción de los recursos discursivos y los significados sobre la variación. Una unidad de análisis natural es la clase completa en la que se delimita y trabaja el contenido de un tema curricular dentro de la jornada escolar. Las secuencias discursivas seleccionadas son aquellas donde se pueda identificar las actividades y las explicaciones de los profesores frente al contenido donde aparece la noción de variación. Los extractos forman parte de las clases o sesiones de un primer semestre de ingeniería.

La construcción de significados a través de la explicación: la variación

En este diálogo se presentan las siguientes secuencias de turnos en donde el docente elige un ejercicio de una lista de ejercicios que consiste en graficar la función y=$\sqrt[3]{x}$ y esta misma pero afectada por parámetros, suma, resta, multiplicación, etc. El docente solicita que pase un alumno a realizar el ejercicio y, de entrada, grafica la función y=$\sqrt[3]{x}$ para que sirva de base al alumno que va a pasar al pizarrón; le pide al resto del grupo que vayan haciendo el problema en la medida que lo hace el alumno que está al frente.

Extracto 5.49

P: ... quién lo quiera hacer, 48, quién hace el 48
Am: (...)
P: Alguien que pase
Am: (...)
P: Más o menos está, esa es la gráfica de $y=\sqrt[3]{x}$ entonces aquí hay, éste, a ver chéquenle y vayan haciendo el problema en la medida en que lo hace su compañero
Am: Aquí vemos que la vamos a recorrer a la izquierda
P: A la izquierda ¿sí?, a ver su compañero la está haciendo
Am: A la derecha
As: Hacia abajo
P: Ya nada más la $\sqrt[3]{x}$ -1, podría ser a la izquierda o a la derecha pero como tiene signo negativo a la izquierda ¿no?
As: ¡No! hacia abajo
Af: Hacia abajo
P: Bueno, a lo mejor pensemos así, pensemos en puntos a ver si nos podía ayudar, pensemos en puntos para esta *x*, para esta *x* pues esta *y* ¿verdad? y el valor de *y* está dado por este. Ahora qué

le vamos a hacer a la función nueva, el *y* que teníamos hace rato para la *x* qué es lo que le vamos a hacer
As: Restarle
P: Restarle una unidad, entonces así por ejemplo, en 1 ¿cuánto vale la original?
Am: 1
P: Vale 1, y entonces si a esta le voy a restar 1 en dónde va a quedar este punto, va a quedar en dónde
As: (...)
P: Aquí a cada punto le voy a restar una unidad o sea cada punto se va a desplazar una unidad hacia dónde
As: Hacia abajo

La siguiente función para graficar es y=$\sqrt[3]{x}-1$, surge entonces la respuesta de un alumno: *"aquí vemos que la va a recorrer a la izquierda"*. El profesor duda de la respuesta y sugiere ver lo que está haciendo el alumno que está al frente. Otro alumno dice: *"a la derecha"*; y después de haber escuchado algunas respuestas la mayoría responde: *"Hacia abajo"*. El profesor no está convencido con la respuesta, ya que él piensa que la función con la que se está trabajando es $y=\sqrt[3]{x-1}$, en vez de y=$\sqrt[3]{x}-1$, el dice: *"podría ser a la izquierda o a la derecha, pero como tiene signo negativo a la izquierda ¿no?"*. Nuevamente la opinión de la mayoría rechaza la explicación del docente y dan un rotundo: *¡No, hacia abajo!"* y una alumna dice también: *"hacia abajo"*, reafirmando la opinión de todo el grupo. En las explicaciones aparece la idea de mover un punto de referencia como el origen y esto ha resultado de gran importancia para construir o elaborar estas explicaciones en torno al movimiento de la gráfica. En este ejemplo se observa que la noción de variación es en relación a un punto de referencia que se mueve, en este caso es el origen. El lugar que tiene el docente en el aula como experto y conocedor de los contenidos escolares no lo excluye de que tenga que argumentar sus puntos de vista e intentar convencer a los alumnos. Una explicación no parece ser siempre aceptada por el solo hecho de que lo plantee el profesor. Estas opiniones han propiciado que el docente *modifique* su explicación, su situación de enseñanza ya que ésta no le funciona, esto se da cuando la clase, la lección comprende más interacciones entre el docente y los alumnos, reconfigurándose plásticamente el dominio de las interacciones y por ende la secuencia prescrita del docente.
En este extracto los alumnos discuten y dan sus puntos de vista ya que el profesor está confundido, todavía no se da cuenta del error, dice que hay que dar algunos puntos, pensar en puntos para ver si eso puede ayudar. Nuevamente recurre a la original y=$\sqrt[3]{x}$, es una estrategia para iniciar nuevamente la explicación (modifica la situación de enseñanza), a través de lo que él llama la original y dice que le vamos hacer a la nueva y contesta el grupo: *"restarle"*. Pregunta el docente que cuanto vale la original en 1, y un alumno responde que 1. Entonces el profesor dice si: *"vale 1, entonces si le voy a restar 1* (nueva función, y=$\sqrt[3]{x}-1$), en dónde va a quedar ese punto (se refiere al origen). El docente intenta llegar a una conclusión, a un acuerdo: *"Aquí a cada punto le voy a restar una unidad o sea cada punto se va a desplazar una unidad hacia dónde"*. La mayoría responde: *"¡hacia abajo!"*.
Enseguida veremos la función raíz cúbica $y=\sqrt[3]{x-1}$, ahora el –1 está dentro de la raíz y en el ejercicio anterior estaba fuera de la raíz el –1.

P: Ahora la siguiente va a ser $y=\sqrt[3]{x-1}$, no es f(x)
Af: ¡ah!
P: Ahora si vamos a recorrer ¿hacia dónde?
Af: A la derecha
P: ¿cuántas unidades?
Af: 1
P: Entonces quiere decir que ahora este punto lo vamos a encontrar hacia la derecha, (...) vayan resolviendo, ahorita es muy fácil pero a la hora del examen (...) y aquí me dicen, es muy fácil ponme más. Esa es la gráfica de $y=\sqrt[3]{x}$ o sea qué sucedió se desplazó hacia la
Am: Hacia la derecha

Ante la equivocación del ejemplo pasado, el docente: *"Ahora sí vamos a recorrer "¿hacia dónde?"* e inmediatamente le responde una alumna: *"a la derecha"*. Como ya se discutió, ha resultado rápida la graficación. El 1 mueve la gráfica a la derecha, esto es, se mueve el origen que es el punto de referencia (variación de un punto de referencia). Volvemos a encontrar aquí que la pregunta del docente: *"¿hacia dónde?"*, lleva a cabo la función de propiciar explicaciones.
Los múltiples ejemplos de las discusiones en las aulas durante el transcurso del semestre pueden ilustrar mejor el desarrollo de las discusiones. Con poco espacio en este documento, presentamos sólo un ejemplo, el anterior, y empezar a notar como se negocian los conocimientos. Se describe una serie de versiones alternativas que, aún reconociendo la posibilidad de errores, son parte de un proceso de aproximación a la respuesta correcta.

Discusión

Se observó que los profesores con frecuencia promueven la producción de explicaciones al demandar que los alumnos expliquen o justifiquen sus puntos de vista. Los docentes también aportan explicaciones para apoyar una versión o para rechazar otras. Sin embargo, los alumnos proporcionan sus puntos de vista cuando es solicitado por el profesor, pero también defienden sus versiones, cuando el profesor explica y los alumnos no comparten la versión. La riqueza de la construcción de significados en la interacción, más que un proceso que parte de la diversidad de opiniones termina como un proceso donde se negocian y articulan significados, pero también se abren alternativas explicativas, se plantean debates y explicaciones que casi siempre llegan a una conclusión. Los docentes crean un escenario que propicia la participación de los alumnos, en algunos casos a través de la pregunta, de la explicación o un comentario y esto tiene un efecto sobre la dinámica de la interacción discursiva en el aula ya que, en algunas situaciones, el docente modifica su discurso, cuando hay mucha interacción con los alumnos y una explicación o una secuencia didáctica no le funciona, reconfigurando el dinamismo de la interacción.

Bibliografía

Artigue, M. (1991). Análisis. In D. Tall (De.). *Advanced Mathematical Thinking.* (Capítulo 11, pp.167-198). Mathematics Education Library. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
Bartolini Bussi, M.G. (1998). Verbal interaction in the mathematics classrom: A Vygotskian análisis. Ln H. Steinbring, M. G. Bartolini Bussi & A.- Sierpinska (Eds.), *Languaje and communication in the mathematics classromm* (pp. 65-84). Reston, VA: NCTM.

Brosseau, G. (1991) Fondements et Methodes le Didactique de Mathematiques. Rechercher en Didactique de Mathematiques. Grenoble. *La Pensée Savage*. Vol 7. N? 2. (Mimeografiado).

Candela, A. (1999). *Ciencia en el aula. Los alumnos entre la argumentación y el consenso.* Paidós Educador.

Cantoral, R. (1992). *Acerca de la intuición del rigor: Notas para una reflexión didáctica.* Publicaciones Centroamericanas 6(1): 24-29.

Edwards, D. & Mercer, N. (1987). *El conocimiento compartido: El desarrollo de la comprensión en el aula.* Barcelona; Paídos.

García, M. (1998). *Un estudio sobre la articulación del discurso matemático escolar y sus efectos en el aprendizaje del cálculo.* Tesis de Maestría. Cinvestav -IPN: Depto. De Matemática Educativa.

Mopondi, B. (1995). Les explications en classe de mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques,* vol.15/3, 7-52.

National Council of Teachers of Mathematics. (1998). *Principles and standars for school mathematics: Discussion draf. Reston,* VA:NCTM.

Pimm, D. (1991). *El lenguaje matemático en el aula.* Ministerio de educación y ciencia, Ediciones Morata, S. A., España.

Pulido, R. (1998*). Un estudio teórico de la articulación del saber matemático en el discurso escolar: la transposición didáctica del diferencial en la física y la matemática escolar.* Tesis Doctoral, Cinvestav-IPN: Depto. de Matemática Educativa.

Reséndiz, E. (2003). El papel de la variación en las explicaciones de los profesores. Un estudio en situación escolar. Memoria doctoral. Cinvestav-IPN: Depto. de Matemática Educativa.

Tusón, A. & Unamuno, V., (1999). *¿De qué estamos hablando? El malentendido en el discurso escolar*. Revista Iberoamericana de Discurso y Sociedad. Editorial Gedisa, España, Vol.1, núm. 1.

EL RECHAZO HACIA LAS MATEMÁTICAS. UNA PRIMERA APROXIMACIÓN

Miguel Ángel Miguez Escorcia
Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, México
migueze@uaeh.reduaeh.mx; mmiguez01@hotmail.com

Resumen
Nuestra sociedad, por una parte, otorga un alto valor a las matemáticas, considera su aprendizaje como parámetro de éxito y, por otra, existe rechazo hacia la matemática por parte de los miembros de esa sociedad. Además se dice que la formación de los profesores de Matemáticas no es la idónea, en virtud de que desconocen técnicas didácticas específicas para su enseñanza, que su práctica la realizan con pobres conocimientos de Matemáticas, por lo que no pueden promover el verdadero aprendizaje de esta disciplina. Las presiones intrainstitucionales e interinstitucionales que "obligan" a distribuir las calificaciones de las materias "duras", son algunos de los elementos que de diversas formas interactúan produciendo una gama muy amplia de actitudes de los profesores y de los estudiantes hacia las matemáticas, su enseñanza y su aprendizaje, que en muchos de los casos se constituyen como un obstáculo insuperable y se ve reflejado en el fracaso escolar. En el presente artículo se hace una primera reflexión del panorama en el que se inscribe el problema. A juzgar por los datos obtenidos afecta no sólo México sino a un número importante de países, destacando para este caso la situación del estado de Hidalgo. Se reconoce la existencia del problema, se aspira a aportar con elementos que favorezcan su comprensión y, mejor aún, su solución. Como primera aproximación a un objeto de estudio en el marco de este problema, se plantea la problemática social, cultural y educativa que conlleva y que va más allá del rendimiento de los alumnos en términos de las calificaciones que obtienen en los cursos obligatorios, en el transcurso de su vida escolar. Se asume la importancia que, en la cultura matemática tienen la promoción de actitudes hacia las matemáticas, su enseñanza y su aprendizaje, a partir de las prácticas educativas, de la formación y de la actualización de los docentes del nivel primaria. Se conjetura en esta etapa inicial, que los docentes de los primeros años de educación primaria en su práctica educativa, reproducen su falta de una sólida formación en matemáticas, promueven la incorporación en los alumnos de seudo conceptos, que al interactuar con las actitudes de los padres de familia hacia las matemáticas, pueden promover un efecto perverso, dando origen a un desmontaje cognitivo.

El rechazo hacia las matemáticas: una primera aproximación

Desde el sentido común, culpando en gran medida a los niveles educativos anteriores, se sostiene que el rechazo hacia las matemáticas ya es evidente en el tercer año de primaria. Añadimos su enseñanza y su aprendizaje. Ocurre que, desde esta calificación del fenómeno, se obstruyen entendimientos sobre la problemática que conlleva. En este sentido interesa generar conceptos y categorías que rebasen al sentido común y los datos cuantitativos basados en exámenes, y, que den cuenta cuidadosa y ordenada no sólo de los procesos de transmisión y/o construcción de las matemáticas en la escuela, sino también de las actitudes que se involucran y se promueven.

Las personas manifiestan diferentes actitudes hacia las matemáticas, conforme a sus experiencias. Por una parte, hay quienes la relacionan con una fuerte sensación de fracaso y presentan hacia ella una mezcla de respeto y aversión. Otras personas, sin embargo, han tenido vivencias atractivas y gratificantes, lo que ha favorecido en ellas una actitud positiva hacia ésta materia. Aunque en el currículum escolar las matemáticas son tratadas como una asignatura más, existe una gran presión por parte de todos los sectores implicados en la vida escolar (profesores, padres, etc.) para que los niños destaquen en ellas. La importancia que se les da a las matemáticas ha hecho que cuando un alumno fracasa u obtiene bajas calificaciones se exprese un mayor malestar por parte de los profesores y padres. La opinión de que existe una relación directa entre el éxito en matemáticas y la inteligencia, es en buena medida responsable de éstas expresiones.

Una razón que induce al estudio del proceso de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas deriva de la importancia social que se le da a esta asignatura, para Chamoso (2001: 35) "es quizá la materia más prestigiada socialmente y a la que se atribuye cierto valor predictivo sobre las capacidades del propio individuo". Parece muy extendido el mito de las matemáticas, según el cual los niveles de inteligencia, el triunfo social e incluso las expectativas del futuro bienestar están en relación directa con las buenas calificaciones en esta área.

Cada quien tiene su experiencia estudiantil con las matemáticas, y de acuerdo con estudios realizados en diferentes países como los publicados por Malén Aznárez (1997), Dienes (1964), André Antibi (1998), Cadoche (2000), no siempre es agradable. La situación se complica si tomamos en cuenta que las matemáticas forman, junto con el español, la columna vertebral de la enseñanza.

Las matemáticas desempeñan un papel fundamental tanto en el plano científico como en el educativo, aunque, por supuesto, es difícil separarlos. Sin duda, en el plano científico y tecnológico, las matemáticas son fundamentales, sin embargo el aprendizaje es árido para muchas personas.

"La otra vertiente de las matemáticas es la enorme responsabilidad que tiene por la preferencia que se le está dando en los planes de estudio. Debido a que los objetos matemáticos están libres de valor, el enfrentamiento con ellos es meramente lógico. Ninguna otra materia entrena tanto el pensamiento ordenado y sistemático como las matemáticas. En ninguna otra materia es tan pequeña la cantidad de conocimientos que hay que memorizar; en las matemáticas el aprendizaje consiste en entender y no en memorizar. Por ello tienen, para bien o para mal, un alto valor selectivo entre los estudiantes." (De la Peña, 2002:10)

Por ambos motivos, la importancia de esta disciplina para otras ciencias y su papel central en educación, las matemáticas (al menos las más elementales) debería formar parte de la cultura, pero la realidad, es otra.

En nuestro entorno hallamos personas que nunca han ido a la escuela y realizan muy bien tareas como vender en mercados y averiguar los precios de varias cantidades, confeccionar prendas de vestir, etc. Pero también es frecuente encontrar niños que terminan la educación primaria sin saber interpretar sencillos gráficos, utilizar correctamente el dinero cuando compran, o resolver una simple situación matemática de la vida real.

Para la teoría cognitiva aprender no es sólo acumulación de datos (Ausubel, 1983; Baquero, 1997; Vigotsky, 1973 y 1979). Los niños no son recipientes pasivos de conocimientos, que lo que aprenden en la práctica de forma intuitiva o en situaciones de aprendizaje que se plantean en el aula, reinterpretan, reestructuran y lo asimilan formando parte de su propio esqueleto mental. La esencia del conocimiento es la estructura, es decir, elementos de información conectados por relaciones que forman un todo organizado y significativo; por lo tanto, la naturaleza de la adquisición del conocimiento estriba en aprender relaciones generales. Hay investigaciones (Resnick, 1987; Goldin-Meadow, 1993, 1999 y 2003) que sugieren que los niños inventan una gran parte de sus propias matemáticas y que vienen a la escuela con un buen y desarrollado sistema matemático informal, de tal forma que en las situaciones de enseñanza y de aprendizaje que se plantean en el aula, pueden ser aprovechados aquellos conocimientos previos, enriqueciéndolos con nuevas experiencias e informaciones, y proceder a su reelaboración.

Si la función social que atribuimos a la enseñanza es la de desarrollar integralmente al alumno, entonces la mejor enseñanza de las matemáticas es aquella que es participativa. Esta forma de actuar podría permitirles la construcción y la comprensión de las matemáticas para desarrollar pautas de pensamiento más complejas. La enseñanza y aprendizaje de las matemáticas requiere partir de tareas programadas intencionalmente para movilizar los conocimientos previos y poner en juego determinadas relaciones, procediendo posteriormente a la reflexión.

De acuerdo a los informes (2002) del Departamento de Orientación Educativa de la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo (UAEH), una parte importante de los alumnos que ingresan a la licenciatura la eligen considerando la poca o ninguna presencia de las matemáticas en los planes de estudio. Sin embargo, quienes optan por licenciaturas que incluyen cursos ya sea de matemáticas o de disciplinas estrechamente relacionadas con ellas, no necesariamente cuentan con los conocimientos básicos que les permitan y posibiliten aprenderlas y aplicarlas, como lo muestra un estudio realizado por Profesores Investigadores del Área Académica de Matemáticas de la misma universidad, en el que se aplicó un examen diagnóstico a los alumnos de primer semestre de licenciatura, los resultados se encuentran en la siguiente tabla:

Licenciatura	Fecha de aplicación	Número de alumnos	
		que presentó el examen	Aprobados
Sistemas Computacionales	22 de enero del 2000	159	8 (1)
Sistemas Computacionales	2 de julio del 2000	154	5 (2)
Sistemas Computacionales	26 de enero del 2001	107	0 (2)
Comercio Exterior	26 de enero del 2001	60	10 (2)
Minero-metalúrgico	26 de enero del 2001	20	1 (2)
Economía	26 de enero del 2001	50	6 (2)
Total		550	30

Fuente: Acosta Hernández Juan Alberto, “Resultados de evaluaciones diagnósticas” Ms. Pachuca de Soto, Hgo. 2001; y Hernández Genis Román (B) “Resultados de evaluaciones diagnosticas” Ms. Pachuca de Soto, Hgo. 2001

(1) Con calificación de 6 o más; (2) Con calificación de 7 o más

Resulta fácil documentar los problemas que las clases de matemáticas representan para los estudiantes mexicanos y sin duda, con base en el reporte PISA 2000, de otros países del mundo. En su artículo "México: ¿un país de reprobados?", publicado en la revista NEXOS No. 162 en junio de 1991, Gilberto Guevara Niebla reportó un examen practicado a nivel nacional entre niños de escuelas primarias y secundarias.

En primaria se aplicó a 3248 niños de sexto año que obtuvieron en una escala de cero a diez, una calificación promedio en español de 5.23 y en matemáticas de 4.39, ésta fue la calificación más baja entre las materias examinadas. En secundarias se aplicó a 4753 estudiantes de tercer año y se obtuvo un promedio de 5.0 en español y 3.47 en matemáticas. De la Peña (2002) afirma que en el bachillerato, en 1998, la mitad de las materias reprobadas por estudiantes del colegio de ciencias y humanidades de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) fueron materias de matemáticas. En el nivel superior la matrícula de las carreras de matemáticas y otras carreras científicas se mantiene muy baja como resultado natural de los desastres en niveles previos.

La actitud negativa hacia matemáticas, no es un problema privativo del sistema educativo mexicano, la investigadora española Malén Aznárez (1997) califica las Matemáticas como "la materia que ha sido para generaciones de españoles, y aún lo es para muchos, el coco y pesadilla de sus años de estudiante. Una pesadilla irremediable porque los niños aprenden desde bien pequeños que la primera nota por la que se interesan sus padres es por la de matemáticas".

Es común escuchar que Matemáticas es la disciplina que resulta más difícil a los estudiantes.

> "Actualmente son muy pocos los profesores de matemáticas, cualquiera que sea el nivel en que trabajan, que se encuentren satisfechos del modo en que transcurre su enseñanza. Efectivamente, son muchos los niños que sienten antipatía por las matemáticas –antipatía que aumenta con la edad- y muchos los que encuentran dificultades casi insuperables en las cuestiones más sencillas. Hay que reconocer que la mayor parte de los niños nunca llegan a comprender la significación real de los conceptos matemáticos. En el mejor de los casos, se convierten en consumados técnicos en el arte de manejar complicados conjuntos de símbolos, pero la mayor parte de las veces acaban por desistir de comprender las imposibles situaciones en que las exigencias de las matemáticas escolares de hoy les colocan. La actitud más corriente consiste, simplemente, en esforzarse en aprobar un examen, tras lo cual nadie dedica a las matemáticas ni un pensamiento más. Con muy pocas excepciones, esta situación se puede considerar lo bastante general como para llamarse normal". (Dienes, 1964, citado por Alcalá, 1996: 123)

A más de tres décadas las palabras de Dienes, tienen una actualidad impresionante, sobre todo si subrayamos su acotación final, debido a que de ninguna manera se pretende apoyar una posición totalmente pesimista, en el sentido de que los estudiantes prefieren aprobar las materias en lugar de aprenderlas. Es ese carácter dual el que se intenta hacer explícito, porque por una parte tal parece que las matemáticas ocupan un lugar especialmente importante entre las materias del sistema educativo de cualquier país, ya que su contenido permite mantener una parte de la sociedad, capaz de servir a la tecnología, la industria, la ciencia, sin embargo, aunque el acceso a esos ámbitos no sea igual para todos por diversas razones. La mera aprobación en lugar del aprendizaje, se agudiza aún más en las asignaturas de matemáticas, donde, desde el sentido común son definidas como tradicionales y memorísticas.

Si el alumno no logró los propósitos de egreso del nivel anterior esto ocasionará poca o nula comprensión de los nuevos conocimientos, y por lo tanto generará un bagaje matemático pobre que influirá negativamente en el resto de su desempeño escolar, provocando decisiones erróneas. Existen evidencias de que un importante número de alumnos deciden la carrera profesional que habrán de estudiar en función de su rechazo a la matemática.

Hablar del rechazo hacia el aprendizaje de las matemáticas, sin duda implica discutir sobre las creencias, las actitudes y las aptitudes que las personas presentan hacia las matemáticas, su enseñanza, su aprendizaje y su aplicación dentro y fuera del contexto escolar. Lo que puede situarse al menos en dos momentos: durante el tiempo que son estudiantes matriculados en una institución educativa y en la necesidad de aprenderlas y utilizarlas el resto de su vida.

El papel del docente como organizador, coordinador y mediador del trabajo escolar es incuestionable, ellos son también protagonistas en todo proceso de enseñanza-aprendizaje, quienes con sus actitudes y actividades otorgan sentido a la labor del docente. Cuando observamos una clase tratamos de analizar lo que en ella sucede, tenemos ante nosotros un recorte abstracto de la realidad, que promueve procesos entre sus integrantes, que de funcionar adecuadamente, origina aprendizajes que potencian el desarrollo de los participantes, con base en la influencia que el entorno tiene en la formación de las personas, y es precisamente este entorno quien provee de los elementos que no solo permiten, también posibilitan la intersubjetividad y posteriormente la intrasubjetividad –en el sentido que otorga Vigotsky (1973 y 1979) a los términos-. Ese recorte de la realidad funciona como una totalidad organizada en la cual confluyen procesos heterogéneos y no puede por tanto ser reducido a la simple suma de procesos, situaciones o fenómenos del dominio de una disciplina.

Luego entonces, el estudiar las actitudes que sobre las matemáticas y su proceso de aprendizaje-enseñanza tienen los profesores, debe realizarse conjuntamente con el adecuado estudio de las actitudes de los estudiantes en un contexto específico, en el cual los padres son un elemento muy importante por su labor socializadora, (Berger y Luckmann 1978). En virtud de que un sistema social complejo debe ser estudiado como una totalidad.

Si bien este es un problema que afecta a un gran número de países, el caso de México es en especial grave, a juzgar por los resultados obtenidos por PISA 2000[14], así como los resultados del estudio de Guevara Niebla, al que se hizo referencia anteriormente. Estos estudios, permiten afirmar que una cantidad importante de estudiantes (en el estudio de Guevara Niebla, en la primaria y en la secundaria, y en el PISA 2000 sólo en secundaria) han acreditado los cursos de matemáticas sin lograr aprenderlas. Además existen estudiantes que creen contar con los conocimientos y las habilidades para continuar estudios de licenciatura, en los que deberán utilizarlos para tener éxito, cuando menos en el estado de Hidalgo, los resultados obtenidos muestran que no es así.

Es necesario realizar investigación que más allá de que los estudiantes acrediten o no acrediten los cursos de matemáticas, de cuenta de las relaciones que se originan entre las actitudes que sobre matemáticas, su enseñanza y su aprendizaje tienen los alumnos y los profesores de primaria, sin soslayar la importancia que en ello tienen los padres de esos alumnos. Con la finalidad de acotar el objeto de investigación que nos ocupa, será necesario conceptuar lo que implica hablar de actitudes hacia la matemática, que sin duda involucran la formación y actualización de los docentes, las prácticas educativas utilizadas por ellos. Las actitudes suelen considerarse como

[14] Programa Internacional de evaluación de Estudiantes (PISA, por sus siglas en inglés), específicamente el capítulo 3 de los resultados publicados por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE), editado por Santillana.

predisposiciones aprendidas que ejercen una influencia y que consisten en la respuesta hacia determinados objetos, personas o grupos. Las actitudes son normalmente consideradas como productos de la socialización y, por tanto, como algo modificable. Debido a que la conducta de una persona hacia los demás suele estar asociada a las actitudes que mantiene con ellos, la investigación sobre cómo se forman, se organizan en la mente y se modifican las actitudes ha sido un tema de enorme importancia. Para María Luisa Martín (1996: 112) "La actitud es un constructo hipotético, es una propiedad de la persona individual, implica tanto un componente afectivo como la tendencia a la acción. Las actitudes se pueden definir como *tendencias o disposiciones adquiridas y relativamente duraderas a evaluar de un modo determinado un objeto, persona, suceso o situación y a actuar en consonancia con dicha evaluación*." Para poder dar cuenta de las actitudes que los profesores y los alumnos tienen hacia las matemáticas, su enseñanza y su aprendizaje, es necesario hacer una revisión de los procesos en los que interactúan docentes, alumnos y padres de familia.

A modo de sumario

¿Cuál es el sentido de un proyecto de investigación como éste? Con base en los resultados obtenidos en diferentes estudios, y desde el sentido común se habla del fracaso escolar. Fracaso que sin duda es más crítico en matemáticas y las disciplinas que tienen una relación directa con ellas. También desde el sentido común, culpando en gran medida a los niveles educativos anteriores, se menciona que el rechazo hacia las matemáticas ya es evidente en el tercer año de primaria, yo me atrevo a incluir a su enseñanza y su aprendizaje. Ocurre, inclusive, que al suponer que se conoce al fenómeno, porque ya se ha calificado, se obstruye la problemática que conlleva. En este sentido interesa generar conceptos y categorías que rebasen al sentido común y los datos cuantitativos basados en exámenes, y que den cuenta cuidadosa y ordenada no sólo de los procesos de transmisión y/o construcción de las matemáticas en la escuela, sino también de las actitudes que se involucran y se promueven. El interés de este proyecto de investigación es rebasar el carácter didáctico, ya que no pretende orientarse con inmediatez a la búsqueda de mejores formas de enseñanza, sino a dar cuenta de la necesidad de promover una verdadera cultura matemática, por lo que el primer paso para intervenir exitosamente sobre la realidad es conocerla con profundidad.

Bibliografía

Alatorre, S. et. al. (2002) Aspectos Sociales del Efecto Remanente de las Matemáticas Escolares en De la Peña, José. (2002) *Algunos Problemas de la Educación en Matemáticas en México. México: Siglo XXI, UNAM.*

Alcalá, M. (1996), Enseñanza de la Matemática y niveles operatorios. Salamanca: Actas 8º J.A.E.M.

Álvarez, J. (2001) *Evaluar para conocer, examinar para excluir*. Madrid: Morata

Ausubel, D., et. al. . (1983) *Psicología educativa: un punto de vista cognoscitivo*. México: Trillas.

Aznárez, M. (1977), Ni ogro, ni aburridas. El País semanal, mayo. M.E.C. (1992): *Primaria. Área de Matemáticas.* Madrid: Secretaría de Estado de Educación.

Baquero, Ricardo.(1997) *Vigotsky y el aprendizaje escolar*. Buenos Aires: Aique.

Berger, P. (1978) *La construcción social de la realidad*. Argentina: Amorrortu.

CEPPEMS. (2001) Proyecto Piloto de Articulación del Sistema educativo en Ixmiquilpan, Hidalgo. Hidalgo: IHEMSyS.

Chamoso, J. (2001), *¿Hacia unas Nuevas Matemáticas?* España: Universidad de Salamanca.
De la Peña, J. (2002) *Algunos Problemas de la Educación en Matemáticas en México*. México: Siglo XXI, UNAM.
Duval, G. (1999). Teoría de sistemas una perspectiva constructivista. Ramírez, S. Compilador *Perspectivas en las teorías de sistemas.* México: Siglo Ventiuno editores.
Gimeno, J. (2001) *Educar y convivir en la cultura global.* Madrid: Morata.
Goldin-Meadow, S., et. al.,. (1999), Lo que las manos del adulto le dicen a la mente del estudiante sobre matemática. *El periódico de Psicología Educativa*, 91, 720-730.
Goldin-Meadow, S., (2003), *Gestos oyendo: Cómo nuestras manos nos ayudan a pensar. Cambridge*, MA: la Harvard Universidad Prensa, en prensa.
Guevara Niebla (1991), "México: ¿un país de reprobados?", en la revista NEXOS No. 162. México
Martín, M.. (1996) *Planeación, administración y evaluación de la educación*. México: ITESM.
Morín, Edgar; (2000)*, "Los siete saberes necesarios para la educación del futuro*", UNESCO
Perrenoud, (2001), La construcción del éxito y del fracaso escolar. Madrid: Morata
Resnick, L., et. al., (1987), Aprendiendo a entender aritmética. En R. Glaser (Ed., *Adelantos en Psicología Instruccional,* Vol 3). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
Vigotsky, Lev. (1979), *Mind in society. The development of higher psychological process*. Cambridge, Ma.: Harvard university Press. Trad, cast. De S. Furió: el desarrollo de los procesos psicológicos superiores.. Barcelona: Crítica.

EL SENTIDO DE LAS CUATRO OPERACIONES BÁSICAS COMBINADAS

Forcinito, Silvia Ofelia. Zampini, María Inés. Álvarez, María Alcira.
Instituto de Formación Docente Nº 3: Esc. Normal Superior J.I. Gorriti. Jujuy- Argentina.
silvifor@yahoo.com.ar

Resumen
Los reiterados errores que presentan los alumnos a lo largo de toda la escolaridad media, cuando requieren poner en juego la prioridad de las operaciones, inspiraron la elección de este problema como objeto de la investigación. Su alcance se limita a la resolución de sumas y productos combinados en el campo de los números naturales.
Se ha considerado su importancia por ser base para su tratamiento en la ampliación de los campos numéricos (racionales y complejos), la resolución de ecuaciones y otros cálculos algebraicos de gran utilidad, dentro y fuera de la matemática.

Hipótesis
Los insistentes esfuerzos que hacen los docentes cada vez que los alumnos se equivocan en los cálculos combinados, tanto en el marco aritmético como en el algebraico, junto a la persistencia del error por parte de los alumnos, han permitido elaborar una primera hipótesis que consiste en suponer la presencia de lo que Guy Brousseau denomina: *conocimiento obstáculo*[15]. Y que este obstáculo, esta dado por la característica cultural de leer y escribir de izquierda a derecha, cuestión que se reproduce en los cálculos combinados dispuestos horizontalmente.
Como segunda hipótesis, desprendida de la anterior, se busca confirmar que situaciones de enseñanza adecuadas, que tengan en cuenta el sentido de las operaciones combinadas, permitirían al alumno franquear el obstáculo y transformarlo.

Objetivos
Se busca comprobar el obstáculo, diseñar e implementar un proyecto de aprendizaje sobre la prioridad de las operaciones en de sumas y productos combinados con números naturales dispuestos horizontalmente y contrastar los resultados obtenidos con los análisis apriori.

Metodología
Se adopta la, «*Ingeniería Didáctica*»[16] como metodología para la investigación.

15 Brousseau, (1975) en el campo de la didáctica de la matemática, define el concepto: conocimientos obstáculos como errores reproducibles, predecibles, resistentes y relativamente universales.

16 DOUADY, REGINE. "Ingeniería didáctica y evolución de la relación con el saber en las matemáticas de collège seconde" en La enseñanza de las matemáticas: puntos de referencia entre los saberes los programas y las prácticas. Topiques. 1996.

Marco Teórico

Se toman como encuadre de esta investigación la *«Teoría de las Situaciones»* (Guy Brousseau. 1986) y la *«Dialéctica Instrumento - Objeto. Juego de marcos»* (Regine Douady. S/f)

La Ingeniería

1 – Los análisis preliminares.

Desde lo epistemológico se consideró la *«Teoría axiomática del número natural»* de Peano, de la cual se desprende la regla que determina la prioridad de las operaciones.

En cuanto a la práctica habitual de los docentes, se pudo observar que proponen separar los términos teniendo en cuenta los signos «+» y «-» que no figuren dentro de paréntesis. Son reglas «recetas» totalmente vacías de sentido.

Dentro de los errores que aparecen en las producciones de los alumnos a lo largo de la escolaridad primaria y media, se pueden observar:

$\frac{2}{4}+\frac{1}{2}\times 5=1$; $3+2x=5x$; $4+3\sqrt{2}=7\sqrt{2}$; $2+4i=6i$

El error que subyace es el mismo, el alumno realiza los cálculos en el orden que aparecen, de izquierda a derecha, no tiene en cuenta la separación por términos.

2 – La concepción y el análisis a priori.

Se concibe una secuencia de 8 encuentros de 80 minutos cada uno a cargo de las docentes investigadoras.

– Primer encuentro: Se propone una entrevista inicial con el propósito de indagar sus concepciones previas acerca de los cálculos combinados.

– Segundo encuentro: Se propondrá a los alumnos que resuelvan problemas que involucren las 4 operaciones básicas. El propósito es indagar acerca del reconocimiento por parte de los alumnos de la pertinencia de estas operaciones dentro de un contexto, ver su forma de trabajar, de representar las resoluciones y, además, realizar un acercamiento interpersonal entre ellos y las docentes investigadoras.

– Tercer encuentro: Se trabajará de manera inversa a la anterior, se darán cuentas en las que intervenga una sola operación y los alumnos, en forma grupal, propondrán los problemas. Se continuará con una puesta en común.

– Cuarto encuentro: Se presentará a cada grupo de alumnos dos problemas en los que intervengan las mismas cantidades pero que se resuelvan de distintos modo, en uno se deberá realizar primero la suma y luego el producto y en el otro al revés. Esta actividad tiene el propósito de contextualizar las operaciones combinadas, que reconozcan que la necesidad de realizar primero una u otra operación está dada por la situación y que, según esto, aunque intervengan los mismos números y las mismas operaciones, los resultados serán distintos. En la puesta en común debatirán los procedimientos usados.

– Quinto encuentro: Se entregará a cada grupo dos dados de distinto color y dos tarjetas, una para cada equipo que se forme dentro del grupo. En una tarjeta se consignará que a la suma de los puntajes obtenidos al tirar los dados la deberán multiplicar por un número específico. En la otra, con los mismos puntajes obtenidos

en los dados, deberán efectuar el producto con uno de ellos y, a ese resultado, sumarle el del otro dado. Además se les pedirá que anticipen cuál de los equipos obtendría el mayor puntaje y que justifiquen su respuesta. Con esta actividad se propone profundizar las concepciones logradas en el encuentro anterior.
– Sexto encuentro: La clase se organizará en dos grandes grupos, en cada uno de ellos se formarán subgrupos. Cada subgrupo, de uno de los dos grupos, recibirá un par de problemas; para su resolución uno requerirá primero la suma y el otro primero el producto. De la misma forma se procederá con el otro grupo. Junto con los problemas recibirán una tarjeta con dos filas de números que corresponderán a los de los problemas. Una vez resueltos deberán completar la tarjeta con los signos de las operaciones y, cuando lo necesiten, algunas marcas o señales (no podrán borrar ni agregar números o letras) de modo que su lectura permita resolver los cálculos solucionando cada problema sin conocer sus enunciados. Luego los grupos que recibieron distintos problemas intercambiarán las tarjetas y resolverán los cálculos. En la puesta en común se analizará la claridad de los mensajes plasmados en las tarjetas y se validarán las resoluciones de acuerdo a los problemas correspondientes. El docente institucionalizará el uso del paréntesis como simbolización socialmente reconocida.
– Séptimo encuentro: Se realizará una reinversión de los conceptos logrados en la actividad anterior. Los alumnos recibirán dos problemas y cálculos en los que intervengan los mismos valores numéricos en sumas y productos, en algunos aparecerán paréntesis, deberán resolverlos y aparearlos con los problemas correspondientes.
– Octavo encuentro: Sobre la base de los resultados obtenidos en el encuentro anterior se entregarán cálculos con sumas y productos dispuestos horizontalmente, con y sin paréntesis, para que los alumnos los resuelvan.
– Evaluación: Se la realizará en forma individual. En una primera parte, los alumnos deberán presentar horizontalmente el cálculo de problemas que requieran una combinación de sumas y productos. En la segunda parte, deberán resolver cálculos con estas operaciones dispuestas horizontalmente, con y sin paréntesis.

3 – Experimentación, análisis a priori y validación.

La propuesta se desarrolló en un cuarto año de EGB 2, se eligió un grupo que no había trabajado las operaciones combinadas, pues si ya hubieran visto la regla de separación por términos los resultados de esta investigación quedarían confusos.
La entrevista inicial, invariablemente ante los cálculos del tipo «$4 + 3 \cdot 5$» resolvieron primero la suma y luego el producto. Cuando se les preguntaba porqué habían decidido resolverlas de ese modo daban por respuestas: "porque ahí dice así" o "porque aparecen así". Confirmando así la primera hipótesis.
Los hallazgos obtenidos con las actividades desarrolladas en el segundo y tercer encuentro, no tienen relevancia en cuanto al interés de esta investigación, sus propósitos están especificados en el punto anterior.
En el cuarto encuentro se entregó a cada grupo dos problemas:

a) *Susana tiene 2 figuritas sueltas y 3 sobres con 5 figuritas cada uno. ¿Cuántas figuritas tiene Susana?*
b) *Susana tiene 3 sobres que contienen 5 figuritas de animales y 3 de deportes.*

¿Cuántas figuritas tiene Susana?

En general no tuvieron inconvenientes para resolverlos. Se puede decir que con respecto al objetivo propuesto, referido al reconocimiento de la prioridad de las operaciones, se logró una primera aproximación dentro de una situación contextualizada. También se pudo observar la variedad de estrategias de resolución que presentaron los alumnos, esto dio lugar a distintos puntos de debate en la puesta en común, como lo fueron la multiplicación como suma reiterada, el cálculo mental y la aplicación de la propiedad distributiva del producto respecto de la suma.

En el quinto encuentro cada grupo recibió dos dados y dos tarjetas, una para cada equipo del grupo. Cada tarjeta tenía una de las siguientes consignas:

a) *Al puntaje del dado blanco se le debe sumar el resultado de multiplicar el puntaje del dado rojo por el número tres.*
b) *A la suma del puntaje del dado blanco con el del dado rojo se la debe multiplicar por el número tres.*

Todos los grupos resolvieron correctamente, consignaron los puntajes de cada dado en una hoja donde también resolvieron los cálculos. En la puesta en común explicaron sin dificultades los cálculos resueltos. La actividad fue valiosa ya que los alumnos reconocieron, para el mismo par de valores, las diferencias entre los resultados en los dos tipos de cálculo. Incluso llegaron a inferir que cuando debían sumar primero el resultado sería siempre mayor, una alumna lo justificó mediante la propiedad distributiva del producto respecto de la suma

En el sexto encuentro, tres grupos recibieron dos tarjetas, con los problemas 1 y 2. Los otros tres grupos recibieron las de los problemas 3 y 4, junto a la tarjeta en la que debían intercambiar los mensajes.

<u>Problema 1</u>

Una bailarina entrena 4 horas los días sábados y 3 horas de lunes a viernes. ¿Cuántas horas entrena por semana?

<u>Problema 2</u>

Otra bailarina entrena 4 horas a la mañana y 3 horas por la tarde ; lo hace de lunes a viernes. ¿Cuántas horas entrena por semana?

<u>Problema 1</u>:	4	3	5
<u>Problema 2</u>:	4	3	5

<u>Problema 3</u>

María para su cumpleaños decoró con 7 globos rojos y 5 globos blancos cada una de las 4 esquinas del comedor. ¿Cuántos globos utilizó María?

<u>Problema 4</u>

María para su cumpleaños decoró el comedor con 7 globos rojos en el centro y 5 con globos blancos en cada una de las 4 esquinas. ¿Cuántos globos utilizó María?

<u>Problema 3</u>:	7	5	4
<u>Problema 4</u>:	7	5	4

En las resoluciones de los alumnos se pudieron observar distintos comportamientos.

En el grupo que participaron Nahir, Julieta y Felipe resolvieron correctamente ambos

problemas usando la disposición vertical para presentar las cuentas. Para enviar el mensaje de resolución del problema 1 Felipe propuso escribir al lado del producto el signo de la igualdad y su resultado, a continuación del mismo escribió el signo de la suma y el número 4. Para el problema 2 agregaron solamente los signos de las operaciones, consideraron que debía resolverse en el mismo orden de aparición.
Con respecto al problema 1 se les recordó que no se podían escribir números; cambiaron la propuesta usando una flecha para indicar el orden de resolución. Con respecto al problema 2 incorporan el signo de la igualdad después de la suma de los dos primeros números para indicar que a ese resultado lo deben multiplicar por el número siguiente.
Aymé, Ignacio y Yamila recibieron el mensaje y lo interpretan como el grupo emisor lo había propuesto.
El grupo de Pedro, Nicolás, Fran y Marcos resolvieron correctamente los dos problemas y también presentaron las cuentas en disposición vertical. Para enviar el mensaje encerraron con una línea curva los cálculos que se debían resolver primero.
Agustina, Tiago y José recibieron la tarjeta con este mensaje, resolvieron correctamente pero llama la atención que escribieron la cuenta que realizaron en segundo lugar a la izquierda de la primera. Aunque respetaron la prioridad indicada, posiblemente consideraron que los cálculos se deben escribir en el orden que aparecen los signos en la disposición horizontal En la puesta en común dijeron que se dieron cuenta de la prioridad por los números que estaban juntos y por el que quedaba solo.
Al igual que los grupos anteriores, Paloma, Gustavo, Matías y Lucía resolvieron correctamente los dos problemas y presentaron las cuentas en disposición vertical. También enviaron el mensaje encerrando con una línea curva los cálculos que se debían priorizar. Luciana, Paloma y Valeria recibieron el mensaje y lo resolvieron en la misma tarjeta. No tuvieron en cuenta las líneas curvas marcadas por el grupo emisor y resolvieron por el orden de aparición de los cálculos incluyendo los resultados intermedios. Obtuvieron el mismo resultado para los dos problemas. En la puesta en común explicaron que no entendían lo que tenían que hacer porque los números estaban encerados.
En las resoluciones de los otros dos problemas, en el grupo de Tiago, José y Agustina, esta última decía que había que dividir 12 por 4; después de sumar mentalmente y que se trataba de una división por el "Cada una" del enunciado. Tiago se opuso diciendo: "No, no, no; puso 5 globos en 4 esquinas, uno en cada una y sobra una" Se les preguntó nuevamente cuántos globos se colocaron en una sola esquina. Agustina, que ya había resuelto la cuenta propuesta inicialmente, respondió: "3". En cambio Tiago dijo: "hay 12 en una esquina, 12 en otra, 12 en otra y 12 en otra". Resolvió oralmente: "10 + 10 + 10 + 10 = 40; 2 + 2 + 2 + 2 = 8" y 40 + 8 = 48". Agustina propuso multiplicar. En la hoja escribieron las dos cuentas en disposición vertical. El problema 4 lo resolvieron sin inconvenientes, también usaron la disposición vertical, esta vez resolviendo primero el producto y luego la suma.
Para enviar el mensaje propusieron escribir encima de los signos de operación un número de orden para indicar la prioridad. Se les recordó que no podían usar números, pero que si cualquier tipo de marcas. Decidieron usar flechas.
Los alumnos que recibieron el mensaje interpretaron las flechas al revés de la

intención propuesta. Interpretaron que la punta de la flecha indicaba donde debían comenzar. Mantuvieron la disposición horizontal para resolver los cálculos, colocando resultados intermedios sin respetar el significado del signo igual.

El grupo de Ignacio, Yamila y Aymé resolvieron correctamente ambos problemas y también usaron la disposición vertical para presentar las cuentas.

Para enviar el mensaje del problema 3 solamente agregaron los signos de las operaciones; consideran que la prioridad estaba dada por el orden de escritura. Como en el problema 4 debían indicar la alteración del orden recurrieron al uso de los colores, pintaron de verde los dos números que se debían multiplicar y dejaron en rojo al que luego deben sumar; reforzando esta idea con una flecha.

Nahir, Julieta y Felipe recibieron el mensaje y lo resolvieron con la intención dada por el grupo emisor. Ambos grupos sostienen que la prioridad está dada por el orden de escritura; consideraron que la salvedad se debe indicar cuando esto deja de ser válido.

El grupo de Luciana, Paloma y Valeria al igual que los otros grupos resolvieron bien los problemas y también usaron la disposición vertical. También, como pudo observarse en otro grupo, escribieron la cuenta que realizaron en segundo lugar a la izquierda de la primera, como si los cálculos debieran presentarse con el orden numérico dado en el enunciado del problema.

Para el cálculo del problema 3 solo incorporaron los signos de operación considerando que la prioridad estaba dada por el orden de escritura. En el problema 4 usaron una llave horizontal abierta por debajo de los dos números que debían multiplicar para indicar la prioridad.

Los alumnos que recibieron la tarjeta resolvieron los dos cálculos por el orden de escritura, no tuvieron en cuenta la presencia de la llave. Hicieron los cálculos en la misma tarjeta escribiendo los resultados intermedios; aunque también, los presentaron en la hoja en la disposición vertical.

En la puesta en común se analizaron las distintas representaciones, los errores cometidos y se debatió sobre las simbolizaciones más adecuadas. Como otra posibilidad, la docente presentó el paréntesis y comunicó que es la adoptada universalmente, estos signos aparecen en algunas calculadoras y en los teclados de las computadoras por ello es la que adoptarían también ellos. De este modo se institucionalizó el uso del paréntesis para indicar la prioridad de las operaciones; asimismo señaló que, para los casos en los que no estuvieran presentes los paréntesis, existe la convención de resolver primero los productos y después las sumas.

Los dos encuentros siguientes fueron dedicados a la familiarización de esta representación.

La evaluación fue individual y la realizaron los 22 alumnos presentes de los 24 que conformaban el grado. Se obtuvieron los siguientes resultados:

Aprobados: 15 (68,18%) Regulares: 6 (27,27%) Aplazados: 1 (4,54%)

Las primeras apreciaciones

Se considera que el porcentaje de aprobados fue bueno; aunque, por los errores que manifestaron los alumnos hubiera sido conveniente aumentar el tiempo dedicado a la familiarización del concepto.

Esta secuencia de clases respondió a una primera aproximación a la construcción de la prioridad de las operaciones. Lo que le sigue es una complejización de las situaciones aumentando la cantidad de números, de términos, luego incorporando la resta, la división entera para pasar luego a la ampliación del campo numérico con expresiones decimales y fraccionarias. A su vez el concepto debería ir apareciendo paralelamente en resoluciones de ecuaciones.

Creemos que la experiencia fue rica ya que permitió al menos conflictuar el obstáculo.

Bibliografía

ARTIGUE, MICHEL y Otros. *Ingeniería didáctica en educación matemática.* Grupo Editorial Iberoamericano. México. 1995.

BERTÉ, ANNIE *Matemática dinámica.* AZ. Bs. As. 1999.

BROUSSEAU, GUY *Fundamentos y métodos de la didáctica de la matemática.* FAMAF. Córdoba. 1986

CHEVALLARD, y Otros. *Estudiar Matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje.* Horsori. España. 1998

DOUADY, Regine. *Dialéctica instrumento – objeto. Juego de encuadres*. Cuaderno de Didáctica de matemáticas Nº 3. Edición mecanografiada. s/f.

ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA: HABILIDADES LOGICAS PRESENTES EN LOS INGRESANTES AL NIVEL SUPERIOR

Edna Agostini,-Josefina Royo, Josefina-, Celia Torres,Ana Lasserre, Mercedes Naraskevicins
Universidad Nacional de Jujuy, Argentina
perassi@cootepal.com.ar; jroyo@imagine.com.ar

Resumen

La investigación realizada por este equipo en años anteriores, mostró que en el paso del nivel primario al secundario, los alumnos carecen de ciertas habilidades lógicas necesarias para su aprendizaje matemático posterior, particularmente en lo que hace a la reversibilidad de las operaciones y a la interpretación de los textos y consignas propuestas. Estos estudios empíricos y la práctica docente de cada uno de los miembros del equipo nos llevaron a extender nuestra hipótesis de trabajo a otros niveles del sistema educativo y así nos propusimos verificar que: “los alumnos de niveles superiores del sistema educativo tienen importantes dificultades para el aprendizaje de la matemática, debido a que en los niveles inferiores del sistema no adquieren las habilidades lógicas necesarias para un óptimo manejo de las abstracciones matemáticas”. A partir de esta hipótesis, en el proyecto que iniciamos en el año 2002 nos propusimos realizar, en primera instancia, un diagnóstico de los alumnos que egresan del sistema medio e inician estudios superiores para corroborar o desestimar la idea de sus dificultades en el aprendizaje y, a partir de este estudio empírico, identificar en qué fase del proceso y con qué operaciones se presentan esas dificultades, determinando además la vinculación que pueda tener esta problemática con otras variables como ser la metodología empleada por los docentes y el nivel socio-económico de los alumnos. Se presenta ahora, al cabo de un año de trabajo, el primer avance en esta nueva investigación.

Antecedentes

La formación de las habilidades lógicas tiene gran importancia en Matemática. N. Telizina lo destaca particularmente y enfatiza sobre la necesidad de la formación de procedimientos lógicos generales. Por su parte, A. Sheinenke señala que se deben incluir los aspectos de la lógica en la enseñanza de la matemática aún en las especialidades técnicas, para mayor comprensión de esta disciplina. La investigación realizada por este equipo en los últimos tres años demostró que en el paso del Nivel primario al Nivel secundario, los alumnos carecen de algunas habilidades lógicas necesarias para un aprendizaje matemático posterior. Hemos podido probar que niños de alrededor de 13 años, edad adecuada al nivel estudiado, no tienen casi dificultades para clasificar, es decir para indicar la pertenencia o no de un objeto a un conjunto predeterminado. Sin embargo, a la hora de definir propiedades para luego clasificar una serie de elementos, lo hacen en forma muy amplia, estableciendo conjuntos donde sus límites no siempre están muy bien precisados. En cambio los jóvenes de mayor edad, que por estar en el mismo curso que los anteriores son en su mayoría alumnos que repiten el año, tienen menos dificultad en realizar una tarea de ese tipo ya que son capaces de establecer un mayor número de categorías para la clasificación y de definirlas con mayor precisión. Es decir que, *por las evidencias empíricas observadas en este contexto específico*, hay una correlación directa entre la edad cronológica y la habilidad para distinguir propiedades de los objetos y además para establecer las correspondientes definiciones, al menos, con objetos no matemáticos como los utilizados en esta etapa de la experiencia. Pero, sin embargo, en estos alumnos mayores es notoria la carencia de ciertos conceptos matemáticos básicos como el de triángulo equilátero o el de área, que los alumnos que no repiten grado, en general, manejan con soltura. Además se verificó que en ambos grupos etarios, existe una gran dificultad en la reversibilidad de las operaciones así como en la interpretación de las consignas propuestas, sean orales o escritas. Así por ejemplo, en todos los grupos donde se realizó la experiencia hubo que repetir y explicar la consigna dada en forma oral. En las consignas escritas la dificultad de comprensión fue mucho menor. El desarrollo del trabajo de investigación mencionado en los párrafos anteriores se hizo en períodos lectivos muy irregulares dada la gran cantidad de huelgas docentes que se cumplieron en la Provincia de Jujuy, lo que motivó que el ingreso de los investigadores a las escuelas se dificultara, situación que no mejoró en el corto plazo. Esta circunstancia, unida a la experiencia diaria de los investigadores que se desempeñan como profesores universitarios y de los Institutos de Formación Docente y al diagnóstico realizado a través de una encuesta aplicada en 1993, a los alumnos de 1º Año de las distintas Facultades de la Universidad Nacional de Jujuy y de los Profesorados de Matemática y Física del Instituto de Formación Docente “José E. Tello” (citado en los trabajos [4], [5] y [6]), fueron determinantes al momento de decidir encarar el estudio sistemático de: “las habilidades lógicas presentes en los alumnos que ingresan al nivel superior”.

Así uno de los objetivos de impacto que se espera es que una investigación de esta naturaleza contribuya a un mejor rendimiento de los alumnos terciarios y universitarios, no solamente en Matemática, sino en todas las otras disciplinas que conforman los respectivos Planes de Estudio.

Una deficiente formación de los alumnos en las habilidades lógicas se hace sentir particularmente en este nivel, donde la Matemática se aborda con criterio científico más riguroso, produciendo, en consecuencia, porcentajes aún más altos de fracaso y deserción. Según Otero [14] *“La formación de habilidades y hábitos es un proceso complejo que requiere de un trabajo coordinado y conjunto de los pedagogos y psicólogos”.* Como dijimos, en 1993 el equipo realizó, como una de sus primeras acciones exploratorias de la investigación, una encuesta a los alumnos ingresantes a la Universidad, los resultados pusieron en evidencia las siguientes cuestiones denunciadas por estos estudiantes:

insuficiente preparación en relación a los conocimientos básicos de Matemática
aprendizaje elemental e incompleto (Esto se nota sobre todo en Geometría)
práctica limitada a la repetición de ejercicios tipo
falta de apropiación de una metodología de trabajo independiente
incapacidad para manejar bibliografía

De alguna manera, los propios alumnos muestran que su ingreso a la enseñanza superior se hace en condiciones muy desfavorables e implícitamente estarían indicando que no tienen las habilidades necesarias para un aprendizaje efectivo en ese nivel. Evidencia entonces, como lo expresa Otero [14], una *“toma de conciencia de las dificultades de adquisición de conceptos, de comprensión de los obstáculos cognitivos o epistemológicos que impiden a un sujeto apropiarse de un saber, en un campo de conocimiento determinado”*. Estas cuestiones fueron fuertes determinantes al momento de fijar los objetivos en esta nueva etapa de investigación, los que pueden sistematizarse del siguiente modo:

- Diagnosticar en los alumnos ingresantes a la Enseñanza Superior el nivel de adquisición de habilidades lógicas u operaciones mentales necesarias para el aprendizaje de la Matemática en ese nivel
- Proponer un sistema de acciones compensatorias que estimulen el desarrollo de esas habilidades.

Sobre la misma temática, resultan sumamente esclarecedores los estudios desarrollados por las Lic. Norma Santos Marín (Universidad de las Villas) [15] y Teresa Sanz Cabrera (Universidad de La Habana)[16]. Ambas docentes cubanas ponen de manifiesto cómo la presencia o ausencia de las habilidades lógicas más elementales repercuten en los aprendizajes matemáticos de los alumnos que estudian ciencias técnicas y proponen una serie de acciones para favorecer su desarrollo. Diagnosticar las habilidades lógicas presentes en los ingresantes al nivel superior requiere precisar previamente el significado que se otorga a los conceptos de "pensamiento lógico" y de "habilidad" en general. Para Podgoriets Kaya.N.A *"El pensamiento lógico constituye un tipo de pensamiento dirigido a la solución de diferentes problemas y situaciones sobre la base de procedimientos y recursos de la lógica".* Por su parte, Teresa Sanz Cabrera [16] sostiene *"Que en todo procedimiento lógico se destacan dos componentes, el propiamente lógico formado por el conjunto de acciones y reglas lógicas correspondientes al procedimiento y el componente específico que corresponde al contenido concreto en el cual éste se aplica."* Para Piaget e Inhelder [13] el niño no nace con la facultad de pensar lógicamente, ni esta facultad está preformada en el psiquismo humano. "*El pensamiento lógico es la coronación del desarrollo psíquico y constituye el término de una construcción activa y de un compromiso con el exterior, los cuales ocupan toda la infancia"*. Y agregaríamos nosotros, preadolescencia. Para ellos *"la construcción psíquica que desemboca en las operaciones lógicas depende primero de las acciones sensomotoras, después de las representaciones simbólicas y finalmente de las funciones lógicas del pensamiento",* por lo que el pensamiento lógico es *"un instrumento esencial de adaptación psíquica al mundo exterior".* Se define como habilidad a "*la capacidad o disposición para realizar una cosa"* y como parámetros e indicadores que nos permiten precisar aún más ese significado tomamos los elementos que nos aporta la Lic. Santos Marín, es decir: forma en que se ejecuta la acción, grado de generalización, abreviación e independencia (trabajo personal autónomo) con que se realiza la acción y, finalmente, dominio de la acción misma. Para su estudio, se dividieron las habilidades mentales en dos grandes grupos: las habilidades más generales y las habilidades lógicas propiamente dichas.

Habilidades generales

Habilidad para expresarse con precisión y fluidez, verificable por el uso correcto de la simbología y el lenguaje matemático

Habilidad para trabajar con la información científica, verificable por la interpretación de textos y la identificación de datos e hipótesis

Habilidad para racionalizar el trabajo, verificable por el uso del mejor algoritmo y tablas

Habilidad para calcular y construir, verificable por la resolución de ejercicios de Álgebra y Geometría

Habilidades lógicas: Se dividen en dos grandes grupos: las vinculadas a operaciones relacionadas con los conceptos y las vinculadas a operaciones relacionadas con los teoremas. Esta clasificación no es excluyente ya que ambos tipos de habilidades están muy relacionadas entre sí. No es infrecuente que habilidades correspondientes a operaciones con conceptos requieran de habilidades correspondientes a operaciones con teoremas y viceversa. Las habilidades vinculadas a operaciones relacionadas con conceptos se subdividen en:

Habilidad de reconocer si un objeto está en la extensión de un concepto

Habilidad para la generalización de conceptos, es decir, poder hacer transferencia de ese concepto a otras situaciones que se le planteen.

Dado que en esta primera etapa del estudio sólo se ha indagado sobre algunas habilidades generales y la habilidad de reconocer si un objeto está en la extensión de un concepto, se dejará la descripción de la habilidad de generalización de un concepto y de las habilidades vinculadas con operaciones relacionadas con teoremas para cuando se encare su estudio sistemático. La habilidad de reconocer si un objeto está en la extensión de un concepto requiere que se puedan realizar las siguientes acciones:

- reconocer si el objeto posee las características esenciales que establece el contenido del concepto
- reconocer si el objeto está en una de las subclases de la extensión del concepto
- reconocer si un objeto pertenece a una clase dada, a partir del conocimiento de algunos objetos de esa clase
- reconocer si un objeto pertenece a una clase dada, a partir del conocimiento de la estructura algebraica de la misma, si es que la tiene, y si el objeto puede descomponerse en términos de otros objetos elementales y de las operaciones propias de la estructura.

Desarrollo de la investigación

A los fines del cumplimiento del primer objetivo se aplicaron hasta el momento tres pruebas a alumnos de 1º año de la Facultad de Ingeniería y del Profesorado de Matemática del Instituto de Formación Docente "J.E.Tello". En ellas, las cuestiones a explorar estaban relacionadas con:

la clasificación y la seriación de conjuntos numéricos (el estudio que se realizó en la investigación anterior fue sobre conjuntos no numéricos) y

la explicitación de conceptos y resultados, es decir con la expresión oral y escrita de los alumnos en Matemática.

En la primera de esas pruebas, realizada por 242 ingresantes, se buscó comprobar si los alumnos podían clasificar elementos pertenecientes a distintos conjuntos numéricos. Para ese estudio se plantearon ejercicios de dos tipos:

ubicar distintos números en un diagrama de Venn, tomando como universo al conjunto de los números reales

reconocer las relaciones de inclusión existentes entre los conjuntos numéricos

En el primer tipo de ejercicio, los alumnos, en un porcentaje superior al 75%, ubicaron correctamente los números 19000; -5; 4,5 y 1/16, es decir, los números racionales, el entero y el natural. Pero, sólo el 62% ubicó correctamente el número $\sqrt{2}$, porcentaje que desciende al 46% para el número π. En relación a este último número se debe agregar que el 45 % de los alumnos lo ubicó mal y el restante 9% no lo colocó en ninguno de los conjuntos. Ello haría suponer que los alumnos desconocen que π es un irracional. En el 2º tipo de ejercicio casi el 90% de los alumnos reconoció las relaciones de inclusión en los tres primeros casos. Nuevamente surgen dificultades con los irracionales donde sólo el 66% lo responde correctamente. En relación a la primera prueba, se debe aclarar también que al preguntárseles a los alumnos cuál de los dos ejercicios le había parecido menos dificultoso, dijeron que el 2º porque se habían orientado por el diagrama del ejercicio anterior, lo cual era una de las estrategias posibles, anticipada por el equipo de investigación. El uso de estrategias similares fue observado en los comportamientos resolutivos de los alumnos de diferentes edades y clientes de niveles educativos distintos, y no resulta demasiado llamativo que, aún en el nivel universitario, prefieran referirse a formatos más concretos, como un diagrama, antes que manejarse con elementos abstractos solamente. Esto hace que nos preguntemos si la estrategia usada es sólo una herramienta facilitadora o si, por el contrario, se constituye en prueba fehaciente de la existencia de falencias en el desarrollo del pensamiento abstracto en nuestros alumnos. Dos meses después se tomó una 2º prueba a los mismos grupos anteriores de la Facultad de Ingeniería y a otros distintos de la misma Facultad. En este caso respondieron 283 alumnos, de los cuales el 75% había realizado la prueba anterior. El test constaba de 4 ejercicios. En el primero de ellos se buscaba determinar el grado de manejo del lenguaje simbólico. La expresión dada en forma simbólica fue traducida correctamente por el 85% de los alumnos. Como la expresión dada es una regla conocida de la Aritmética, se decidió que en un test complementario que permita precisar más el estudio, se presentarán dos actividades en relación a esta temática. La primera será similar a la ya realizada pero con una expresión de uso no frecuente y la segunda será la operación inversa, es decir, traducción del lenguaje coloquial al simbólico. En el 2º ejercicio se presentó el enunciado de un teorema (Teorema de Thales) y los alumnos debían determinar los datos y lo que se quiere demostrar. El 52% de los alumnos identificó correctamente los datos, pero sólo el 27% fue capaz de indicar lo que se quiere demostrar. En este último caso, un porcentaje similar ni siquiera ensayó una respuesta. En el 3º ejercicio se daba un conjunto de cinco números y los alumnos debían definir la clase o extensión a la que pertenecían. Sólo el 17% encontró una expresión correcta para la definición solicitada, en tanto que el 25% no respondió nada. En el 4º ejercicio los alumnos debían realizar una construcción geométrica siguiendo las instrucciones del enunciado. El 38% de los alumnos realizó bien la construcción y un 22% la hizo con algún error pero evidenciando que habían comprendido lo que se debía hacer. Un 35% la hizo mal y sólo el 5% no intentó hacer. Finalmente, durante el corriente año 2003 se aplicó un nuevo test a un grupo de 251 ingresantes a la Facultad de Ingeniería. Este test se componía de 3 ejercicios. En el 1º de ellos se pedía ordenar de menor a mayor un conjunto de números dados. Dicho ejercicio tenía que ver con la operación de seriación que como ya dijimos al comentar nuestro anterior trabajo de investigación, había sido explorada en alumnos de 13 años, pero con elementos concretos y no con conjuntos numéricos. La "seriación" consiste en ordenar los elementos según sus dimensiones crecientes o decrecientes. Esta operación que no presentó dificultades a la hora de trabajar con elementos concretos, cuando se trabaja con números requiere tener en claro los distintos conjuntos numéricos por lo que podemos asegurar que más allá de las relaciones de orden que puedan establecerse entre los números, obviamente el ejercicio es también un ejercicio de clasificación y demanda de habilidades relacionadas con los conceptos. Este ejercicio fue resuelto correctamente por el 54% de los alumnos. Casi el 50 % del resto cometió hasta 2 errores en la ordenación. En relación al test del año anterior podemos decir que se pone de nuevo de manifiesto cierto grado de desconocimiento del número π ya que menos del 40% lo ubica correctamente en la escala creciente. Nueve alumnos comenzaron la ordenación con el 0 y luego siguieron distintos criterios para ordenar los demás: por orden creciente de sus valores absolutos, ó inmediatamente después del cero los negativos y luego, los positivos. El 2º ejercicio era un ejercicio de clasificación en él que el 65% de los alumnos indica correctamente el conjunto más estricto a que pertenece un número dado. En el caso de π, sólo el 40% lo clasifica como irracional. El porcentaje también es bajo para los números 0,27 y –12,345. Este resultado es contradictorio con el registrado en el test Nº1 e indicaría que los alumnos consideran Racionales a las fracciones y no así a los números decimales. El 3º ejercicio era una construcción geométrica. Se hizo con la intención de medir el grado de comprensión de un texto así como el manejo de ciertos conceptos de geometría. Siguiendo la construcción, los alumnos debían dibujar un triángulo, trazar la bisectriz de uno de sus ángulos, luego una perpendicular a esa bisectriz y por último una paralela a uno de los lados. El 80% de los alumnos trazó bien la bisectriz y el 41%, la paralela y sólo el 38% traza bien la perpendicular. A este respecto se observó que un número significativo de alumnos confunde “rectas perpendiculares” con “rectas secantes”, ya que traza una recta oblicua a la bisectriz. Si analizamos los resultados de las pruebas desde la clasificación de las habilidades generales, vemos que:

Dentro de las consideraciones a que hicimos referencia en el comentario del ejercicio 1 de la segunda prueba y de la construcción del ejercicio 4, podemos decir que los alumnos ingresantes a las carreras de la Facultad de Ingeniería y del Profesorado de Matemáticas poseen habilidad para expresarse con cierta *precisión y fluidez*.

El ejercicio 2 nos permite inferir que esos mismos alumnos tienen escasa habilidad para *trabajar con la información científica.*

La estrategia de resolución usada en el 2º ejercicio de la primera prueba por un número significativo de alumnos nos permite inferir que, al menos ese grupo, posee cierta habilidad para *poner en práctica una lógica de racionalización del trabajo.*

Respecto de la habilidad para *calcular y construir,* que se estudiaría a partir del ejercicio 4, se debe concluir que un porcentaje relativamente bajo (37%) realizó correctamente la construcción. Debe remarcarse que el 22 % de los alumnos entendió lo que debía hacer pero hizo mal la construcción, y que el 41% restante la hizo mal o no intentó hacerla. Estos resultados estarían indicando que el nivel de desarrollo de esta habilidad es bajo.

Finalmente si analizamos las pruebas desde el punto de vista de las habilidades lógicas vinculadas con operaciones relacionadas con los conceptos, observamos que:

El test 1 probó que poseen la habilidad de *reconocer si un objeto está en la extensión de un concepto*

En relación a la habilidad para *la generalización de conceptos*, el ejercicio 3 de la segunda prueba demostró que los alumnos en general no poseen esta habilidad.
Creemos que estos resultados, si bien permiten tener una idea aproximada de las habilidades lógicas presentes en los ingresantes al Nivel superior, deben ser profundizadas a fin de lograr mayores precisiones sobre los aspectos en los que presentan mayor dificultad. Ello permitirá encarar acciones tendientes a su superación ya sea en el propio nivel terciario o universitario como en el Nivel Medio, mediante una adecuada comunicación con los docentes de ese nivel.

Bibliografía

Agostini,E; Lasserre,A. ; Naraskevicins, M; Odstrcil, D, Royo, J; Torres Bugeau, C (2001) : Enseñanza de la Matemática. Diagnóstico de las habilidades lógicas adquiridas por alumnos de EGB III. Enviado para publicación en Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Vol 15. GEI, México. Avance a Jun/2001

Agostini,E ; Lasserre,A. ; Naraskevicins, M ; Odstrcil,D, Royo, J ; Torres ,C : (2000) La enseñanza de la Matemática. Sistema de habilidades lógicas y su relación con el aprendizaje de esta ciencia. En Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Vol 13. GEI, México. Estado de avance a Jun/99

Agostini,E ; Lasserre,A. ; Naraskevicins,M ; Odstrcil,D, Royo,J ; Torres Bugeau,C : (2001) La enseñanza de la Matemática. Sistema de habilidades lógicas y su relación con el aprendizaje de esta ciencia. *En Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. Vol 14., GEI, México. Avance a Jun/ 2000

Agostini,E ; Lasserre,A. ; Odstrcil,D, Royo,J ; Torres Bugeau,C : (1994) -El Curso de ingreso : Su necesidad y alcance - Trabajo presentado en V Jornadas de Articulacion entre Nivel medio y universitario en la disciplina matemática (NOA) - Universidad Nacional de Catamarca

Agostini,E ; Lasserre,A. ; Naraskevicins,M ; Odstrcil,D, Royo,J ; Torres Bugeau,C : (1998) Lectura comprensivo-activa en la enseñanza de la Matemática. *En Actas de la XI Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* - Pág 151 a 154 - Grupo Editorial Iberoamérica - México. - ISBN nº 970-625-175-8

Agostini,E ; Lasserre,A. ; Naraskevicins,M ; Odstrcil,D, Royo,J ; Torres Bugeau,C : (1997*) En busqueda de una propuesta en la enseñanza de la Geometria* - *En Investigaciones Educativas* - Victor Manuel Hanne - Salta - ISBN 987 9140

Agostini,E ; Lasserre,A. ; Naraskevicins,M ; Odstrcil,D, Royo,J ; Torres Bugeau,C : (1998) - "Una alternativa en la enseñanza de la Matemática - *En Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. Vol 12, tomo 1. Pág 90 a 96. Grupo Editorial Iberoamérica. México. ISBN nº 970-625-206-1

Blalock,H. (1994) Estadística social, Fondo de Cultura Económica SA de CV. México

Campbell,D. Y Stanley,J. (1995) *Diseños experimentales y cuasiexperimentales en la investigación social*- Amorrortu Editores - Buenos Aires

Piaget,J ; Inhelder,B. (1977) : *Psicología del niño* - Ediciones Morata - Madrid

Otero, M. R. (2001) Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa Vol. 4, Núm. 3, noviembre, pp.267-287.

Santos Marin, N. (1988): Sistema de habilidades lógicas relacionadas con los conceptos y los teoremas en la Matemática de las ciencias técnicas – Tesis de grado de Doctor- Universidad Central de Las Villas (Cuba) – Facultad de Matemática y Cibernética.

LA TEORÍA APOE Y SU APLICACIÓN EN LA TRADUCCIÓN DE ENUNCIADOS DEL LENGUAJE NATURAL AL LENGUAJE DE LA LÓGICA DE PRIMER ORDEN

José Luis Ramírez, Carmen Azcárate y Felip Manya.
CONAYT,; U. A. de Barcelona,; U. P. Lleida.
México y España
jlram_bcn@yahoo.es; Carmen.Azcarate@uab.es; felip@eup.udl.es

Resumen:
Este trabajo es de carácter empírico-teórico y en él se describirán algunas de las dificultades observadas en estudiantes de Informática y Sistemas Computacionales, cuando intentan usar el lenguaje de la Lógica de primer orden (LPO) para representar enunciados del lenguaje natural (común), en un primer curso de Lógica. Las dificultades que se observaron, en la población de estudiantes a los que se les aplicó un cuestionario piloto, se relacionan con: enunciados cuantificados, sobre todo aquellos que contienen doble cuantificador ($\forall\exists$ y $\exists\forall$); enunciados cuantificados con una implicación material y enunciados donde hay alguna negación. Se utiliza la teoría APOE para explicar el proceso de traducción indicado. Se proponen tres etapas para la traducción de enunciados del lenguaje natural al lenguaje de la LPO y se describen las estructuras mentales que se deberían desarrollar para tener un mayor éxito en dicha traducción (o formalización). En este trabajo se describe una descomposición genética para una de las etapas propuestas.

Introducción

En los primeros cursos de Lógica impartidos en las carreras de Informática o Sistemas Computacionales, los estudiantes tienen muchas dificultades al tratar de usar el lenguaje de dicha lógica como un medio para representar e interpretar los enunciados del lenguaje común con los que se describe el mundo. Como Carlos Oller [Oller, C. 2000] afirma: "es una experiencia común, compartida por la mayoría de los profesores de lógica, que los estudiantes encuentran las tareas de formalización aún más difíciles que otras tareas tales como la construcción de demostraciones".
Algunas de las dificultades descritas en este artículo ya han sido estudiadas desde el punto de vista teórico del lenguaje, pero hay muy pocos trabajos enfocados desde el proceso de enseñanza-aprendizaje y centrados en la traducción de enunciados, en ese sentido este es un primer intento para abordar esta problemática.

La traducción de enunciados del Lenguaje natural al Lenguaje de la lógica de primer orden.

El problema que se está estudiando es el conjunto de dificultades que se presentan cuando se plantea a un estudiante la traducción (formalización o reconocimiento de la estructura lógica) de un enunciado dado en el lenguaje común (lenguaje inicial), al lenguaje de la Lógica de primer orden (LPO).
En un primer curso de lógica de predicados, a pesar de las indicaciones que se dan, se han observado diversos tipos de dificultades en el proceso de traducción. Se tienen evidencias de esas dificultades ya que se han aplicado cuestionarios a estudiantes de Informática y Sistemas Computacionales. Los cuestionarios se aplicaron en dos grupos: uno del ***cenidet*** (Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico) de 10 estudiantes y el otro de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma

de Guerrero (UAG) de 11 estudiantes. Los cuestionarios abarcan dos aspectos tratados en el curso de Lógica: traducción de enunciados y problemas de deducción de conclusiones. La traducción de enunciados abarca tanto a la Lógica proposicional como de predicados. En este reporte solo se comentan las dificultades asociadas al usar la lógica de predicados en el grupo del ***cenidet.***

2.1.- Dificultades en la traducción de enunciados en lógica de predicados (LPO).

En los cuestionarios aplicados a los estudiantes del ***cenidet***[17], sobre la traducción de enunciados utilizando LPO, se observaron las siguientes dificultades:

- No se diferencia claramente entre una proposición y un predicado.
- Incluyen la negación como parte del predicado.
- En el predicado incluyen los cuantificadores.
- No asociar al cuantificador universal una implicación, sin hacer referencia explícita al universo.
- Hay una tendencia a utilizar predicados unarios en lugar de binarios.
- La mayoría de los estudiantes dan por entendido o supuesto el universo y no hacen referencia al conjunto al que pertenecen los individuos.
- Intercambiar el orden de los cuantificadores en enunciados con doble cuantificación ($\forall\exists$ y $\exists\forall$).

El conjunto de dificultades que se ha presentado no es exhaustivo, pero permite clarificar algunos aspectos de la problemática que se está estudiando.

La teoría APOE y la traducción de enunciados.

Para el análisis del problema educativo descrito, desde el punto de vista de la didáctica de las matemáticas, se usará la teoría APOE, propuesta por un grupo de investigadores agrupados en lo que se denomina RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Community).

El enfoque investigativo está basado en la teoría APOE [Asiala et al., 1996] y tiene tres componentes:

- Un análisis teórico inicial sobre lo que significa comprender un concepto y cómo esa comprensión puede ser construida por un aprendiz.
- Un tratamiento instruccional que se enfoca directamente en tratar de lograr que los estudiantes elaboren las construcciones identificadas en el análisis teórico.
- La implementación de la propuesta instruccional conduce a la obtención de datos, los cuales son analizados en el contexto de la perspectiva teórica.

Las investigaciones pasan a través del ciclo de las tres componentes y se refinan (tanto como se necesite) la teoría y el tratamiento instruccional. En general se puede decir que se requiere repetir el ciclo varias veces para obtener resultados estables.

El propósito del análisis teórico de un concepto, es el de proponer un modelo de cognición, esto es, una descripción de las construcciones mentales específicas que un

[17] En el anexo 1 se presentan las preguntas de los cuestionarios asociadas a la Lógica de predicados que se aplicaron al grupo del ***cenidet.***

aprendiz podría elaborar con el fin de desarrollar su comprensión del concepto. El resultado del análisis teórico es lo que se denomina la *"descomposición genética del concepto"*.

El análisis se basa, principalmente, en:

a) la comprensión que tienen los investigadores sobre el concepto en cuestión y en sus experiencias como aprendices y enseñantes del mismo.
b) Investigaciones previas sobre el concepto.
c) Observaciones clínicas de los estudiantes en el proceso de aprendizaje del concepto estudiado.

Para la elaboración de una propuesta de una descomposición genética determinada, se considera que:

- La comprensión de un concepto matemático comienza con la manipulación de objetos físicos o mentales, previamente construidos, para formar *acciones*, entonces las acciones se interiorizan para formar *procesos*, los cuales se encapsulan para formar *objetos*. Los objetos pueden ser des-encapsulados hacia los procesos a partir de los cuales fueron formados. Finalmente las acciones, procesos y objetos pueden ser organizados en *esquemas*.

En esto consiste la teoría APOE, que se puede esquematizar en la figura 1.

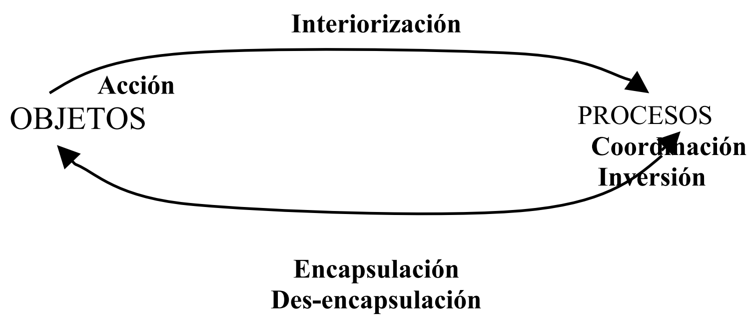


Figura 1.

Las construcciones son las acciones, los procesos, los objetos y los esquemas, mientras que los mecanismos para hacer esas construcciones son: interiorización, coordinaciones, reversiones, encapsulaciones y des-encapsulaciones.
Con los conceptos de acción, proceso, objeto y esquema y los mecanismos de construcción (internalización, encapsulación y tematización) se describe lo que se denomina la "descomposición genética de un concepto".

Una descomposición genética para la traducción de enunciados con la LPO.
De acuerdo a la teoría APOE el primer paso en el proceso investigativo es la elaboración de una descomposición genética del concepto que se pretende enseñar. En nuestro caso el concepto de traducción (formalización) de enunciados del lenguaje natural al lenguaje de la lógica de primer orden.

El primer paso, en la traducción, es identificar a que hace referencia el enunciado, es decir, identificar un universo sobre el que el enunciado dice algo. Teniendo una idea del sentido del enunciado, una forma de abordar la traducción es identificando los elementos constitutivos de cada lenguaje (inicial y final) y llevar a cabo la asociación o correlación entre cada uno de ellos para realizar la transformación deseada.
Después de analizar el enunciado y tratar de identificar cada uno de sus componentes (predicados, conectivos y cuantificadores), se plantea la primera propuesta (o primer intento) de su formalización. Después se verifica que la expresión resultante sea una fórmula bien formada del lenguaje lógico y finalmente, a manera de comprobación, se trata de verificar si la fórmula propuesta representa (o corresponde) con el enunciado dado. Para facilitar las cosas, la traducción de enunciados se descompondrá en las siguientes etapas:

Traducción o formalización del enunciado		
Enunciado → Representación	Análisis sintáctico	Representación → Enunciado

De acuerdo con la teoría APOE, se propone una descomposición genética para cada una de ellas.
En este artículo solo se hará referencia a la etapa Enunciado → Representación.

La descomposición genética propuesta para la etapa Enunciado → Representación es:
1.- Interiorizar la acción de identificar los predicados y el dominio o universo del enunciado.
2.- Interiorizar la acción de identificar los conectivos tanto implícitos como explícitos del enunciado.
3.- Interiorizar la acción de identificar los cuantificadores que aparecen en el enunciado tanto explicita como implícitamente.
4.- Interiorizar la acción de asignar variables tanto a predicados como a individuos del universo.
5.- Interiorizar la acción de asociar al cuantificador universal una implicación material, dependiendo del universo seleccionado, y al cuantificador existencial se le asociará una conjunción, dependiendo del caso.
6.- Encapsular el proceso de asociación de una fórmula bien formada a un predicado simple.
7.- Coordinar dos o más predicados simples con los conectivos y los cuantificadores, tomando en cuenta el alcance de cada uno de ellos, para construir la fórmula bien formada de cada una de las proposiciones compuestas que componen el enunciado.
8.- Encapsular el proceso de construcción de la fórmula bien formada asociada a cada proposición compuesta que forma parte del enunciado.
9.- Coordinar las fórmulas asociadas a cada proposición compuesta del enunciado, con los conectivos y cuantificadores, tomando en cuenta el alcance de cada uno de ellos, para obtener la representación (fórmula) que se le asocia al enunciado.

Esta propuesta de descomposición genética para la traducción de enunciados del lenguaje común al de la lógica de primer orden (en particular la lógica de predicados) nos permite elaborar un sistema de ejercicios o problemas con los que se pretende propiciar la construcción, por parte de los estudiantes, de las estructuras mentales (acciones, procesos, objetos, esquemas) que faciliten el aprendizaje de dicha traducción.

Conclusiones.

En este trabajo se muestran los resultados de una investigación, en la que se estudian las dificultades que se tienen al traducir enunciados del lenguaje natural al lenguaje de la LPO.

La teoría elegida para el estudio de la problemática descrita ha permitido hacer un análisis del proceso de traducción y en la descomposición genética propuesta se pueden observar las acciones mínimas que posibilitarían un mejor aprendizaje, reflejado en las estructuras mentales que se deben formar en un proceso instructivo. Dicha descomposición genética se elaboró con base en los resultados de diversos cuestionarios aplicados sobre el tema, el análisis del contenido formal de la definición del lenguaje de la LPO y la experiencia de los investigadores involucrados.

La descomposición genética propuesta servirá como un elemento de orientación en la construcción de una propuesta de ejercicios que, en teoría, propicie la construcción, por parte de los estudiantes, de las estructuras mentales que se requieren para llevar a cabo, con cierto éxito, la traducción de enunciados en estudio.

Bibliografía.

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D., y Thomas, K., (1996). A framework for research and development in undergraduate mathematics education. *Research in Collegiate Mathematics Education*, 2, 1-32.

Amor J. A. (1994). Sobre un curso de Análisis Lógico, *Revista Educación Matemática.*Vol.6 No.2. Ed. Grupo Editorial Iberoamérica.

Barnard, T., (1995). The Impact of 'Meaning' on Students' Ability to Negate Statements, *Proceedings of the 19th PME Conference*, Vol.2, Recife, Brazil.

Cuena, J. (1986). *Lógica Informática*, Editorial Alianza, segunda edición., México

Deaño, A., (1978): *Introducción a la lógica formal.* Madrid: Alianza Universidad.

Dubinsky E. et al. (1988) The student's Construction of Quantification, *For the Learning of Mathematics*, 8 (2).

Dubinsky E y Yiparaki O.,(1996). Predicate Calculus and the Mathematical Thinking of Students**,** *DIMAC Simposium on Logic in a Ilogical Word*.

Dubinsky E., (1997). On learning quantification, *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching,* 16(2/3), p 335-362

Dubinsky E y Yiparaki O., (2000). On Student Understanding of AE and EA Quantification *Research in Collegiate Mathematics Education,* Vol. 4 (pp 239-289). Providence, RI: American Mathematicl Siciety.

Oller C.,(2000) The Teaching of Formalization in First Order Logic And its Problems *First International Congress on Tools for Teaching Logic*, Salamanca, España.

Ramírez J. L. y Juárez C. M. (1996), Problemas en el aprendizaje de la lógica de predicados: la traducción del lenguaje coloquial (escolarizado) a fórmulas bien formadas. *Memorias del RELME11*, Michoacán, México.

Selden J. & Selden A. (1995), Unpacking the Logic of Mathematical Statements *Educational Studies in Mathematics Vol. 29, Nº 2.*

ANEXO 1: CUESTIONARIOS QUE SE APLICARON EN EL CENIDET.
(Solo se presentan las preguntas relacionadas con la problemática de la investigación).

CUESTIONARIO 1
FEB-2000

NOMBRE:____

1) Indica, señalando la letra, cuál de las siguientes frases es una proposición.
   a) En este cuestionario hay 500 palabras.
   b) Primero escribe tu nombre.
   c) X es menor de 3.
   d) 11 es un número primo.

….

9) ¿Cuál es la diferencia entre un predicado y una proposición?
10) ¿Cuál es la simbolización del enunciado: "Cada elemento e_i de la lista desde e_1 hasta e_{21} es distinto de 9"?. Defina los predicados que considere necesarios.
11) ¿ Cuál es la simbolización del enunciado: "Existe un elemento de la lista (e_1, e_2, ... e_n) que es cero"? Defina los predicados que considere necesarios.

CUESTIONARIO 2
(FEB-2000)

NOMBRE____

3) Encuentre la estructura lógica de los siguientes enunciados:
   a) Alguien no terminó la tarea.
   b) Todo lo que está en la tienda está etiquetado con el código de barras o con su precio.
   c) Nadie es perfecto.
   d) A Martha le gustan todos aquellos jóvenes a los que no les gusta Margarita.

4) Formalizar el siguiente enunciado: "Si alguna de las personas que están en el dormitorio tiene un amigo que tiene varicela, entonces todos los del dormitorio deberán quedarse en cuarentena".

…

12) Formalizar y comprobar si es correcta la siguiente deducción:
"Algunos Guerrerenses son amigos de todos los Poblanos. Ningún Guerrerense es amigo de los aficionados al tenis. Por lo tanto, ningún Poblano es aficionado al tenis"

REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA EN EL CONCEPTO "RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES POLINÓMICAS". ANÁLISIS A PRIORI

E.E. Rechimont y M.E. Ascheri
Universidad Nacional de La Pampa, Argentina
mavacheri@exactas.unlpam.edu.ar

Resumen

Analizamos los registros de representación semiótica y las correspondientes funciones semióticas implícitos en la solución de dos problemas propuestos para la Educación Polimodal, que consideramos pueden ser utilizados en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la noción *Resolución Numérica de Ecuaciones Polinómicas*, contemplada en los C.B.C. del mencionado nivel. Las representaciones juegan un rol fundamental en los procesos de construcción de conceptos, por lo que son importantes en la enseñanza, aprendizaje y comunicación del conocimiento matemático (Hitt, 1996). Con este análisis a priori, pretendemos ver cuáles de los registros de representación son de mayor peso para incorporar o darle sentido al concepto: F*unciones polinómicas. Raíces de las correspondientes ecuaciones.* Tratamos de responder a las preguntas: ¿Cuáles son los distintos registros de representación puestos en juego en la solución de cada problema?. ¿Cómo se suceden?. ¿Cómo aparecen y cuál es la necesidad de su conversión?. ¿Cómo se coordinan en la actividad conceptual? ¿En qué medida la presentación del tema desde una situación problemática es beneficiosa para incorporar y dar sentido a la determinación de las raíces de una ecuación polinómica?.

Introducción

El concepto *funciones polinómicas en una variable* figura en los Contenidos Básicos para la Educación Polimodal del Ministerio de Cultura y Educación de la Nación (1997). En los contenidos conceptuales del Bloque 2, Álgebra y Geometría, figura: *Funciones polinómicas en una variable. Operaciones. Raíces de una función polinómica.* La síntesis explicativa pone de manifiesto la relevancia que adquieren las funciones polinómicas como herramientas para representar relaciones funcionales de una variable describiendo situaciones de la vida real. Se menciona que los procedimientos para el cálculo de las raíces de polinomios, por métodos gráficos e iterativos, se podrá realizar con ciertos recursos didácticos: calculadoras, calculadoras graficadoras, computadoras. Los Contenidos Procedimentales no especifican explícitamente el tratamiento de estas funciones y/o ecuaciones. Uno de los objetivos primordiales en el estudio de las funciones polinómicas es la habilidad para determinar raíces de las correspondientes ecuaciones.

Marco teórico

En el análisis de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se observa, últimamente, que gran parte de las investigaciones en Didáctica de la Matemática se desarrollan alrededor del uso de nociones semióticas, como la noción de representación. Esta noción se toma como equivalente a una señal externa, un signo o marca, esquemas o imágenes mentales, que muestran y hacen presente un concepto matemático. No es posible estudiar los fenómenos relativos al conocimiento sin recurrir a la noción de *representación* en Matemática (Duval, 1995). En las formas convencionales de representación, se distinguen dos familias de sistemas: *representaciones simbólicas* (carácter alfanumérico, se simulan mediante programas informáticos, la sintaxis se describe por reglas de procedimientos), y

representaciones gráficas (de tipo figurativo, carácter analógico, sintaxis dada por reglas de composición y convenios de interpretación (Rico, 2000).
La representación pone en consideración el objeto *representante o significante* (símbolo o representación) y el *representado o significado* (contenidos conceptuales). Todo conocimiento moviliza una actividad de representación. Duval (1995) sugiere que no deben confundirse los objetos matemáticos con su representación, y define los registros de representación como un medio de expresión que se caracterizan por sus signos propios y la forma en que estos se organizan. Una palabra escrita, una notación, un símbolo o una gráfica representan a un objeto matemático. Cambiar la forma de una representación en matemática es difícil para los alumnos, y la comprensión de un contenido parece limitada a la forma de representación utilizada. Duval (1995) pone de manifiesto tres fenómenos estrechamente vinculados: *diversificación de los registros de representación semiótica, diferenciación entre representante y representado, coordinación entre los diferentes registros*. Estos fenómenos deben considerarse en la relación de enseñanza-aprendizaje.
Tendremos en cuenta, para el análisis de los problemas propuestos, las siguientes entidades (Godino, en Prensa): *lenguaje, situaciones, conceptos*, *propiedades.*
La actividad matemática surge cuando el sujeto se enfrenta a situaciones problemáticas (elementos extensivos) en cuya solución utiliza elementos ostensivos (representación usada en la actividad matemática) e intensivos (ideas matemáticas, abstracciones, generalizaciones). Godino (1998), denomina "entidades actuativas" a las acciones que realiza el sujeto en la búsqueda de una solución. La relación entre la actividad matemática y los procesos de difusión del conocimiento se da a través de las funciones semióticas, que permiten formular en términos semióticos el conocimiento matemático.

Problemas propuestos

En la resolución de problemas en las que están implícitas funciones y ecuaciones polinómicas, se recurre en algunos casos a las propiedades de los polinomios (factorización) y en otros a métodos numéricos. Nos proponemos:
1) Ilustrar estas situaciones con el estudio de dos ejemplos: *el problema de la esfera y el problema de la caja,* 2) Efectuar un análisis didáctico de la resolución de ecuaciones polinómicas presentes en la solución de los problemas.

I. El problema de la esfera

En un cilindro de base circular de 10 cm de radio, cuya altura es mayor que dicho radio, reposa una esfera de 7 cm de radio que se recubre de agua (la superficie libre del agua es tangente a la esfera). Se reemplaza la esfera por otra de x cm de radio ($0<x\leq 10$), siendo la cantidad de agua en el cilindro la misma. A partir de estos datos, se desea estudiar los siguientes fenómenos respecto de la nueva esfera:
a) ¿Cuándo la esfera está más abajo que el nivel del agua (sin llegar a ser tangente)?.
b) ¿Cuándo la esfera supera el nivel del agua?.
c) ¿Cuándo la esfera está exactamente recubierta por el agua (es tangente)?.

Solución: Sea V(x) y V(7) el volumen de agua en el cilindro que recubre exactamente a la esfera de radio x y de radio 7, respectivamente. Podemos afirmar que:
Si $V(7) > V(x)$, la esfera de radio x está más abajo que el nivel del agua; si $V(7) < V(x)$, supera el nivel del agua; si $V(7) = V(x)$, está exactamente recubierta por el agua.

El problema trae como consecuencia el estudio del signo de V(x) - V(7) para $0<x\leq 10$.

$$V(x)=\pi\, 100.2x-\frac{4}{3}\pi x^3=\frac{4}{3}\pi(150x-x^3);\quad P(x)=150x-x^3.\quad \text{Para}\quad 0<x\leq 10,$$

$V(x) =\frac{4}{3}\pi P(x)$.

El signo de P(x)-P(7) sobre (0,10], no parece fácil de analizar, salvo si se puede usar que es factorizable por (x - 7). P(x) - P(7) = (x - 7) Q(x) , (Q(x) polinomio).
$P(x) = 150\,x - x^3$ y $P(7) = 150\ 7 - 7^3$, entonces $P(x) - P(7) = (x - 7)(-x^2 - 7x + 101)$.

$-x^2 - 7x+101$ admite las raíces: $x_1 = \frac{\sqrt{453}-7}{2}$, $x_2 = -\frac{\sqrt{453}+7}{2}$, ($x_1 \approx 7{,}14$; $x_2 \approx -14{,}14$).

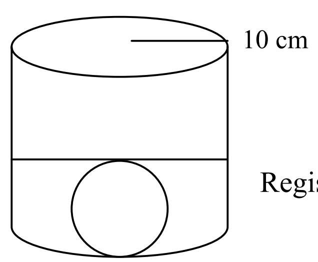
Se deduce, a partir de la siguiente tabla:

x	x_2	0	7	x_1	10
$x - 7$	-	-		+	+
$-x^2 - 7x + 101$	-	+	+	+	-
$P(x) - P(7)$	+	-	+	+	-

si $x < 7$, la esfera x está debajo del nivel del agua; si $7 < x < x_1$, supera el nivel del agua; si $x = x_1$, es tangente al nivel del agua; si $x_1 < x$, supera el nivel del agua.

Análisis didáctico de la solución del problema

La aprehensión del concepto funciones polinómicas, presenta las dificultades citadas por Hitt(1996) para el concepto de función. Si agregamos a ello la determinación de las raíces de las ecuaciones polinómicas, las dificultades y obstáculos son mayores.
El enunciado del problema es un elemento extensivo y el correspondiente registro semiótico es un registro verbal. Puede ser modelado en registros figural, analítico, simbólico, algebraico, tabular, etc. La imagen mental de la situación planteada la representamos en registro figural siendo el punto de partida a los distintos registros de representación involucrados en la solución.

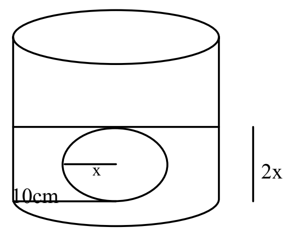


Registro figural

Distintos registros de representación

V(7), V(x) representan el volumen del agua en el cilindro que permite recubrir exactamente la esfera de radio 7cm y de radio x, respectivamente. A continuación se ponen de manifiesto funciones semióticas que relacionan V(x) con V(7) que conducirán hacia la solución requerida. Esta situación se expresa en registro simbólico: $V(7) > V(x)$; $V(7) < V(x)$ y $V(7) = V(x)$ y muestra como estas funciones semióticas ponen de manifiesto cuál es el nivel de agua del recipiente respecto de la esfera de radio x.

Las funciones semióticas precedentes dan origen al estudio del signo de V(7) - V(x) para $0<x\leq10$ para elaborar las respuestas solicitadas. Este estudio da origen a las funciones semióticas cuyo registro algebraico es: $V(x) - V(7) > 0$; $V(x) - V(7) < 0$ y $V(x) - V(7) = 0$, que constituyen el eje de la solución del problema.
Hasta esta instancia tenemos en escena elementos extensivos (enunciado del problema), ostensivos (V(x), V(7), V(7) > V(x), V(7) < V(x), V(7) = V(x)) y entidades actuativas (las relaciones anteriores).
En la solución matemática (algebraica) se acude al registro figural de la situación:



Una estrategia de solución (implica un trabajo con las funciones semióticas anteriores) se realiza en registros simbólico y analítico: $V(x)=\pi\,100.2x-\frac{4}{3}\pi x^3=\frac{4}{3}\pi(150x-x^3)$ (1)
con lo que obtenemos la expresión $150x - x^3$ que corresponde a un polinomio de grado tres en la variable x. Representamos este polinomio: $P(x)=150x - x^3$ (registro analítico).
Luego, $V(x) = \frac{4}{3}\pi P(x)$ es un registro analítico que representa una transformación del registro simbólico – analítico dado en (1).
De igual forma, $V(7) = \frac{4}{3}\pi P(7)$, donde $P(7) = 707$, constituye un registro numérico.
El análisis del signo en V(x) - V(7) conduce, según la solución que hemos propuesto, a estudiar el signo de P(x) – P(7). La representación en registro algebraico correspondiente es: $P(x) - P(7) = 150x - x^3 - 707$. El análisis de este polinomio conduce a la solución del problema planteado, lo cual implica conocer los valores de x, o sea las raíces de la ecuación polinómica de grado tres. Con un registro analítico (en "P(x) - P(7) es factorizable por (x - 7)") y mediante procedimientos algebraicos que ponen de manifiesto los correspondientes registros algebraicos, se obtienen los valores numéricos (x_1,x_2) que forman un registro numérico.
Se representa en registro tabular las posibles variaciones de cada uno de los factores de P(x) – P(7) y del polinomio P(x) – P(7), que a su vez permiten analizar las variaciones de signos de V(x) – V(7), para extraer las conclusiones del problema.
Cuando no resulta posible recurrir a las propiedades de los polinomios (teoremas de factorización) para resolver el problema, se suele recurrir a métodos numéricos. La comprensión de las relaciones entre representaciones mentales, computacionales y semióticas se logra, fundamentalmente, por la posibilidad de una clasificación de estos tipos de representación. Presentamos un problema que resume esta consideración.

II. El problema de la caja

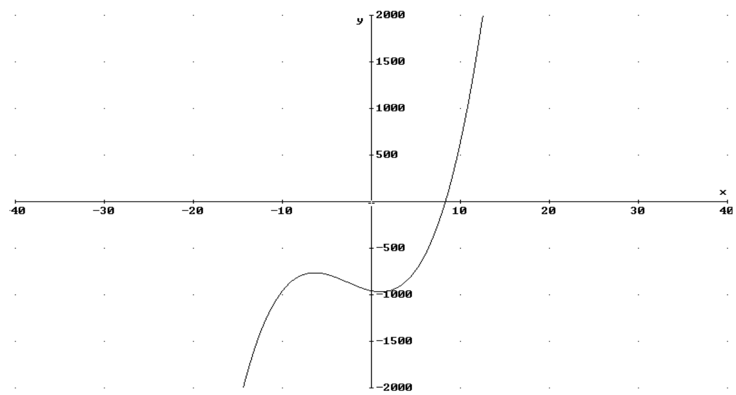
En una fábrica de chocolates se decidió envasar los bombones en un modelo de caja que sea un prisma de base x cm, de altura (x-2) cm, de profundidad (x+10) cm y cuyo volumen sea igual a 957 cm^3. Para poder armar esta caja se desean conocer las medidas de sus lados. Para ello:
a) Plantee la ecuación correspondiente, según los datos del problema.
b) Separe las raíces de esta ecuación realizando, primero manualmente y luego con la computadora, el gráfico de la función polinómica resultante.
c) En el apartado b) localizó las raíces de la ecuación polinómica. Utilizando estos datos y realizando 10 iteraciones del método de bisección, obtenga las medidas de los lados de este prisma.
c) Compruebe los resultados obtenidos utilizando la PC.

Solución

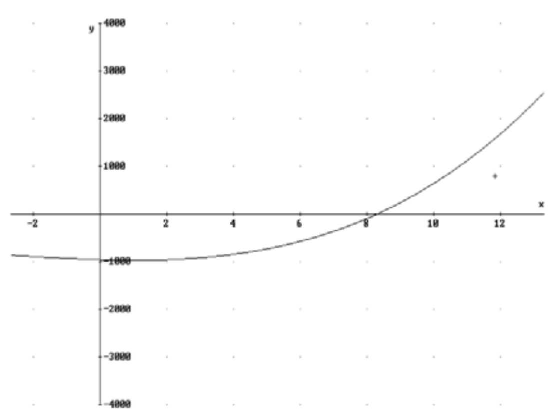
a) Planteamos: $V_{prisma} = x\,(x+10)(x-2) = 957$, de donde, $x^3 + 8x^2 - 20x - 957 = 0$.
Llamamos: $P(x) = x^3 + 8x^2 - 20x - 957$.

b) Para hacer el gráfico manualmente primero calculamos la tabla de valores

x	P(x)
-11	-1100
-10	-957
-5	-782
0	-957
5	-732
8	-93
9	240
10	643



Se observa que la única raíz real de esta ecuación polinómica se encuentra entre 8 y 9. Más precisamente, observando la gráfica que se realiza utilizando el software Derive y cambiando el rango de graficación, entre 8 y 8.5.



c) Método de bisección.

Nro. de iter, n	a_{n-1}	x_{n-1}	b_{n-1}	$f(a_{n-1})$	$f(x_{n-1})$	$f(b_{n-1})$
1	8	8.25	8.5	-93	-15.984375	65.125
2	8.25	8.375	8.5	-15.984375	24.052734	65.125
3	8.25	8.3125	8.375	-15.984375	3.905518	24.052734
4	8.25	8.28125	8.3125	-15.984375	-6.071503	3.905518
5	8.28125	8.296875	8.3125	-6.071503	-1.091022	3.905518
6	8.296875	8.304688	8.3125	-1.091022	1.405239	3.905518
7	8.296875	8.300078	8.304688	-1.091022	0.156607	1.405239
8	8.296875	8.298828	8.300078	-1.091022	-0.467334	0.156607
9	8.298828	8.299805	8.300078	-0.467334	-0.155395	0.156607
10	8.299805	8.300293	8.300078	-0.155395	0.000598	0.156607

d) Con la computadora (programa hecho en MATLAB) y según los datos del problema: nº.de iter.: 10; a_0= 8; b_0=8.5, se obtiene que $x \approx 8.3$ y $P(8.3) \approx 0.0006$.
Luego, se llega a la conclusión de que la base del prisma es de 8.3 cm, su altura es de 6.3 cm y su profundidad es de 18.3 cm. Además, se puede comprobar que para estas medidas de las aristas, se tiene que $V_{prisma} = 957.907$ $cm^3 \approx 957\ cm^3$.

Análisis didáctico de la solución del problema

Analizaremos los distintos registros de representación que se abordan en esta situación problemática, propuesta con la finalidad de la comprensión y la aprehensión de la *Resolución Numérica de Ecuaciones Polinómicas.*

En un primer análisis del enunciado de este problema detectamos un registro verbal (“el lenguaje común es el utilizado para representar situaciones del mundo real”). Además, podemos observar que subyacen en la posible solución los registros simbólicos (*... un prisma de base x cm ...*), analíticos y algebraicos (*... Plantee la ecuación ...*), tabular y grafical (*... separe las raíces ..., el gráfico ...*). También podemos detectar un registro numérico (*... realizando 10 iteraciones del método de bisección ...*). En este proceso se pasa de los registros analítico y algebraico a los registros algebraico y numérico a través de la utilización de un método numérico (método de bisección).

El enunciado de la tarea describe una situación problemática para los alumnos a los que se propone: construir una argumentación que convenza de la necesidad universal y atemporal de la verdad expresada en el enunciado. Desde el punto de vista de la pragmática, el contexto en que la tarea es propuesta por el investigador desencadenan procesos interpretativos por parte de los alumnos. Las palabras y expresiones usadas en el enunciado y la solución que desencadenan procesos interpretativos son las siguientes: *volumen de un prisma, plantee, separe y localice las raíces de una ecuación polinómica, grafique la función polinómica, obtenga las medidas de los lados utilizando un método numérico, compruebe.* Estos términos y expresiones denotan entidades conceptuales u operaciones matemáticas controladas por definiciones que el sujeto debe recordar y saber aplicar en la tarea. Entra en juego, en

este caso, la utilización de la computadora como una herramienta colaboradora en los procesos de la enseñanza y el aprendizaje de la *Resolución Numérica de Ecuaciones Polinómicas* (por ejemplo, en la parte del enunciado: *... Compruebe los resultados obtenidos utilizando la PC*).
Con la introducción de: *... realizando 10 iteraciones del método de bisección ...*, en este proceso se ha pasado a los registros algebraico – numérico.
En la solución de este problema, se aplicaron diversos registros de representación.
En el apartado a) destacamos los registros verbal, analítico, simbólico y algebraico:
* Verbal: el lenguaje común se utiliza para representar esta situación del mundo real.
* Analítico: se hace referencia al volumen del prisma, según la definición (el volumen del prisma es igual al área de la base por la altura del prisma).
* Simbólico: se da esta definición mediante expresiones simbólicas sustentadas por las reglas de la lógica formal ($V_{prisma} = x\ (x + 10)\ (x - 2) = 957$).
* Algebraico: se llega a la expresión final por medio de operaciones algebraicas ($x^3 + 8x^2 - 20x - 957 = 0$).
En el apartado b) destacamos los registros tabular y grafical:
* Tabular: los valores numéricos de la función polinómica están organizados en una tabla de valores.
* Grafical: corresponde a la representación en el plano cartesiano, incluyendo los convenios implícitos en la lectura de gráficos (interpretación de ejes coordenados, de unidades, de corte o cruce de la gráfica con respecto al eje x, etc.).
En el apartado c) destacamos los registros simbólico, algebraico, analítico, tabular y numérico:
* Simbólico: se dan el número de iteraciones (n), extremos de los intervalos que contienen a la raíz de la ecuación polinómica (a_{n-1}, b_{n-1}), punto medio (x_{n-1}), valores de la función en los extremos y punto medio ($f(a_{n-1})$, $f(x_{n-1})$, $f(b_{n-1})$), a través de expresiones simbólicas sustentadas por las reglas del método de bisección.
* Analítico – algebraico: se obtiene el punto medio a partir de la definición, utilizando la expresión algebraica correspondiente ($x_{n-1} = \left(a_{n-1} + b_{n-1}\right)/2$).
* Numérico: se realizan todas las evaluaciones que conllevan y que están involucradas en el método de bisección.
* Tabular: todos los valores numéricos obtenidos se organizan en una tabla.
Finalmente, para facilitar y mejorar la comprensión e interpretación de los resultados obtenidos manualmente y para comprobar la validez de los mismos, se utiliza la computadora. Las tareas de computación son importantes en la enseñanza – aprendizaje de los métodos numéricos, pues ayudarán a mejorar las habilidades de los alumnos, tanto en el conocimiento de la teoría como en la práctica de las temáticas involucradas.

Conclusiones

El análisis a priori esbozado en los problemas presentados, pone de manifiesto que para uno de ellos es factible la búsqueda de la solución en una marco geométrico-algebraico utilizando registros de representación de uso frecuente por parte de los alumnos. En el otro problema, y debido a la complejidad, la determinación de las raíces de la ecuación polinómica requiere del uso de procedimientos numéricos para su solución. En este caso, la utilización de herramientas computacionales resulta ideal.
El análisis a priori puede ayudar a superar la creencia de que la solución de algunos problemas es simple, pues se explicitan diversos registros y se ponen en juego conversiones de uno a otro, debiendo tener en cuenta la correspondiente coordinación. Ello implica posicionarse en un determinado marco del cual es necesario conocer sus reglas lógicas. Este análisis permitirá identificar los puntos críticos implícitos en la solución, la necesidad de ciertos conocimientos previos y

prever estrategias didácticas para afrontar dicha solución. También permite mostrar la compleja trama de entidades y relaciones entre los registros de representación que se ponen en juego en actividades matemáticas elementales. Este tipo de análisis es útil para describir los procesos de interpretación y comunicación del saber matemático, e identificar las razones que pueden condicionar la actividad de aprendizaje.
Esperamos que los alumnos comprueben lo indispensable del uso de las computadoras para resolver cierto tipo de problemas y tengan una demostración tangible de cómo pueden ayudarles a realizar estas tareas que conllevan una gran cantidad de cálculos, minimizando los tiempos que requieren las mismas.

Bibliografía

Artigues, Ch. y otros.,(1991), *Math 1res Set E, analyse*, Hachette Lycées, París.

Chevallard,Y., 1992, *Concepts fondamentaux de la didactique: Perspectives apportes par une approche anthropologique.* Recherches en Didactique des Mathématique, 12.

Duval, R., (1995), *Sémiosis et pensée humaine, Registres sémiotiques et apprentissages intellectuals,* Peter Lang S.A., Editions scientifiques européennes.

Godino, J. D., (1998), *Un modelo semiótico para el análisis de la actividad y la instrucción matemática,* Comunicación presentada en el VIII Congreso Internacional de la Asociación Española de Semiótica,

Granada, España.

Godino, J., (en Prensa), *Un enfoque semiótico de la cognición matemática,* Univ. de Granada.

Godino, J. D. - Batanero, C., (1994), *Significado institucional y personal de los objetos matemáticos.* Recherches en Didactique des Mathématique, Vol. 14 (3), pp. 325-355.

Godino, J. D. – Recio, A. M., (1998), *Un modelo semiótico para el análisis de las relaciones entre pensamiento, lenguaje y contexto en Educación Matemática,* Proceedings of the 22 th International Conference of PME, Vol. 3, South Africa.

Hitt, F., (1996), *Sistemas semióticos de representación del concepto de función y su relación con problemas epistemológicos y didácticos,* Investigaciones en Matemático Educativa, México:

Grupo Editorial Iberoamérica, pp. 245-264.Ministerio de Cultura y Educación de la Nación, (1997), *Contenidos Básicos para la Educación Polimodal,* República Argentina.

Piaget,J.,1968,*La formation du symbole chez l'enfant,* Neuchatel, Delachaux & Niestlé.

Rico, L., 2000, *Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en Educación Matemática,* Ponencia en el IV Simposio SEIEM (Huelva, 2000), Universidad de Granada, España.

REPRESENTACIONES ESTUDIANTILES DE VARIACIÓN. UN ESTUDIO DESDE MEDIACIONES PEDAGÓGICAS

Jorge Iván Ávila Contreras
Universidad Católica Cardenal Raúl Silva Henríquez. Chile.
jorgedechile@hotmail.com

Resumen

El propósito de esta investigación en curso[18] es indagar sobre las representaciones que tienen estudiantes del nivel medio superior (secundaria y primer nivel universitario) acerca de nociones matemáticas variacionales, prestando especial atención a su forma de aprenderlas y buscando propiciar espacios de reflexión respecto de ellas, con el objeto de aportar información que sirva de base para la elaboración de diseños didácticos tendientes a mediar -en procesos de profundidad creciente- aprendizajes de nociones matemáticas variacionales, por ejemplo, la razón de cambio de una magnitud. Como técnica exploratoria consideramos el uso de bitácoras personales de reflexión de los estudiantes, para luego, en una segunda etapa, derivar en la construcción y aplicación de un cuestionario y la realización de entrevistas para triangular fuentes de información. En este artículo se reportan evidencias de la primera etapa, provenientes de las bitácoras personales, en el contexto de un curso de cálculo inicial.

Introducción

Sobre la base de investigaciones en didáctica de las matemáticas que se han realizado en las últimas décadas podemos señalar -respecto de las prácticas pedagógicas y escolares- que lo supuesto tradicionalmente acerca de que el profesor enseña y el estudiante aprende, con una lectura causa-efecto de la díada enseñanza y aprendizaje, se ha ido develando magro e insuficiente. No obstante, cabe destacar que tanto profesores como estudiantes continúan viviendo prácticas pedagógicas y escolares bajo esa racionalidad. Su arraigo en nuestra sociedad es fuerte. Así, la resistencia al cambio de estilos educativos, se torna predecible. Por otro lado, en lo que respecta a la evaluación de aprendizajes, en las prácticas escolares y pedagógicas se constata el hecho de que las tareas que plantea el profesor al momento de evaluar generalmente deben apuntar al hecho de que *lo que se evalúa es si un estudiante ha logrado o no el aprendizaje de un determinado conocimiento matemático*. Seguir esta dinámica ciertamente priva al profesor de las representaciones estudiantiles que subyacen en la actividad humana cuando los estudiantes se aprestan a abordar y también cuando están abordando el aprendizaje de nociones matemáticas, en el tiempo que cursan la asignatura.

En esta investigación, en su primera etapa, se pretende -desde la práctica pedagógica- obtener información conducente al estudio de representaciones estudiantiles de nociones matemáticas variacionales. Bajo este prisma se aplicó a estudiantes de pedagogía en matemática de primer año, durante un curso de cálculo inicial, una actividad periódica cuyo foco estuvo en promover la reflexión de sus entendimientos respecto a lo que estaban aprendiendo. Dicha actividad consistió en la elaboración de una *bitácora personal de reflexión*. Entendida esta como una entrega periódica -de

[18] Parte de mi proyecto de Tesis de Maestría en Ciencias con mención en Matemática Educativa, CICATA-IPN, México.-

los estudiantes- de un escrito en el que vertían sus entendimientos de las temáticas tratadas en el curso, que ellos escogían libremente, así como sus impresiones de las actividades realizadas, emociones u otras variantes relativas a aspectos temáticos o didácticos (metodológicos) del curso. Se considera a la bitácora personal de reflexión como un instrumento de acercamiento entre el maestro y el estudiante, en una experiencia progresiva que sitúa a ambos actores en un escenario escrito y abierto que busca propiciar el desarrollo de la reflexión del estudiantado respecto de qué es lo que están entendiendo. Su aplicación no estuvo ajena a resistencias estudiantiles en los términos ya mencionados de los estilos educativos. Al respecto escribe por ejemplo un estudiante:

> "*es eso lo que yo no entiendo, el para qué indagar tanto en la materia, sobre nuestro modo de pensar (...) en mi caso no soy muy bueno para expresar mis ideas por medio de una hoja y un lápiz"*

Se optó por esta técnica pensando en obtener evidencia desde la práctica, desde quienes motivan nuestra pregunta de estudio *¿cómo se representan los estudiantes nociones matemáticas variacionales?* y más particularmente *¿cómo conciben, entienden o se vinculan con nociones matemáticas relativas a la variación?* Interesa, a futuro, *develar presencia de epistemes estudiantiles* (Díaz, 2003) respecto de nociones variacionales.

Antecedentes Teóricos

Esta investigación se inscribe, por una parte, en el Programa de Pensamiento y Lenguaje Variacional, entendido como "una línea de investigación que, ubicada al seno del acercamiento socioepistemológico, permita tratar la articulación entre la investigación y las prácticas sociales que dan vida a la matemática de la variación y el cambio en los sistemas didácticos" (Cantoral y Farfán 1998). Y por otra parte considera el Programa de las Ideas Previas en donde "se concibe al aprendiz como "actor", constructor -en el curso de su historia social, en el contacto de la enseñanza, pero, mucho más aún, a través de todas las informaciones mediatizadas y las experiencias de la vida cotidiana- de una estructura conceptual en la que se insertan y organizan los conocimientos apropiados y las operaciones mentales matrices. Ese ensamblaje es, por un lado, una estructura que permite o no asimilar las nuevas informaciones y, por otro lado, un medio a partir del cual va a determinar sus conductas y negociar sus acciones" (Díaz, 2003).

Entenderemos que el aprendizaje, como cambio de representación, puede estar condicionado por la transformación o no transformación de otros tipos de representación del aprendiz. Por ejemplo, sus representaciones respecto de la educación y de sus propias capacidades. Así como también estarán presentes, interactuando con algún tipo de influencia, las representaciones sociales compartidas por su grupo de pertenencia y/o de referencia, el contexto más amplio de su cultura, las representaciones del formador y aquellas comprometidas en el tipo de saber que considera la situación de formación, tales como sus ideas previas (Díaz, 2003). Por su parte, las representaciones sociales se forman a partir de la lengua, las modas dominantes de la época y los modos de comunicación social, incluyendo las conversaciones cotidianas o "hechos anónimos". Y son sociales tanto por la naturaleza de sus condiciones de producción, como por los efectos que engendran y

por la dinámica de sus funcionamientos. Las representaciones individuales se elaboran parcialmente sobre la base de representaciones sociales, vehiculadas por el grupo de pertenencia y/o referencia de cada sujeto (Burgeois, citado por Díaz, 2003)
Otro campo que aporta a nuestra problemática son los estudios del lenguaje que se han abordado desde diferentes aproximaciones. Por ejemplo señala Candela (2001): "*para las nuevas perspectivas socioculturales (apoyadas en Vygotsky y Bakhtin) el concepto del contexto adquiere una gran importancia y la cultura se hace relevante para los estudios de la cognición [...] desde esta perspectiva el lenguaje no es un instrumento para la transmisión de información sino un medio dinámico para la acción socia*l". También menciona que "*dentro del campo de la semiótica y con fuerte influencia lingüística, aparecen los trabajos de Krees y Osborn (1998) en donde se estudia el lenguaje como uno de los modos que, en interacción con otras formas modales, permiten conocer la representación de conocimientos y estados mentales y la comunicación en contextos educativos*".
Adicionalmente, estudios recientes (Lakoff y Núñez, 2000) relevan que toda la actividad mental es de naturaleza corporizada, es decir, que productos de la cognición de alto nivel como son las ideas, los conceptos, la moralidad, los valores, y las teorías (incluyendo las científicas), son corporizadas. En particular, que los sistemas conceptuales humanos, incluso los más abstractos, se organizan en vastos sistemas de metáforas conceptuales cuyas verdades e inferencias no son literales, sino metafóricas. Es decir, verdades e inferencias que heredan su estructura de un dominio para aplicarse a otro totalmente diferente (Johnson, 1993). En suma, con esta sensibilidad teórica, abordaremos la determinación de las representaciones estudiantiles.

El instrumento exploratorio

Durante un curso de cálculo inicial se aplicó el instrumento de la bitácora personal de reflexión a estudiantes de pedagogía en matemática, de primer año[19]. Interesaba que profundizaran en sus entendimientos y que desarrollaran una sensibilidad didáctica respecto a lo que sucedía en el aula, en su calidad de estudiantes en formación inicial de pedagogía. Se adoptó una devolución escrita de cada bitácora por parte del profesor. Las retroalimentaciones procuraron poner el énfasis en el diálogo escrito con sus estudiantes, a partir de las características que arrojaba cada bitácora, con el fin de intencionar la apertura para el planteamiento de cuestionamientos que los llevaran a profundizar más sus ideas. Que desde los ires y venires del diálogo interpersonal *docente-bitácora-estudiante*, se fuese estableciendo un diálogo intrapersonal *estudiante-propios entendimientos*.

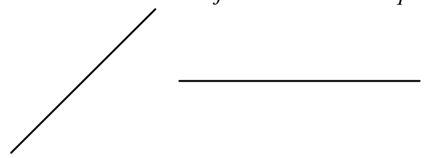
Evidencias recogidas de la aplicación

Presentamos pasajes de bitácoras que brindan información en tres niveles: *¿cómo los(as) estudiantes conciben, entienden o se vinculan con nociones matemáticas relativas a la variación?; relación interactiva durante el proceso; y visualización de estudiantes al final del proceso.*

[19] La experiencia se aplicó a dos cursos distintos en un semestre de 16 semanas. A un grupo se pidió un total de 12 entregas de bitácora y, a otro grupo, 5 entregas. Se cuenta con producciones de una parcialidad de ambos grupos. Quién impartió la asignatura y aplicó el instrumento, en ambos casos, fue el investigador.-

a) ¿Cómo los(as) estudiantes conciben, entienden o se vinculan con nociones matemáticas relativas a la variación?

"Cuando el dibujo que se muestra en la gráfica es una recta su razón de cambio es constante, cuando en el dibujo se ve una recta que no tiene movimiento, osea no varía. Su razón de cambio es cero." [Extracto bitácora 3]



Aquí una estudiante explicita lo que ella entiende, y con ello devela una representación de la variación por medio de su dipolo ("*...no tiene movimiento, osea no varía.*"). A la vez, presenta una cadena asociativa del tipo

no tiene movimiento → no varía → su razón de cambio es cero

para evidenciar su entendimiento. Una interpretación tentadora es que la estudiante hizo asociaciones no con un sentido propio sino por repetición de "equivalencias" aprehendidas de clases. Se observa que dicha cadena asociativa no la refiere para la variación de una posible magnitud de interés (representada con la gráfica) sino para la gráfica en sí misma. La corporización es fuerte. Da atributos de corporalidad a la recta. Para ella lo que se mueve o no se mueve es la recta, podríamos decir que lo que varía o no varía debe ser algo que ella tiene que "mirar" o "ver". Por otra parte, analizando este pasaje surgió una reflexión alternativa ¿cómo influye la representación cotidiana en el aprendizaje de los conceptos? arguyendo que "aquí no hay nada matemático" e infiriendo que "cuando hace la línea recta, esta no tiene razón para cambiar entonces sale recta" podría estar la posibilidad que refiera a "razón como motivo" lo que la hace recurrir a argumentos cotidianos en un esfuerzo por acercarse a conocimientos matemáticos. No se desprende claro, pero es una posibilidad de acción ya que la estudiante podría estar indicando que la primera recta se mueve (¿sube?) y que su razón de cambio (¿motivo de cambio?) es constante porque "va subiendo siempre igual" (se mueve, varía siempre igual). Siguiendo con la misma idea, la segunda recta no cambia porque "está acostada" "no va subiendo" "no tiene movimiento" y si no tiene movimiento no tiene razón (¿motivo?) para cambiar. Al hacer la interpretación que "sube" siempre igual, puede también abrirse la posibilidad de que la estudiante dialogue con una variación de la altura, sin embargo, aunque así fuese pareciera que persiste de todos modos la atribución del cambio a la recta, es decir, lo que está viendo explícitamente: su razón de cambio *es constante (en el caso de la primera) y su razón de cambio es cero (en el caso de la segunda).*

La presencia de lo cotidiano en el abordaje de la comprensión de lo matemático se manifiesta de modo más directo en la textualidad de otra estudiante cuando expresa en una de sus bitácoras:

"¿Por qué la derivada es una razón de cambio instantánea? He pensado mucho en la respuesta, al principio creí que se refería a instantánea, pues no había que hacer todo el proceso de aproximación a un valor exacto, aminorando Δt sino que se calcula instantáneamente el valor exacto mediante la definición formal de derivada. Luego pensé que era una razón de cambio instantánea pues se deriva en un punto, es decir, en un instante. Finalmente he pensado que se le da esta característica por la última razón, es decir, por que se calcula la derivada de un instante para así poder llegar a un resultado exacto, no es como aproximarse, achicando el Δt, sino que se parte del Δt más pequeño llegando así más eficazmente a la exactitud." [Extracto bitácora 3]

En este pasaje la estudiante intenta articular en torno al "calcular lo exacto" y "calcular en un instante" Inicialmente recurre a un esquema cotidiano para su búsqueda de respuesta. Desde su representación de "lo instantáneo" (como algo que se realiza de forma inmediata) se localiza en el aspecto procedimental de evitar "*hacer todo el proceso de aproximación, aminorando* Δt" y atribuye a la definición formal de derivada el rol de calcular "instantáneamente" lo que antes se hacía mediante un proceso más extenso, en lugar de una herramienta para calcular (cuantificar) el "cambio que se produce en un instante". Luego reformula su entender corporizando el instante en un punto (*"se deriva en un punto, es decir, en un instante").* Sin embargo, con su reflexión final, pareciera que de todas maneras sigue prevaleciendo su idea inicial del instante, entendido este como "un proceso más breve (menos cantidad de pasos) en el tiempo" cuando señala "*sino que se parte del* Δt *más pequeño"* pues ese partir denota el inicio de un proceso que debiera ser menor al inicial, sin lograr capturar la faceta numérica (física) de la derivada en un punto.

Por otro lado, al abordar el aprendizaje de nociones variacionales los estudiantes muestran ciertas valoraciones de facetas matemáticas por sobre otras. A veces, inclusive se ven obligados a usarlas como única vía de comprensión. Por ejemplo, una estudiante señala:

> *"Con respecto a mi problema con los gráficos es un poco complicado para mí explicarlo, ya que ni siquiera yo me comprendo[...] he llegado a la conclusión que mi problema es que no me logro ubicar en el plano, es decir tengo que recurrir a los números para poder creer que lo que pienso esta bien o no, por ejemplo sin los números no entiendo cuando una función desciende o aumenta y cuando es más lento o más rápido."* [Extracto bitácora 2]

Se aprecia su conflicto con la visualización gráfica y persistencia de la faceta numérica para comprender ideas variacionales. Nos está dando pistas de que distingue clases de variaciones: *rápida y lenta / aumento y disminución*. Pero ambas ligadas a un registro numérico lo que podría dificultar su manejo de nociones variacionales continuas.

b) Relación interactiva durante el proceso

Un mismo estudiante refiere durante sus bitácoras:

> *" A mi modo de pensar siento que la bitácora no es de gran importancia, porque usted nos hace reflexionar y profundizar [...] es eso lo que yo no entiendo, el para qué indagar tanto en la materia, sobre nuestro modo de pensar, o el modo de realizar los ejercicios."*
> "En mi caso no soy muy bueno para expresar mis ideas por medio de una hoja y un lápiz." [Extracto bitácora 4]
> *"A lo mejor a usted, no le va a gustar mi método, ya que me va a decir que me lo aprendí de memoria, aunque no sea así, sino fue algo, que descifré solamente con la vista, al tratar de comprender, cuando se trataba de una pendiente creciente o decreciente."* [Extracto bitácora 7]
> *"Voy a contarle algo que en un momento no tenía claro, y también le contaré como pude aclarar mi duda que me llevó, a más de un día en el cual, tuve que aplicar no sólo el cálculo matemático, sino la parte de la visión, y esto me ayudó a darme cuenta de lo que era..."* [Extracto bitácora 9]

Apreciamos una evolución respecto de la relación que tiene en el escrito con el profesor y de sus aprehensiones frente a la validación de sus ideas. Hay un tránsito por la relación triádica *profesor-estudiante-saber*. Podemos caracterizarlo de la siguiente manera: reclamo y luces de resistencia a reflexionar (es innecesario); alcance de una posible desaprobación del profesor pero de todos modos se anima; y apertura a dejar oir su voz.

c) Visualización de estudiantes al final del proceso.

Entre los estudiantes que completaron la bitácora, destacamos algunos pasajes relevantes:

> *"... cuando deseaba escribir sobre algo que no entendía, como para poder expresar que era lo que no entendía realmente, debía meterme más aún en el asunto, lo que provocaba que en vez de redactar lo que no entendía, terminaba explicando lo que había entendido y de que manera lo había logrado entender..."*
>
> *"...me a llevado a preguntarme ¿que realmente es lo que estoy aprendiendo?, y ese es el gran punto a cubrir por este trabajo (bitácora)..."*
>
> *" Cuando comenzamos el trabajo debo admitir que me desconcertó (...) no lograba entender que era lo que el profesor quería de ellas. Con el tiempo fui comprendiendo (...) cuando comenzaba a explicar lo que había logrado entender, según yo bien, comenzaban a aparecer los primeros signos de inseguridad sobre lo que sabía y si realmente estaba correcto. Fue en ese momento cuando pensé que ese era el real sentido de realizar dichos trabajos, comprender cuales son mis fortalezas y debilidades en relación a los temas abordados, no solo en cada bitácora sino en conjunto, como un todo, es preciso que esta reflexión no afloro de una bitácora para otra sino mas bien fue un proceso gradual que aun no termina..."*

En el primer caso una estudiante discierne que al explicar en su bitácora lo que no entiende se ve obligada a objetivar lo qué está entendiendo. Usualmente cuando un estudiante no entiende "algo", el docente no se involucra en demasía en lo qué este está entendiendo sino que se aboca a brindarle distintas explicaciones desde sus hipótesis "en acto". Por otra parte, la segunda textualidad sintetiza lo que produjo en este estudiante la experiencia y, en el caso de la tercera, tenemos un tránsito desde la incertidumbre a una comprensión de la actividad reconociéndola como un proceso gradual y duradero en el tiempo.

Consideraciones Finales

Con este estudio hasta el momento apreciamos que aspectos relativos a las representaciones que los estudiantes tienen de nociones variacionales distan de lo que suponemos se aprende en el aula. Lo cotidiano y una corporización de los objetos matemáticos pareciera persistir en las reflexiones estudiantiles. El instrumento de las bitácoras de reflexión personal nos situó en una mirada poco explorada: reflexiones de estudiantes al aprestarse a abordar y cuando están abordando el aprendizaje de nociones matemáticas, durante su experiencia de curso. Esperamos que las evidencias obtenidas aporten para la elaboración de diseños didácticos tendientes a mediar aprendizajes de nociones matemáticas variacionales.

Bibliografía

Brousseau, G. (1983). *Les obstacles epistemologiques et les problemes en mathematiques.* Recherches en Didactique des Mathématiques 4(2), pp. 165 – 198.

Candela, A. (2001). *Corrientes teóricas sobre discurso en el aula*. Revista Mexicana de Investigación Educativa, Vol.6, Número 12, pp. 317 – 333.

Cantoral, R. y Farfán, R. (1998). *Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis*. Revista Epsilon, Núm. 42.

Cantoral, R.; Farfán, R.; Cordero, F. y otros (2000). *Desarrollo del Pensamiento Matemático.* Ed. Trillas, ITEMS. México.

Cordero, F. (2001). *Las distinciones entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana.* En Relime, Vol. 4, Núm. 2. Ed. Thompson Learning. México.

Díaz, L. (1999). *Concepciones en el aprendizaje del concepto de límite. Un estudio de casos*. Tesis doctoral. Facultad de Educación. PUCCH.

Díaz, L. (2003). *Las representaciones sobre la variación y su impacto en los aprendizajes de conceptos matemáticos.* Dirección de Investigación, UMCE 2002-2003 y Proyecto Fondecyt 2003-2005.

Lakoff, G. Núñez, R. (2000) *Where Mathematics Comes From, How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*. Basic Cooks, EEUU.

Johnson, M. (1993) Conceptual metaphor and emboied structures of meaning, Philosophical Psychology, 6 (4)

Sierpinska, A. Y Lerman, S. (1996). *Epistemologies of mathematics and of mathematics education*. En: A. J. Bishop et al. (eds.), International Handbook of Mathematics Education (pp. 827-876). Dordrecht, HL: Kluwer, A. P. Traducción de Juan D. Godino.

Vasco, C.E. (2001). *El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías*. Conferencia en el Congreso Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Media de Colombia.

SIGNIFICATIVIDAD PARA LA PROPORCIONALIDAD INVERSA EN ESTUDIANTES DEL DÉCIMO AÑO DE ESCOLARIDAD

Fidel Ledesma Bruce
Tesista Magíster en Educación – UMCE, Chile
fledesmabruce@yahoo.com

Resumen
La preocupación por indagar en el tema de la Proporcionalidad Inversa se origina buscando un encuentro entre la visión de un estudiantado "constructor de su propio conocimiento" inspirado en el Proyecto Educativo Institucional, PEI, de un liceo municipalizado, con las prácticas pedagógicas de aula y sus ulteriores consecuencias en la devolución de razonamientos "razonados" por parte de los estudiantes. Los lineamientos constructivistas, inspiradores de la Reforma en el marco curricular, inserto en el sector de matemática son asimilados y sugeridos administrativamente, pero no se visualizan en las prácticas de aula en el intercambio de epistemes del estudiante y del profesor. Estas se evidencian en la recopilación de antecedentes - con los instrumentos de cuestionario y pruebas -. La forma tradicional de pensamiento tiene predominio de lo memorístico y con clara tendencia a la mecanización algebraica. Se trató de conocer y comprender algunos elementos relevantes y propios de una situación de aprendizaje en aula, donde intervienen en forma recurrente estrategias usadas por los estudiantes. La finalidad del estudio es superar la mecánica algebraica al abordar los desafíos impuestos por la epistemología del saber, mediado por su profesor en aula sobre la base de la Resolución de Problemas en Segundo Año de Enseñanza Media (décimo año escolar).. Para tal efecto, se trató de pesquisar otros elementos aledaños socio-culturales y cognitivos en el marco socio-epistemológico de la investigación para contribuir a una propuesta que permita avanzar en las representaciones estudiantiles en el contexto del Pensamiento Variacional.

Antecedentes
El marco curricular de la enseñanza media diseñado a través del decreto 240 de 1998 del Mineduc, considera al sector de matemática organizado en torno a tres ejes temáticos: Álgebra y Funciones; Geometría; Estadística y Probabilidad. El aprendizaje de la matemática está asociado específicamente al desarrollo de un conjunto de habilidades referidas a: Procedimientos estandarizables, Resolución de Problemas, Estructuración y generalización de los conceptos matemáticos. Este decreto recomienda que *"el proceso de aprendizaje en el aula se cimiente en contextos significativos y accesibles para los jóvenes, favoreciendo la comprensión por sobre el aprendizaje de reglas y mecanismos sin sentido" (Mineduc, 1998).* La Proporcionalidad Inversa se inscribe en el primer eje temático, es decir en "Álgebra y Funciones" y desea promocionar en el estudiante las habilidades prescritas anteriormente, y además, como al incorporar el uso de convenciones apropiados por el joven pasan a ser procedimientos rutinarios y algorítmicos. Sistematización del ensayo y error, aplicación y ajuste de modelos, y formulación de conjeturas. Incorporar relaciones entre los distintos temas y conceptos, y algunos antecedentes relativos a su evolución histórica. La Proporcionalidad Inversa en NM-2 se inscribe en los Objetivos Fundamentales de:

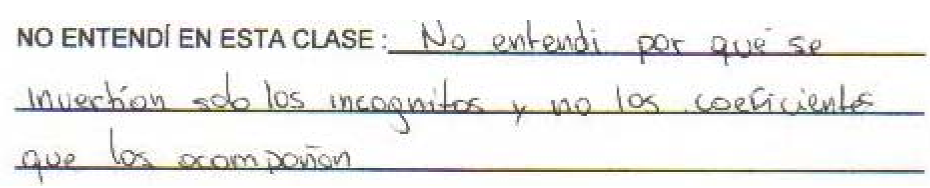
- Explorar sistemáticamente diversas estrategias para la resolución de problemas; profundizar y relacionar contenidos matemáticos.
- Percibir la relación de la matemática con otros ámbitos del saber.

En los Contenidos Mínimos, corresponde al Lenguaje Algebraico y en ellos se destacan las siguientes habilidades cognitivas:

- Expresiones algebraicas fraccionarias simples, (con binomios o productos notables en el numerador y en el denominador). Simplificación, multiplicación y adición de expresiones fraccionarias simples.
- Resolución de desafíos y problemas no rutinarios que involucren sustitución de variables por dígitos y/o números.

Se deja ver en estos enunciados una perspectiva estático –algebraica que dotará de sentido a la proporcionalidad inversa. Este marco epistémico raya una cancha muy difícil de remontar para una actividad de educación matemática de la proporcionalidad inversa que aporte significatividad a los estudiantes. Nobles aspiraciones educacionales no siempre son coherentes con las epistemes que les subyacen y menos con el darse cuenta de sus actores de ellas. Por su parte, tampoco estará en consonancia con las prácticas pedagógicas más comunes en matemática, pues la estructura formal[20] de la disciplina muchas veces impide durante la enseñanza de conceptos, la diversidad de aperturas de razonamientos al interior de la propia disciplina así como su vinculación con otras áreas de saberes disciplinares. Por su parte, hace ya más de cuarenta años que Kuhn (1963) develara modos de elaboración propios de las disciplinas mostrando su devenir tiempos de normalidad seguidos de "revoluciones científicas" (…) "con estructura que reaparece regularmente" apareciendo conjeturas que tradicionalmente no son asimiladas en una perspectiva interdisciplinaria, conjeturamos la presencia de "anomalías" al decir de Kuhn. Esto nos anima a revisar conceptos y procedimientos asociados a los saberes comprendidos bajo la Proporcionalidad Inversa en su deriva histórica, epistemológica y sociocultural.

Evidencias desde las prácticas de aula. A continuación se presentan textualidades de los estudiantes, luego de haber resuelto de manera tradicional un problema con enunciado en la pizarra, por medio del grupo disertante, en el marco de contenido de la Proporcionalidad Inversa:


NO ENTENDÍ EN ESTA CLASE : No entendi por qué se invertion solo los incognitos y no los coeficientes que los acompañan

Otros comentarios de los estudiantes, luego de trabajar problemas de enunciado verbal de proporcionalidad inversa, son los siguientes:

"Por qué había que dar vuelta una parte del sistema inverso"

"Cuando se invierten las incógnitas en las ecuaciones de 3x3 indirectas"

"El último problema ya que era muy largo y no supe como seguir"

"Por qué dar vuelta una parte de la ecuación en la variable inversa"

"Me quedó una duda respecto a un problema 3x3 inverso el cual el inverso de 2c, es 2/c según nuestro compañero, lo que creo que está bien, pero también podría ser

[20] Podemos, en principio, distinguir perspectivas formalistas, logicistas y empiristas de entender la matemática con su subsecuente trasposición al aula de cada una de ellas.

1/2c. Lo que debo hacer para comprender lo anterior es tratar de resolver el ejercicio de esta forma, y si no me resulta, preguntar a los que más sepan."

Estas textualidades muestran como las prácticas operatorias mecanicistas dejan a los estudiantes con un sinnúmero de preguntas en un registro algebraico lejano de la significatividad que requiere el tema de la proporcionalidad inversa.

Propósito del estudio

Se presenta en este artículo, elementos concomitantes principales que llevan a los estudiantes a usar determinadas estrategias recurrentes de aprendizaje conducentes a la mecanización algebraica en la resolución de problemas con enunciados verbales escritos, relativos a la Proporcionalidad Inversa y relevar aspectos de una enseñanza que favorezca la significatividad de los aprendizajes en el estudiantado. Posteriormente se espera levantar secuencias didácticas que recurran a diversidad de registros: gráficos, numéricos, tabulares, iconográficos, simbólicos y que muestren al discurso curricular sobre la proporcionalidad como un cuerpo de saberes coherente y consistente al interior del currículum de la Educación Matemática y que promueven aprendizajes reflexivos. Más específicamente se procuran los objetivos de:

- Estudiar e interpretar las representaciones que exponen los estudiantes a la hora de explicar sus producciones relativas a la Proporcionalidad Inversa. En particular determinar los que entienden por "estrategia de solución de problemas", en su uso cotidiano en aula.
- Determinar representaciones de Proporcionalidad Inversa en los estudiantes.
- Estudiar la Proporcionalidad Inversa en su devenir histórico y su evolución socioepistemológica.
- Diseñar alternativas de aprendizaje, con sustento en la micro ingeniería didáctica, para abordar la enseñanza de la Proporcionalidad Inversa.
- Validar localmente una secuencia didáctica en pequeños grupos.
-

Hallazgos de la primera fase del estudio: Corporalizar la Proporcionalidad Inversa

Ejemplos ilustrativos: El sobre pastoreo o el relato de la "tragedia" causada por las ilimitadas necesidades del ser humano, en un mundo limitado por su naturaleza, planteado por el biólogo Garret Herdin en el marco de una sensibilidad ecológica. En esta ilustración el proceso "inverso" adquiere autonomía. También se observa esta autonomía en otra ilustración, a saber, la actividad agrícola en las civilizaciones remotas, y que es totalmente distinta a la anterior: "Un campesino sabe que, en un surco de 33 m de largo debe arrojar 15 semillas por cada metro que avanza. Para anticiparse y aprovisionarse, resuelve mentalmente de la siguiente manera, con 15 semillas en cada metro que avanzo, es parecido a que si fuera la "mitad" del largo del surco, pero el doble de la cantidad de semillas (16 y 30); si ahora considero la mitad de 16 entonces, será el doble de semillas 8 y 60; luego, la mitad de este y el doble de la cantidad de semillas que tengo, se tiene 4 y 120; pero efectuando el mismo razonamiento recursivo se tiene 2 y 240 semillas, hasta finalmente lograr representar

el 1 con 480 semillas, pero para mayor seguridad le agrego 15 semillas más, así que la cantidad total de semillas que debo llevar es de 495".
Esta forma de resolver empíricamente encierra un proceso de Proporcionalidad Inversa, ya que se manifiestan dos conceptos (relación dual) reiteradamente que son "mitad" y "doble" respectivamente. Es decir, el $\frac{1}{2}$ y 2 serán números recíprocos con respecto de la unidad.
Actualmente, esta situación planteada queda resuelta de inmediato usando la multiplicación 33 x 15 = 495. Pero se trata de rescatar las cualidades de razonamiento autónomos que se presentan en la vida diaria y que se puedan desarrollar en forma independiente de otros contenidos. Así, la interpretación aritmética que representa la situación antes descrita es:

Primer nivel	33 y 15		
Segundo nivel	16 y 30	anulado	
Tercer nivel	8 y 60	anulado	+
Cuarto nivel	4 y 120	anulado	= 495
Quinto nivel	2 y 240	anulado	
Sexto nivel	1 y 480		

Las instrucciones para llegar al total son simples:

- Se anulan o eliminan todos los niveles donde aparecen "mitades" ó Nº par de la primera columna.
- Los otros niveles que quedan representados por impares, se suman los "dobles" ó N^{os} de la segunda columna.

Una práctica ancestral. Este proceso tiene sustento en la génesis del pensamiento matemático en el siglo XX A. C. en Babilonia y Egipto. En los papiros de esa época aparecen "tablas de los recíprocos" con números regulares sexagesimales que se aprovechaban también para la división, como se fundamenta de acuerdo a la historia (Katz, 1998). Profundizando el análisis aritmético en los niveles "anulados" se puede establecer la siguiente relación algebraica:

2º nivel 16 y 30	, entonces	$16 \cdot 30 = 480$	El resultado es una constante (k)
3ER nivel 8 y 60	"	$8 \cdot 60 = 480$	
4º nivel 4 y 120	"	$4 \cdot 120 = 480$	
5º nivel 2 y 240	"	$2 \cdot 240 = 480$	

Esto permite identificar, según esta práctica originaria en matemática, un modo de operar "inverso" que combina a la multiplicación tradicional con la preservación de una constante (k).

Ampliando este modo de operar o mejor dicho, transfiriéndolo al decir de la matemática contemporánea, se puede decir que dos variables o magnitudes se comportan inversamente, si los productos sucesivos por nivel se mantienen constantes. Además, es posible afirmar el sentido contrario, que si dos variables o magnitudes son inversas, entonces el producto entre ellas por nivel es constante. Esto es posible ampliarlo más allá de los números naturales y establecer la igualdad en los números reales,
$m \cdot n = k$ (constante).

Recientemente se afirma en el libro Where mathematics comes from (2001): "*que incluso un cuerpo de conocimientos tan abstracto, objetivo, preciso, efectivo, y que aparentemente transciende a la naturaleza humana, como son las matemáticas, resulta ser un producto originado por la complejidad de nuestra unidad mente-cuerpo*" (…) "*Lo esencial es que en la base de las ideas y de la construcción conceptual se encuentra las experiencias corporales, tales como experiencias térmicas ("ella es una persona fría"), dinámicas ("el dólar subió varios puntos"), kinestésicas ("me llenó la cabeza con ideas estúpidas"), olfativas ("esta situación me huele mal"), etc. Todo sistema conceptual, incluso los más abstractos, como aquellos que constituyen las matemáticas, se crean y se realizan gracias a mecanismos cognitivos elementales, entre ellos las metáforas conceptuales*" (Núñez y Lakoff, 2000).

Desde esta perspectiva, "corporalizamos" el modo de operar de la proporcionalidad inversa: buscar la manera de interpretar las cualidades propias de "dimensiones o variables" que se relacionan de forma polar, aceptándose y reconociéndose mutuamente, de acuerdo a un mismo referente, con comportamientos "inversos" en el dinamismo que se desea describir. Es decir, no se busca la aparición de una tercera dimensión o variable distinta como resultado, sino cambios de comportamientos que tienen lugar al interior de esta dualidad. Sería el tipo de "corporalidad" implícita en culturas de épocas remotas expresadas en las "tablas de los recíprocos" babilónicas con sistema numérico de base 60. Sería plausible conjeturar entonces la posibilidad de dar significatividad - a la luz de estos hallazgos - de "manera natural" a un encuentro del concepto de "inverso" con el significado cultural de "reciprocidad" en las representaciones estudiantiles. No sería entonces un modo de operar "inverso" de otro modo de operar - de una "proporción directa" como se plantea desde la perspectiva formalista de la matemática - sino que más bien se refiere a un modo de operar con un sentido en sí mismo, el que tiene que ver con un modo de pensar asociado a la cualidad de la "reciprocidad".

Articulando una concepción de Pensamiento Variacional Recíproco, PVR. Tendiente a favorecer aprendizajes en estudiantes que hoy entendemos deben lograrse sobre la base, y desde de la *complejidad de nuestra unidad mente-cuerpo.* En suma se propone entender por PVR:

> "Esquemas enactados que ponen en acción los estudiantes, a propósito de estudiar situaciones de covariación, que tienen el desafío de un producto constante"

donde se entiende por "esquemas enactados" a las representaciones personales - en el sentido señalado por Bourgeois (Díaz, 2003), las cuales se elaboran parcialmente sobre la base de representaciones sociales, vehiculadas por el grupo de pertenencia y/o referencia de cada estudiante - que trae a la mano el estudiantado al abordar la actividad escolar en una temática particular. Estas representaciones comprenden dos tipos de estructuras cognitivas, a saber: Esquemas Operatorios y Representaciones Proposicionales, aludiendo la primera a un modo de operar y teniendo la segunda dos componentes, la cognitiva propiamente tal y la normativa. Por su parte se entiende por "situaciones de covariación" en el dominio de la didáctica matemática, aquellas situaciones en que hay una variación conjunta de dos cantidades, cantidades que responden a una relación "polar" entre ellas. A su vez, el desafío de un "producto constante" refiere a un desplazamiento cognitivo coherente, sobre la base de asociar invariantes, cualidades a preservar en el dominio de saberes ecológicos y cantidades constantes en el dominio de una variación proporcional reciproca.

A modo de conclusión

La temática de la Proporcionalidad Inversa muestra carencias de entendimientos en las producciones estudiantiles, producciones que se remiten al registro algebraico y un sinnúmero de dudas del sentido de las mismas. Lejos queda la aspiración por un estudiantado "constructor de su propio conocimiento" de los Proyectos Educativos Institucionales. Este estudio se planteó iluminar prácticas pedagógicas favorecedoras de operatorias razonadas entre los alumnos. Se dirige a determinar y comprender algunos elementos relevantes y propios de una situación de aprendizaje en aula que apunte a superar la mecánica algebraica al abordar los contenidos de proporcionalidad inversa. En su primera fase se pesquisó en la génesis de estos modos de operar en la historia. Sobre la base del análisis de tablas babilónicas, el modo de reflexionar la proporción entre surcos y semillas del campesino de la edad media y el desastre ecológico de la sobre-explotación del sembradío actual, por una parte, y, por la otra, de los avances en el campo del lenguaje y las neurociencias para entender los procesos de construcción de saberes, se relevan las nociones de las metáforas corporales y las metáforas conceptuales como herramientas principales para resignificar la enseñanza de la proporcionalidad inversa en las prácticas docentes, en el marco socio-epistemológico de la investigación para contribuir a una propuesta que permita avanzar en las representaciones estudiantiles en el contexto del Pensamiento Variacional.

Bibliografía

Boyer, C. (1986). *Historia de la Matemática* Ed. Alianza. Madrid

Cantoral, R. Y Farfán, R (1998) Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Revista Epsilon, Num 42.*

Cantoral, R et al. (2000). *Desarrollo del pensamiento Matemático*. Ed Trillas México.

Cantoral y Reséndiz (2003). El papel de la variación en las explicaciones del profesor: un estudio en situación escolar. *Revista Relime* Vol.6 (pp. 133 – 154) México.

Cofré, A. y Russell, A. (2002) *Educ. Matemática 7º año básico* Ed. Mc Graw Hill. Chile

Cofré, Cortés y González (2002)*Matemática activa* Ed. Mare Nostrum. Chile

Díaz, L. (1999). Concepciones del Aprendizaje del Concepto de Límite. Un estudio de casos. Tesis Doctoral, P. U. C. Santiago de Chile.

Díaz, Leonora (2003) *Las representaciones sobre la variación y su impacto en los aprendizajes de conceptos matemáticos*. Dirección de Investigaciones, UMCE 2002-2003. y proyecto Fondecyt 2003-2005. Chile

Flavell, J. H. (1987). Speculations about the nature and development of metacognition, *en Weinert y Kluwe. Metacognition, motivation and understanding*, 21 – 29, Hillsdale, Nueva Jersey, Lawrence Erlbaum.

Fischer, J. (2002). *Prácticas Docentes Universitarias*. Ed. Universidad del Biobío, Chile.

Kast, Víctor (1998) *A History of Mathematics* Ed. Addison Wesley. USA

Núñez y Lakoff (2000) *Where Mathematics Comes From.* Ed. Basic Books. New York.

Soto, Isabel (1994) *Enseñanza de las Matemáticas: Algunos problemas y Desafíos* Ed. CIDE Stgo.-Chile

SOBRE LA NOCIÓN DE CONTINUIDAD PUNTUAL: UN ESTUDIO DE LAS FORMAS DISCURSIVAS UTILIZADAS POR ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS EN CONTEXTOS DE GEOMETRÍA DINÁMICA

Eddie Aparicio y Ricardo Cantoral
Universidad Autónoma de Yucatán y Cinvestav IPN. México
alanda@tunku.uady.mx ; rcantor@mail.cinvestav.mx

Resumen
En este trabajo se aborda un problema de enseñanza ligado al aprendizaje de conceptos básicos del análisis matemático clásico, particularmente nos ocupamos del concepto de continuidad puntual de una función real de variable real que es enseñado al nivel universitario. Se analizan algunas de las formas discursivas y acciones gestuales utilizadas por los estudiantes cuando estos discurren sobre la noción de continuidad puntual. Para ello, nos valimos de un diseño experimental basado en la aproximación teórica de naturaleza sistémica a la investigación en Matemática Educativa, la Socioepistemología. En este diseño se supuso que los conocimientos matemáticos en la mente de los estudiantes son el producto cultural de una serie de prácticas sociales. Específicamente, trataremos con la dimensión gestual de las acciones de visualización que los estudiantes movilizan cuando se desempeñan en el marco de un diseño experimental basado en la geometría dinámica. Al respecto utilizamos *Sketchpad, 4.0* - programa dinámico de geometría- .

Introducción
El concepto de continuidad puntual de funciones reales de variable real es considerado básico en la enseñanza matemática universitaria. En la mayoría de los sistemas escolares, la presentación habitual de dicho concepto inicia considerando la definición de continuidad puntual de una función en un punto interior de un conjunto abierto en los reales. En seguida, se discuten al nivel operativo algunos criterios para decidir la continuidad o discontinuidad de una función en un punto. Sostenemos que este tipo de tratamiento escolar induce problemas de aprendizaje entre los estudiantes. Presuponemos que la noción de continuidad, en un sentido global, posee un carácter apriorístico en el ser humano. *Las personas perciben el cambio en su estudio de fenómenos reales en términos globales, no locales*. Tomemos por ejemplo, al movimiento libre de la mano que se desplaza de un lado a otro sin cesar, les imaginamos trayectorias continuas describiendo su movimiento, la mano entonces, recorre todos los puntos intermedios entre un extremo y el otro sobre su trayectoria, ¿cómo no habría de hacerlo? De la misma manera, en la caída de los graves se piensa que estos pasan por todos los puntos intermedios de su trayectoria.
Recientemente diversas investigaciones han buscado fundamentar la idea de emplear en el discurso escolar, elementos más diversificados y más interdependientes que no limiten la práctica escolar al tratamiento de los métodos y procesos algorítmicos ya sean estos de naturaleza aritmética o algebraica. Algunos ejemplos en la literatura especializada dan muestra de ello (Alanís, 2002; Dolores, 1999; Cantoral y Montiel, 2001). En nuestro estudio (Aparicio, 2003) detectamos que el aspecto gesticulativo permite a los estudiantes no sólo concebir a la función en general y a la función continua en un punto en particular, como un objeto susceptible de ser operado, sino que también son capaces de transitar entre las cinco diferentes representaciones, lo algebraico, numérico, geométrico, icónico, verbal – gestual- .

La continuidad: una visión en situación escolar

En la siguiente figura (fig. 1), hemos querido mostrar mediante un esquema, la estructura que se sigue en el tratamiento del concepto de continuidad en la mayoría de los textos escolares contemporáneos y la cual hemos considerado genera problemas de aprendizaje.

Estructura de la enseñanza de la continuidad puntual

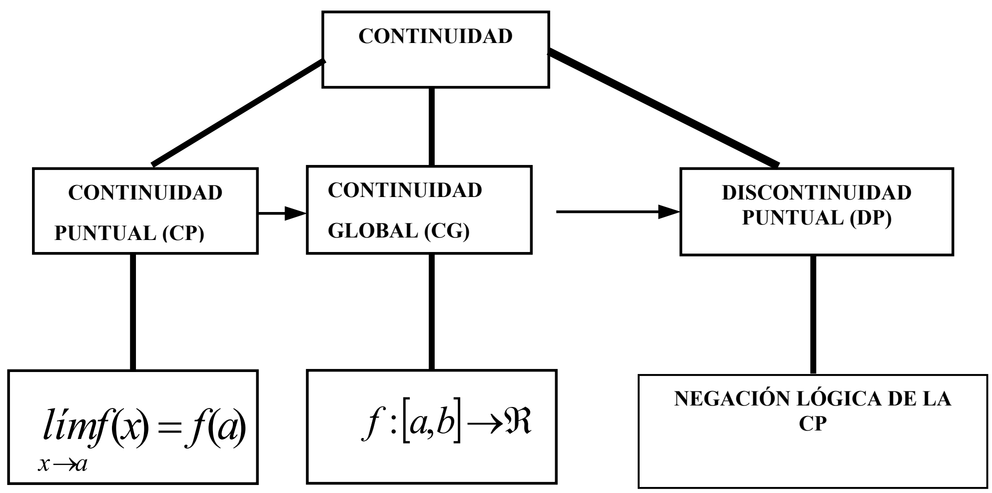


Figura 1

Perspectivas didácticas en el Análisis

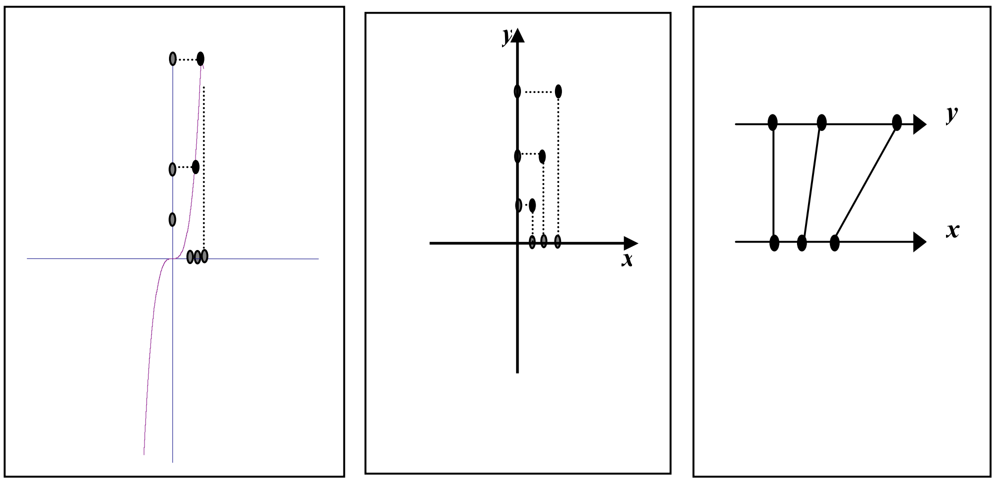
Investigaciones como las de (Tall, 1981; Hitt, 1994; Sierra, 2000), señalan que las concepciones de los estudiantes sobre el concepto matemático de función continua están distantes de la definición formal que la enseñanza les ha dado. Sostienen además, que algunas de tales concepciones son el producto inducido desde su propia enseñanza. Estos estudios suelen centrar la atención en la forma en que el objeto matemático *función* es operado por el sujeto –alumno- que aprende al momento de resolver ciertos problemas o acertijos matemáticos. Investigaciones como estas, buscan aportar elementos que permitan entender y explicar algunas de las problemáticas asociadas al aprendizaje de la continuidad de una función. En general, la guía seguida consiste en actuar sobre el objeto matemático (funciones continuas en este caso) considerándole como una entidad preexistente a toda práctica de comunicación. Las preguntas que elaboran para clasificar las respuestas son del tipo, diga si es o no continua esta función, decida del conjunto de gráficas siguientes cuáles se corresponden con funciones continuas, etc. En cierto sentido, preguntan directamente lo que esperan ver aparecer, la continuidad, ignorando el hecho que quizá dichas respuestas estén ya condicionadas por las prácticas escolares. Por nuestra parte en cambio, seguimos un camino distinto pues el acercamiento didáctico que utilizamos es basado en un resultado de naturaleza epistemológica que quisimos continuar a la didáctica. De modo que, en nuestro diseño suponemos a la noción de continuidad puntual como una consecuencia de la discontinuidad puntual y no de la noción global de continuidad. Esto es, consideramos que la noción de continuidad puntual se estabiliza entre los estudiantes sólo hasta que esta aparezca como un medio para evitar las discontinuidades de orden puntual.

La perspectiva Socioepistemológica

La Socioepistemología es una aproximación que busca dar explicación de los fenómenos didácticos producidos en el campo de las matemáticas mediante el entendimiento de la construcción social del conocimiento y bajo un enfoque sistémico, que precisa de la incorporación de aspectos sociales, como la comunicación, la búsqueda de consensos, la construcción de lenguajes o el diseño de herramientas, en el estudio de tales fenómenos. En este sentido, desde esta perspectiva, la construcción de un conocimiento matemático necesariamente se encuentra ligado a aspectos más amplios y que rebasan la mera organización teórica del contenido: Aspectos epistemológicos, prácticas socioculturales, procesos avanzados del pensamiento y aquellos que tienen que ver con el funcionamiento de una institución escolar (Cantoral, 2001). De manera que, al centrar la atención en la definición formal del concepto, más que en el uso que los sujetos den en situaciones específicas, se dejan de lado algunos aspectos discursivos fundamentales para su aprendizaje. Tomemos por caso a la argumentación verbal que los alumnos pueden hacer al momento de articular sus expresiones lingüísticas con los aspectos propiamente gestuales que se utilizan al mover la mano, al recorrer una curva, y que proveen de elementos esenciales al proceso de visualización. De manera que resulta necesario entonces, reconocer el tipo de pensamiento y estrategias que el alumno pone en juego en el momento de generar conocimiento. Por ejemplo, analizar aquellas estrategias que en su naturaleza son de tipo variacional. Es así que partiendo de nuestros supuestos, decidimos ampliar las perspectivas ofrecidas en la didáctica del análisis, determinando incorporar como elementos de la investigación las prácticas asociadas a los objetos teóricos, procesos y conceptos. Así, además de las definiciones y los teoremas exploramos los usos lingüísticos, las gesticulaciones que sobre las nociones de continuidad y discontinuidad puntual se llevan a cabo entre estudiantes universitarios (Aparicio, 2003, Aparicio y Cantoral, 2002). Por ejemplo, hemos notado que la definición formal de continuidad puntual no parece constituir una base adecuada a partir de la cual sea posible construir significados asociados a la continuidad global. La extraña noción, de función continua en *un punto*, parece contravenir las cuestiones apriorísticas de la continuidad global.

La secuencia didáctica

La implementación de la secuencia se llevó a cabo con ocho estudiantes (cuatro mujeres y cuatro hombres) de Ingeniería en Mecatrónica, Telemática y Biónica, la elección se hizo con base en los resultados de una actividad exploratoria aplicada a 30 estudiantes de las mismas especialidades, el requisito básico para la selección consistió en tener un cierto conocimiento de las funciones elementales del cálculo y un adecuado manejo sobre su representación gráfica. El desarrollo de la experimentación se realizó empleando papel, pizarrón y computadora. Con una serie de actividades ante la pantalla de la computadora y de acuerdo a tres fases previamente diseñadas. La fase de preparación para la lectura de las actividades, la fase de desarrollo de la secuencia y la fase de institucionalización de los saberes. En la primera fase, se buscaba desarrollar las competencias necesarias entre los estudiantes para la adecuada lectura de las actividades planteadas – desarrolladas en una computadora utilizando el programa de geometría dinámica *Sketchpad, 4.0* - . En esta fase, se le presenta a los alumnos una secuencia de proyecciones en una pantalla, mostrándoles una gráfica conocida (la gráfica de la cúbica) y la consideración de tres puntos arbitrarios sobre ella, así como sus respectivas sombras o proyecciones sobre los ejes coordenados (fig. 2).



Tres puntos sobre la gráfica

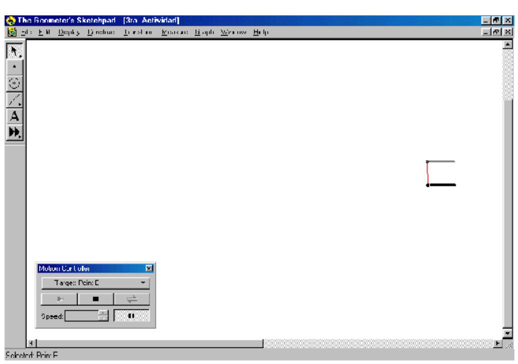
Se quita la gráfica

Ejes paralelos

Fig, 2

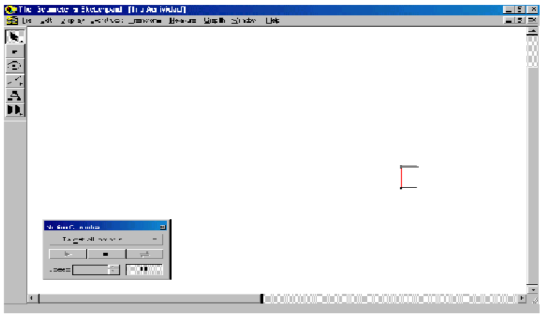
Fase 1

En la segunda fase se establece el escenario donde los alumnos discutirían la noción de continuidad puntual, a partir de la percepción global de la continuidad y la noción de discontinuidad puntual, mediante la explicitación de expresiones funcionales asociadas a las representaciones dinámicas vistas en la pantalla de la computadora. En la última fase, (fase de institucionalización) se planteaba una discusión entre los miembros de los dos equipos y la coordinación del instructor sobre las conclusiones

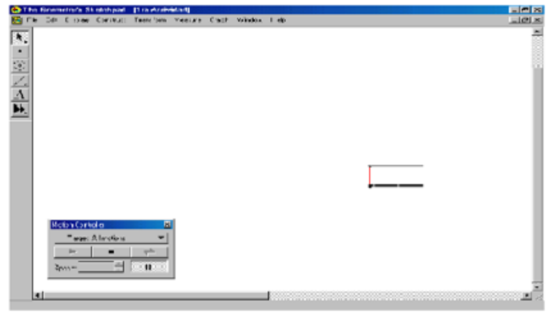


finales obtenidas. La secuencia didáctica estuvo formada por cuatro actividades en la pantalla de la computadora. Por razones de espacio, sólo mostraremos la actividad 1 y la actividad 3. Las actividades 2 y 4 pueden considerarse como similares. Para más detalle consúltese (Aparicio, 2003).

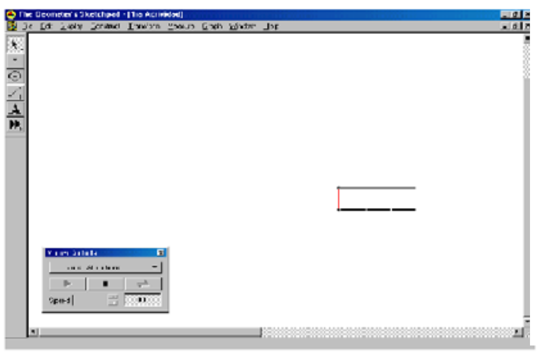
Actividad 1. ¿Existe alguna función real de variable real asociada a lo que observas en la pantalla de la computadora? Recordemos que los alumnos veían en la pantalla una animación, movimiento de puntos y líneas sobre el monitor.



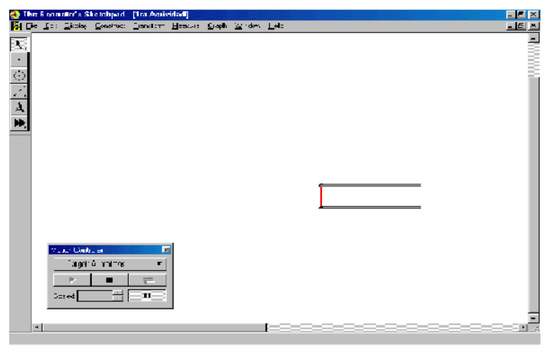
1er. instante



2º. Instante



3er. instante



4º. instante

Qué dicen y cómo gesticulan

A$_R$: El punto *x* es igual al punto *y,* entonces $f(x) = x$

Señala el movimiento de los puntos (verde y amarillo) repasando la línea roja que los une, indicando la relación entre x & y.

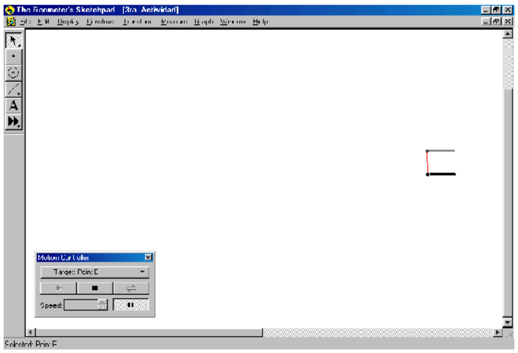
A$_S$: $f(x) = f(y)$ o el punto *x* es igual punto *y* entonces la gráfica será $y = x$,

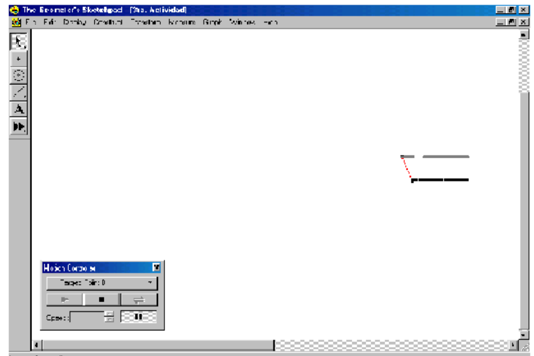
Comentario del investigador*:* ¿En qué se basaron para decir o concluir eso?

A$_R$: Se mueven a la misma velocidad. El mismo punto verde se proyecta en el mismo punto amarillo. La función es $f(x) = x$

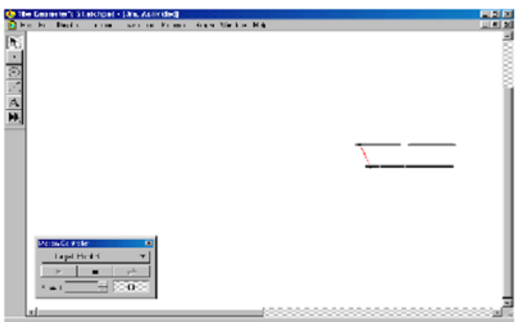
A$_R$ *ve detenidamente la representación en la pantalla y simula el movimiento con sus manos y los puños cerrados.*

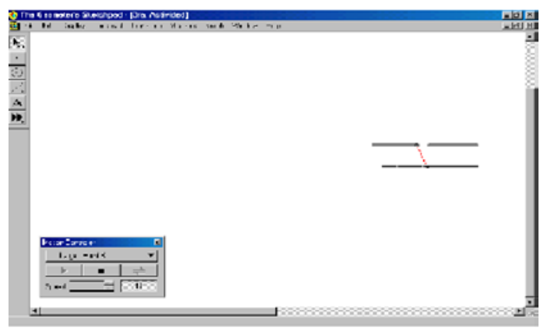
Actividad 3. ¿Existirá una función real de variable real que nos describa lo que se mira en la pantalla siguiente?





1er. instante   2º. Instante





A_O: Mira como aquí se va derecho y aquí se va..., (indica la inclinación de la línea roja que une los puntos de la línea verde con la línea amarilla)
señala la primera parte de la línea amarilla de derecha a izquierda con el dedo índice e inmediatamente cuando pasa por el lugar donde deja de pintarse la línea amarilla, inclina la mano de manera suave y sigue el movimiento constante y suave del recorrido.
A_L: Tendría que ser una función definida en dos partes.
Este alumno observa el comportamiento de la línea amarilla e induce su conjetura, su rostro por su parte muestra gran seguridad de lo que dice.
A_O: si ¿no?, no puede ser una sola, yo digo!!!

A manera de conclusión

Apuntaremos que los resultados obtenidos, proporcionan información significativa sobre el aporte del aspecto gesticulativo en el proceso de estabilización del concepto de función continua en un punto. Identificamos algunos elementos esenciales en las formulaciones de las repuestas de los estudiantes tanto a un nivel individual como grupal. Por ejemplo, identificamos que la posibilidad de visualizar y el acto de visualización no se ven reducidos al uso de una herramienta tecnológica, en nuestra opinión diremos que la incidencia de la dimensión gestual es un medio que permite articular las acciones de visualización de conceptos matemáticos, de manera que una representación en la pantalla de la computadora sólo permite fincar un escenario donde el estudiante habrá de ampliar y generar nuevas significaciones, más aun, si dichas representaciones son articuladas con lo gestual. En nuestro diseño, la noción de continuidad puntual en ningún sentido se refería de manera explícita -esta aparece como el resultado de la interacción entre el alumno, su entorno y el concepto-. El enfrentamiento de los estudiantes con la noción de continuidad global y continuidad puntual les permitió generar argumentos de corte discursivo matemáticos y estabilizar la noción de continuidad puntual. Entre los primeros se encuentra el uso de la analogía, el recurso de la metáfora y lo gestual como antecedentes a los recursos matemáticos. Citemos como casos, aquellos donde los estudiantes utilizan expresiones lingüísticas como "salta", "brinca", "se corta" "no se borra" y las hacen acompañar de la dimensión gestual para finalmente ligarlas a un conocimiento escolar. Así, experimentamos la idea de que el ubicar a un estudiante en un escenario donde pueda utilizar expresiones discursivas y gestuales, de suerte que no se vea restringido a su dominio de saber escolar "condicionado" va a permitir que este estudiante resignifique y construya nociones matemáticas. Esto permitirá entender algunas formas en cómo se produce aprendizaje.

Bibliografía

Aparicio, E. y Cantoral, R. (2002). Visualización y tecnología: un enfoque a las aproximaciones sucesivas. En *Actas de la 16a. Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa.* Grupo Editorial Iberoamérica.

Aparicio, E. (2003). *Sobre la noción de continuidad puntual: Un estudio de las formas discursivas utilizadas por estudiantes universitarios en contextos de geometría dinámica.* Tesis de maestría, Cinvestav, México.

Cantoral, R. et al (2000). *Desarrollo del pensamiento matemático*. Editorial Trillas.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2000). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. En *el futuro del Cálculo Infinitesimal*. Grupo editorial Iberoamérica.

Cantoral, R (2001). La Socioepistemología: Una mirada contemporánea del quehacer en Matemática Educativa. *Antologías*, Núm. 1. Publicaciones de la red de Cimates – Clame.

Cantoral, R & Montiel, G. (2001). *Funciones : Visualización y Pensamiento Matemático*. Prentice-Hall. México.

Dolores, C. (2001). Los significados del lenguaje variacional en el aprendizaje de la matemática. *Antologías*, Núm. 1

Hitt, F. (1994). Teachers' difficulties wiht the construction of continuous and discontinuous functions. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 16* (4): 10-20.

Sierra, M., et al. (2000). Concepciones de los alumnos de Bachillerato y curso de orientación universatiria sobre límite funcional y continuidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 3*(1): 71-85.

VISUALIZANDO LO QUE VARÍA

Eduardo Carrasco Henríquez
Tesista Magíster en Matemática Educativa, Cicata IPM, México
ecarrascr17@yahoo.com

Resumen

Los obstáculos para operar con la visualización por parte de los estudiantes, a la hora de estudiar lo que varía, muestran la importancia de promover el desarrollo de una "inteligencia visual". En especial la construcción de gráficas, dado que es una importante herramienta que permite a los estudiantes realizar una actividad matemática escolar y por tanto desarrollar un pensamiento matemático. Herramienta didáctica que ha ido, desde el surgimiento de la tecnología digital, cobrando mayor importancia en la investigación tanto matemática como en didáctica de las matemáticas. A modo de ilustración en el comportamiento tendencial (Cordero, 2001) de las funciones, un estudiante aprende a "identificar" coeficientes en la función, a "reconocer" patrones de comportamientos gráficos, a "buscar" tendencias en los comportamientos y a "relacionar" funciones. En didáctica de las matemáticas, el uso y articulación del registro algebraico con los otros registros (fenómenos, algebraico, tabular, numérico, entre otros). Sobre la base de mis ideas previas, de las discusiones con colegas y de prácticas de aula, se visualiza como un importante obstáculo, la determinación por parte de los estudiantes de las magnitudes que varían en un fenómeno, principalmente aquellas variables que no son visibles de manera directa, como es el tiempo. Por ejemplo, confundir la variación de la altura con la velocidad del llenado de recipiente. Producciones de estudiantes señalan mayoritariamente que un recipiente más angosto se llena más rápido que uno más ancho, aún cuando la llave vierta la misma cantidad de líquido y ambos tengan igual capacidad. Ello sumado al discurso matemático escolar que aún muestra una matemática estática, dan cuenta de un currículo que no considera el pensamiento variacional (Díaz, 2003). Las producciones de los estudiantes exhiben importantes obstáculos a la hora de trabajar y utilizar la herramienta gráfica en la resolución de problemas matemáticos y de otras ciencias. Este trabajo, que se enmarca en la fase de "análisis preliminar" de una ingeniería didáctica, busca profundizar en la construcción de gráficas de fenómenos de variación en el tiempo. Indaga en relación a los obstáculos para construir, interpretar y trabajar con gráficas y esquemas que requieren al tiempo como variable explicita, con el propósito ulterior de aportar a la construcción de situaciones didácticas que permitan a los estudiantes construir las herramientas de visualización gráfica de fenómenos de variación, y, reversiblemente, hipotetizar fenómenos desde gráficas, así como articular estos modos de representación con otros registros de representación semiótica matemática.

Antecedentes

Cuantificar lo que varía, dibujando lo que varía

Abordamos el estudio de la visualización desde la socioepistemología, que sustenta que el sistema escolar se constituye por estudiantes, docente y saber, integrados en dimensiones que se interrelacionan y conforman un todo contextual. Estudia el saber al que concibe de naturaleza social y se configura en su formación histórica y cultural y en su producción y reproducción social. Integra en sus análisis las variables epistemológica; cognitiva; la naturaleza de las interacciones a que da lugar el proceso de aprendizaje, interacciones entre los actores estudiantado y docentes, y, las interacciones con el mundo; las formas de intervención en los procesos escolares, rediseños curriculares y didácticos. Dimensiones que adquieren sus particularidades en contextos sociales concretos (Cantoral, 2000; Cordero, 2001, 2002; Díaz, 2001; Cantoral y Farfán, 2002, Arrieta, 2003). En términos de Candela (1999) el conocimiento científico es una construcción social que está sujeta a ciertos procesos discursivos específicos, que incluyen tanto las versiones sobre ciertos temas como la organización del discurso, las manera de hablar, de argumentar, de analizar, de observar, de construir con palabras el resultado de la experiencia, de validar un conocimiento y de establecer una verdad. Así, las propias investigaciones son consideradas piezas del discurso textual y argumentativo.

Este trabajo se focaliza en la visualización de saberes matemáticos. Herramienta principal para el aprendizaje cuya noción abarca más que la simple imagen de un objeto; se refiere a la construcción mental que hace un individuo sobre una teoría, situación o problema que se desee enfrentar. Hitt (1998) señala *que "La visualización matemática requiere de la habilidad para convertir un problema de un sistema semiótico de representación a otro"* y que *"investigaciones recientes sobre los sistemas semióticos de representación han puesto de manifiesto la importancia de la articulación entre diferentes representaciones de conceptos matemáticos para el aprendizaje de la matemática".* Evidentemente las gráficas son un elemento privilegiado al interior de la visualización matemática. Gráfica que puede ser realizada con lápiz y papel, computador, vídeo, entre otros. Con mayor rigor podemos decir que la visualización considera las relaciones y los cambios que la persona puede realizar en su mente para la búsqueda de los modelos e invarianzas presentes en una determinada situación. Por su parte "*Visualización Matemática trata con el funcionamiento de las estructuras cognitivas que se emplean para resolver un problema, con las relaciones abstractas que formulamos entre las diferentes presentaciones de un objeto matemático a fin de operar con ellas y obtener un resultado y sobre todo, de la participación de una cultura particular al compartir símbolos y gráficas*" (Cantoral y Montiel 2001).

La psicóloga de Berkeley, Eleonor Rosch, señala que "*el universo no está pre-categorizado: las categorías son humanas. Esto, que superficialmente puede parecer de perogrullo, tiene profundas implicancias que afectan la visión tradicional de la ontología de las cosas. Las categorías, piedra angular de la actividad mental, son creadas por seres con cuerpos en interacción con el medio*" (Núñez, 2003) Más adelante Lakoff y Jonhson demostraron que los sistemas conceptuales humanos, incluso los más abstractos, se organizan en metáforas conceptuales cuyas verdades e inferencias no son sino metafóricas. Adicionalmente asumimos con Lakoff y Núñez, que lo esencial en la construcción de estas metáforas y que está a la base de las ideas y de la construcción conceptual, son las experiencias corporales, tales como experiencias térmicas (ella es un persona fría) o kinestésicas (el dólar subió varios puntos) entre otras. Así una imagen mental o metáfora corporal se integra a un esquema propio del estudiante, el cual será enactado (puesto en acción) en una situación específica que lo requiera. Sostenemos entonces que la determinación de metáforas conceptuales que están presentes tanto a nivel intuitivo y previo en nuestros estudiantes y aquellas que son usadas por la matemática escolar, y su uso en diseños didácticos facilitarán al estudiantado el manejo significativo de las gráficas para su apropiación de nociones variacionales.

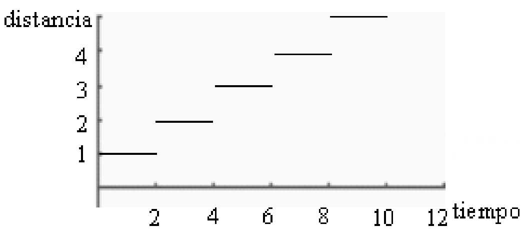
Por otra parte consideramos que la apropiación de nociones científicas se constituye como un proceso de largo aliento que puede significar hasta diez años para la adquisición de un pensamiento matemático (Cantoral, 1999) mientras que el aprendizaje de un concepto puede durar tres años (Artigue, 1989), supuesto en ambos casos una intervención didáctica intencionada (Díaz, op. cit.). El trabajo con la construcción e interpretación de gráficas de fenómenos da la posibilidad de estructurar en torno a una situación problema eje, secuencias didácticas en diversos niveles de la enseñanza básica, media y universitaria que favorezcan a los estudiantes la construcción de aprendizajes necesarios para la predicción y control de situaciones de variación. Tales aprendizajes que están a la base de los requerimientos de la modernidad, son vitales a la hora de enfrentar los desafíos de un mundo globalizado y en cambio autoacelerado. Análisis preliminares de la investigación en marcha *Las representaciones sobre la variación y su impacto en los aprendizajes de conceptos matemáticos*, muestran competencias de predicción y control presentes en las representaciones cotidianas de los estudiantes. Análisis de textualidades de estudiantes de octavo año básico y segundo año medio, realizados en el marco del citado proyecto (Diumce 10102 y Fondecyt 1030413) muestran la presencia de facetas estáticas y dinámicas, ilustrando modos de pensar tanto dinámicos como estáticos, siendo los primeros coadyuvantes a la visualización de covariaciones como a manejar cognitivamente la ucronización y la simultaneidad, en tanto los segundos o modos de pensar estáticos favorecen el establecimientos de clasificaciones y determinación de estructuras por parte de sus portadores. Sobre esa base conjeturamos que es posible estructurar secuencias didácticas que varíen en el grado de complejidad de la gráfica a construir, desde un simple esbozo en estudiantes de enseñanza básica que les permita dar cuenta de las magnitudes que varían y aquellas que no, y, conjeturar comportamientos futuros. Lo anterior mediante la construcción de gráficas o más bien figuras iconográficas, como una aproximación al pensamiento variacional. En nivel universitario el análisis de gráficas de movimiento de objetos o gráficas de diversos fenómenos variacionales favorecerán la significatividad de aprendizajes de conceptos del cálculo diferencial, respondiendo más satisfactoriamente a los desafíos de las ideas previas del estudiantado, dado que las personas se enfrentan a situaciones desde sus ideas previas, incluyendo intuiciones, imaginarios colectivos, conformando un complejo de antecedentes que permiten u obstaculizan el reconocimiento, construcción y manejo de situaciones, en especial situaciones de variación (Díaz, 2003). Se sigue la metodología de trabajo dada por la ingeniería didáctica que contempla tres grandes fases (Farfán, 1997): un análisis preliminar, en cuyo inicio se enmarca esta comunicación, la segunda fase que constituye el diseño y elección de las variables macro y micro didácticas y finalmente la puesta en escena y análisis de resultados.

Resultados preliminares

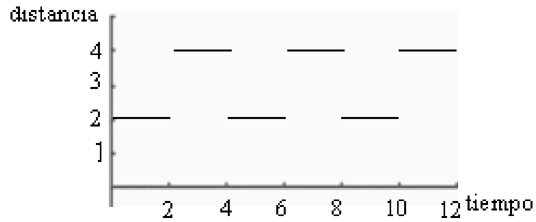
Un estudio exploratorio realizado con estudiantes de primer año de pedagogía en matemática en el que se preguntó por las gráficas de la Fig. 1 - ya usadas por Buendía y Cordero (2003)- que ya habían cursado un primer curso de cálculo, mostró importantes dificultades en la construcción de gráficas altura/tiempo. Evidenció la persistencia de la imagen[21] de un fenómeno por sobre la comprensión de los elementos que variaban, en especial, las variables implícitas como lo es el transcurso del tiempo. Los estudiantes identificaron un gráfico distancia/distancia, pese a estar

[21] Imagen que podríamos llamar *fotográfica* del fenómeno.

escrito en el eje de las abscisas la dimensión de tiempo, como podemos apreciar en la Fig. 1.

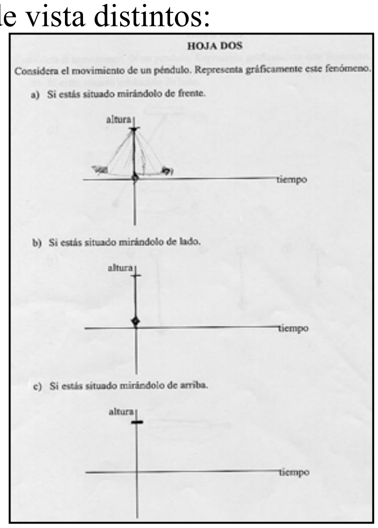


Estudiante 1: *"Subir una escalera"*



Estudiante 2: *"Marcas de un patinador al avanzar"*

Para estudiar esta dificultad se confeccionó un test (Ávila y Carrasco, 2002), sobre la base del movimiento de un péndulo, debido a que usualmente es tratado como ejemplo de un movimiento periódico y también por lo familiar que resulta al ámbito cotidiano (todos nos hemos balanceado en nuestra niñez). En el test se les solicito explicitar la imagen del fenómeno elegido, dibujando la situación desde tres puntos de vista distintos:



HOJA DOS

Considera el movimiento de un péndulo. Representa gráficamente este fenómeno.

a) Si estás situado mirándolo de frente.

b) Si estás situado mirándolo de lado.

c) Si estás situado mirándolo de arriba.

Fig. 2

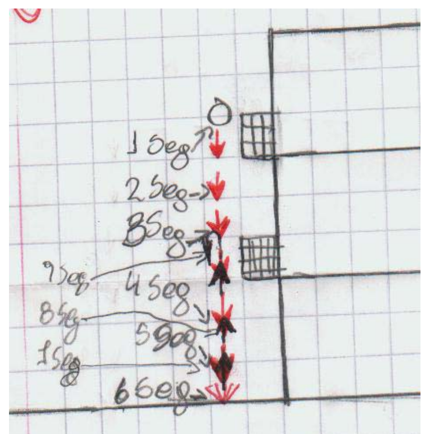


Fig.3

mirando de forma frontal, lateral y superior, con el fin de recabar evidencias del efecto que produce la persistencia de la imagen en la construcción de la gráfica. Posteriormente se les solicitó construir la gráfica altura/tiempo desde los mismos puntos de vista, para explorar si los estudiantes lograban representar el fenómeno cuya gráfica debería ser la misma, independiente del punto de vista desde el cuál se está situado para observar el fenómeno (como imagen mental). Los resultados no variaron del mostrado en la Fig. 2, mostrando que primó - a la hora de graficar - la imagen que se tenia del fenómeno, mostrando la dificultad asociar una gráfica pertinente a un fenómeno cuando se requiere trabajar con variables que no están explicitas a la vista como lo es el tiempo.

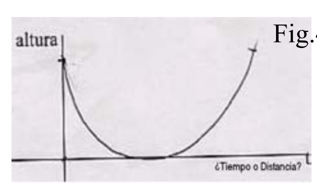


Fig.4

Desde las metáforas conceptuales reconocemos al tiempo asociando "adelante" al futuro y "atrás" al pasado. Metáfora que nos refiere a un eje de longitud unidimensional (una recta) y como señala Núñez y Lakoff

(pp 315, 2003): “El tiempo es metafóricamente conceptualizado (por los matemáticos) en términos de distancia”. Luego al dibujar el avance del tiempo en la construcción de un gráfico distancia/tiempo, de la trayectoria de un móvil por ejemplo, la representación del tiempo entra a competir en la representación mental, con la dimensión espacial propia del desplazamiento. Dos dimensiones que refieren a distancia, no pueden ocupar el mismo eje. Podemos reconocer esto en la Fig. 3 que muestra el dibujo de un estudiante de segundo año de enseñanza media, sin estudios formales de graficación, al pedirle que dibuje o grafique la trayectoria a través del tiempo de la caída de una pelota de un tercer piso.
Por otra parte una primera revisión histórica en el manejo de gráficas por matemáticos muestra un salto con Oresme. A pesar de que la construcción de gráficas incorporaba situaciones dinámicas con el tiempo implícito, como lo muestra la construcción de parte de Arquímedes, en su espiral que construye como el lugar Geométrico de un punto en el plano, que partiendo del extremo de una semirrecta se mueve uniformemente sobre ella, mientras que la semirrecta gira a su vez uniformemente alrededor de su extremo (Fig. 5). La construcción de la figura muestra la utilización de movimientos temporales implícitos (desplazamiento de la recta y el punto), pero la gráfica que se analiza es estática, pues es la traza de la trayectoria, sin explicitación del tiempo. Refleja la trayectoria ya completada, es decir posterior al movimiento de la recta y el punto.

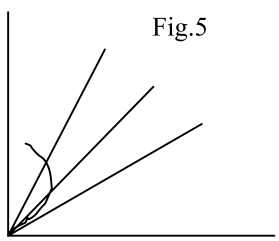
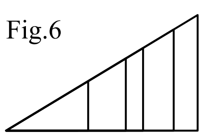


Fig.5

En la Europa medieval nos encontramos con una profunda discusión sobre la cuantificación de las formas variables, y en esta discusión probablemente antes del año 1361, Oresme (Fig. 6) plantea una pregunta brillante: “Por que no hacer un dibujo de la manera en que las cosas varían” (Boyer, 1969), logrando un adelanto sustancial en la construcción de gráficas.

Fig.6


> “Todo lo que varia, se sepa medir o no, lo podemos imaginar como una cantidad continua representada por un segmento rectilíneo”

Aquí vemos desde luego una primera sugerencia de lo que hoy conocemos como la gráfica de funciones. Este avance tardó en imponerse. En el año 1537 publica la Nova Ciencia el matemático Nicolo Tartaglia, en la que introduce la balística y trata sobre el análisis de la trayectoria del cañón. Este texto solo presenta gráficas como las de la figura 7 que muestra la trayectoria de la bala de cañón en un gráfico distancia/distancia, mostrando las dificultades que hubo para comenzar a utilizar el tiempo como variable explicita. Las gráfica de la figura 7 hoy la vemos refrendada en los resultados de la exploración descrita anteriormente y que mostramos en la figura 8.

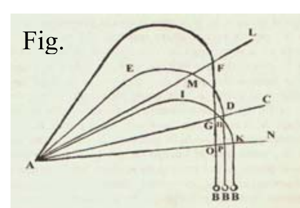


Fig.

La gráfica de la figura 4 muestra la persistencia de la imagen visual a la hora de graficar el fenómeno del movimiento pendular, graficando el movimiento descrito por el péndulo en que - al igual que la bala de cañón de Tartaglia - se muestra su trayectoria dejando el tiempo implícito. Usando el eje x para representar el desplazamiento lateral del péndulo y no el desplazamiento del tiempo, como lo propone Oresme, más fuertemente como se maneja en un primer curso de cálculo,

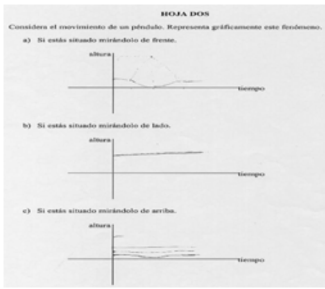


Fig. 8

mostrando en definitiva más cercanía epistémica con Tartaglia que con la usada en el cálculo diferencial y que encuentra su origen en Oresme.

Sumamos a lo anterior el hecho que nuestro estudio de funciones en la escuela se basó más en la definición de Bourbaky de una función como pares de puntos - programa de aritmetización iniciado por Dedekind y Weierstrass - escondiendo en el trabajo de pares ordenados y funciones que van de puntos a puntos, el movimiento y el espacio. Este reemplazó al paradigma geométrico y que posibilitó a Newton y Leibniz la construcción del cálculo de variaciones (Lakoff y Núñez 2002) permitiendo trabajar con la intuición geométrica. Este paradigma geométrico concibe a una curva con las siguientes propiedades (Pierpont, 1899, p.397). :

- Puede ser generada por el movimiento de un punto
- Es continua
- Tiene una tangente
- Tiene longitud
- Cuando es cerrada, forma una región completamente acotada
- Esta región tiene área
- La curva no es una superficie
- Está formada por la intersección de dos superficies

A modo de cierre

Esta investigación en curso busca profundizar en la construcción de gráficas de fenómenos de variación, más específicamente indagando en relación a los obstáculos para construir, interpretar y trabajar con gráficas y esquemas que requieren al tiempo como variable explicita. Con el propósito ulterior de aportar a la construcción de situaciones didácticas que permitan a los estudiantes construir las herramientas de visualización gráfica de fenómenos de variación, y reversiblemente poder hipotetizar fenómenos desde gráficas, así como articular estos modos de representación con otros registros de representación semiótica matemática. Las evidencias recogidas en esta primera fase del estudio muestran obstáculos para elaborar gráficas de fenómenos tiempo/distancia por el estudiantado: epistemológicos (deriva de Oresme a Descartes, pasando por Tartaglia), cognitivo-culturales (el tiempo sustentado sobre una metáfora espacial compite con el desplazamiento a la hora de graficarlos juntos) y didácticos (opción curricular que reemplaza el paradigma geométrico de Newton y Liebnitz por el aritmético de Dedekind’s y Weierstrass’s).

Bibliografía

Avila J., Carrasco E. (2001): Dificultades en la interpretación de Graficas. Ponencia presentada a la XVI Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. La Habana, Cuba.

Boyer Carl B. (1999): *Historia de la Matemática*. Alianza Editorial. Madrid, España.

Cantoral, R. y Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Revista Epsilon, Núm. 42. España.*

Candela, A. (1999) *Ciencia en el aula*. México: Paidós Educador.

Cantoral, R. (1997). Matemática Educativa. Serie *Antologías, N° 1, Área de Educación* Superior. Departamento de Matemática Educativa. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN, México.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, Relime Vol. 4. Num. 2, pp. 103-128.

Cordero, F. (2002*). Lo social en el conocimiento matemático: reconstrucción de argumentos y de significados*. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 16*. Grupo Editorial Iberoamérica.

Cordero, F. (2001). La incidencia de la socioepistemología en la red de investigadores en matemática educativa. Una experiencia. *Serie Antologías, N° 1*, Clame, Red de Cimates, México.

Díaz, L. (2003).Impactos del cotidiano en los aprendizajes matemáticos: construyendo relaciones benéficas entre nociones culturales y pensamientos matemáticos". *Actas XI CIAEM*, Blumenao, Brasil 2003.

Díaz, L. (2003). *Las representaciones sobre la variación y su impacto en los aprendizajes de conceptos Matemáticos*. Dirección de Investigación, UMCE 2002-2003 y Proyecto Fondecyt 2003-2005. Santiago de Chile.

Lakoff, G. Núñez, R. (2000) *Where Mathematics Comes From, How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*. Basic Cooks, EEUU.

Núñez R. (2003): *¿Qué idea de mente y cuerpo para el nuevo milenio? Algunas reflexiones sobre el Homo Sapiens y una falacia en cuestionamient*". http://www.iing.cl/iexplorer/index_activ.html

Tartaglia N.(1998): *La nueva Ciencia*. Colección MATHEMA, Servicios editoriales de la Facultad de Ciencias, UNAM. México.

ESTABILIDAD Y CAMBIO DE CONCEPCIONES ALTERNATIVAS ACERCA DEL ANÁLISIS DE FUNCIONES EN SITUACIÓN ESCOLAR

Crisólogo Dolores; María del Socorro Valero
CICATA – Instituto Politécnico Nacional – México
paraklet@prodigy.net.mx

Resumen
El presente trabajo se inscribe dentro de la línea de investigación denominada *Pensamiento y Lenguaje Variacional*, trazada por el Dr. Cantoral. Esta línea de investigación estudia la articulación entre la investigación y las prácticas sociales que dan vida a la matemática de la variación y el cambio. El contexto general en el que se ubica el presente trabajo es el programa de investigación desarrollado por el Dr. Crisólogo Dolores cuyo objetivo principal se centra en el estudio de los procesos de desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional en condiciones escolares (Dolores, 1996). En particular nuestro interés se enfoca en el estudio de la estabilidad y cambio de las concepciones alternativas relativas al análisis del comportamiento de funciones a través de sus gráficas, pues existen evidencias de que esas interpretaciones primarias se arraigan en la mente de los estudiantes e interfieren en el desarrollo del pensamiento variacional. De hecho, asumimos que parte importante del desarrollo de esta forma de pensamiento consiste en el dominio de los procesos de franqueo o superación de esas concepciones alternativas.

Introducción
Dolores (2002) destaca la importancia del análisis de funciones dentro de la matemática de la escuela media y superior, estableciendo que es justamente en este análisis en donde se sintetiza el objetivo primordial de la matemática de las variables que se estudia en los niveles medio y superior. Los conceptos, relaciones y procedimientos relativos a las funciones, a sus límites, su continuidad y sus derivadas, fueron creados para poder analizar el comportamiento de las funciones. No tiene sentido poder sólo calcular límites de funciones, poder determinar su continuidad o poder calcular derivadas, si no se es capaz de integrar y utilizar (o aplicar, como lo dicen los programas) estas herramientas para analizar el comportamiento de las funciones que modelan situaciones de variación y cambio. Como las funciones modelan procesos de cambio, es necesario para el estudio de esos procesos, indagar si crecen o decrecen, cómo y cuánto crecen o decrecen, qué tan rápido lo hacen, cuáles son sus puntos máximos o mínimos, si es que los tienen, etc. Históricamente el problema de la determinación de los máximos y mínimos de las funciones fue el principal motivo que dio origen a la creación del *calculus*. Lo anterior permite evidenciar la necesidad de investigar la estabilidad o cambio de las concepciones alternativas acerca del análisis de funciones bajo condiciones determinadas de enseñanza.

Problemática y objetivo de la investigación
Los programas de matemáticas de la educación media y superior, principalmente para quienes estudiarán ciencias, ingeniería o contabilidad, prevén el que los estudiantes puedan analizar funciones incluso usando los criterios asociados a la derivada. Una de las habilidades necesarias para tal fin es poder *leer* o *interpretar* el comportamiento de funciones a través de sus gráficas usando, además, el lenguaje analítico o verbal. Sin duda que la interpretación de las gráficas pasa necesariamente por su

visualización, aunque muchos estudiantes son renuentes a aceptarla (Einsemberg & Dreyfus, 1991). En la práctica escolar los profesores de matemáticas utilizan gráficas cartesianas o las representaciones figurales para la enseñanza de las funciones y el análisis de su comportamiento. Pero hay evidencias de que existen muchas concepciones que se generan en la mente de los estudiantes que son inaceptables para la matemática. Varias investigaciones han reportado que los estudiantes no pueden usar las gráficas para comunicar o extraer información (Wainer, 1992), y que otros no pueden aplicar lo aprendido sobre gráficas en las clases de matemática a la física o a otras materias (Mc Dermot / Rosenquist / Van Zee 1987). Cantidades mayoritarias de estudiantes, aún después de haber cursado Cálculo Diferencial, no relaciona a la derivada con la velocidad en un t_0 determinado, en cambio la asocian con la ordenada $s(t_0)$ (Dolores, 1998). Esta concepción ha sido encontrada cuando los estudiantes relacionan (a partir de gráficas) la derivada de una función y la función primitiva (Dolores/ Guerrero / Medina, 2001).

En los profesores de cálculo del bachillerato también se encontró una gran variedad de concepciones alternativas, además de las concepciones aceptables, cuando hacen lecturas sobre el comportamiento de funciones a través de sus gráficas (Dolores / Guerrero, 2002). Una cantidad significativa asocia la condición: $f(x+h)-f(x) = 0$, con f continua y $h > 0$ preferentemente *pequeño*, con los puntos de corte de la gráfica con el eje de las x, es decir con las x donde $f(x) = 0$; análogamente existe tendencia a asociar la condición: $f(x+h)-f(x)>0$, con la región donde la gráfica de la función está por arriba del eje de las x, región donde se cumple que $f(x)>0$, y $f(x+h)-f(x)<0$ con la región donde la gráfica de la función está por debajo del eje de las x, región donde se cumple que: $f(x)<0$. Los profesores parecen no diferenciar entre condiciones de comportamiento y condiciones de ubicación de la gráfica en el plano cartesiano. La mayoría asocia consistentemente las condiciones de crecimiento y función positiva, dadas simultáneamente y en forma verbal – escrita, con las regiones correspondientes de las gráficas, sin embargo, asocian las condiciones creciente y negativa (dadas en la misma forma) por un lado, y decreciente y negativa por otro, con aquellos sectores de la gráfica donde sólo es positiva y negativa respectivamente. Para ellos las condiciones de crecimiento y *positividad* o decrecimiento y *negatividad* de la función parecen ser condiciones concomitantes.

Ahora bien, la problemática antes expuesta tiene serias implicaciones en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática. Por nuestra parte, suponemos que esas concepciones pueden ser removidas de la mente de los estudiantes para acercarlas a concepciones aceptables, mediante un proceso sistemático de enseñanza. De esto trata fundamentalmente este trabajo. Por todo lo anterior, el problema de la presente investigación se sintetiza en el siguiente cuestionamiento: ¿Son estables o cambiantes las concepciones alternativas acerca del análisis de funciones mediante un proceso sistemático de enseñanza?

Este trabajo de investigación tiene como objetivo fundamental analizar la estabilidad y cambio de las concepciones alternativas de los estudiantes respecto al análisis de funciones bajo condiciones determinadas de enseñanza.

Elementos teóricos básicos

Referente fundamental en nuestra investigación es el trabajo de Pozo (2000) relativo al origen de las concepciones alternativas respecto de los fenómenos científicos. Pozo afirma que, las concepciones espontáneas tienen su *origen* en la actividad cotidiana de las personas. Surgen en la interacción espontánea con el entorno cotidiano y sirven, ante todo, para predecir la *conducta* de ese entorno. Están además determinadas en cuanto a su contenido por las limitaciones en la capacidad de procesamiento en los humanos. Como consecuencia de su origen en la actividad espontánea y de su organización en teorías, estos conceptos resultan muy *resistentes al cambio*, ya que persisten incluso tras una larga instrucción científica. Se ha comprobado que no se abandonan por simple exposición a los conceptos científicos correctos. Ello ha obligado a desarrollar modelos de cambio conceptual en los que, mediante estrategias didácticas diseñadas con ese fin, se intentan trocar los conceptos espontáneos y erróneos (concepciones alternativas, de acuerdo a Confrey (1990), (Mevarech & Kramarsky, (1997)) en conceptos científicamente correctos.
De acuerdo a Pozo el cambio conceptual se produce en las condiciones siguientes:

a) El aprendizaje de conceptos científicos no consiste sólo en reemplazar unas ideas cualesquiera por otras científicamente aceptadas, sino que en el aprendizaje existe una cierta conexión genética entre la teoría espontánea del alumno y la teoría científica que se le pretende transmitir.
b) Para que el alumno pueda comprender la superioridad de la nueva teoría, es preciso enfrentarle a situaciones conflictivas que supongan un reto para sus ideas. En otras palabras, el alumno ha de darse cuenta de que su teoría previa es errónea en ciertas situaciones, en las que conduce a predicciones que no se cumplen.
c) A partir de lo anterior, puede deducirse que la toma de conciencia por parte del alumno es un paso indispensable para el cambio conceptual. Los conceptos espontáneos de los alumnos suelen ser implícitos. Un primer paso para su modificación será hacerlos explícitos mediante su aplicación a problemas concretos.

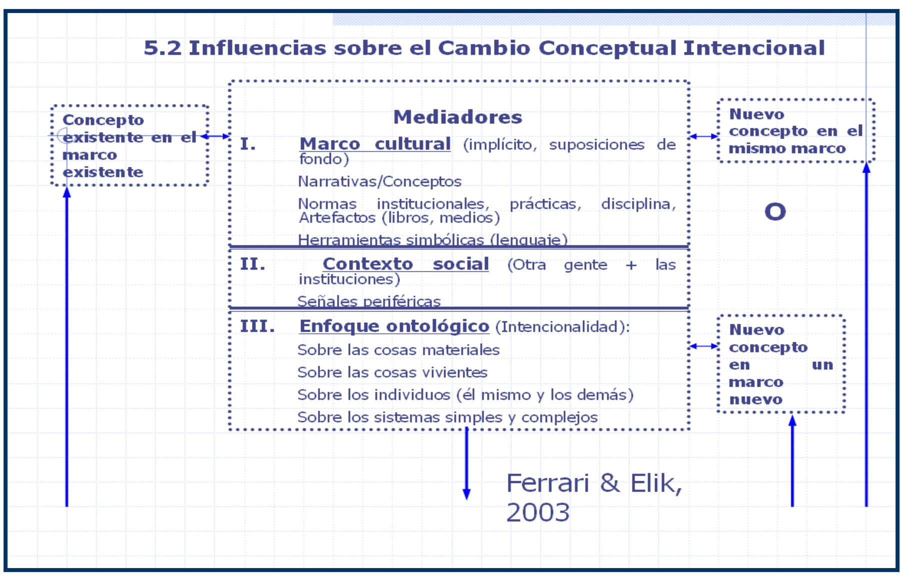
Por otra parte, nuestra postura respecto del planteamiento de las situaciones conflictivas que permitan explicitar las concepciones alternativas de naturaleza implícita la adoptamos de acuerdo al trabajo de Majmutov (1983) dentro de la *enseñanza problémica* para quien el desarrollo es lucha de contrarios. Esta ley de desarrollo mediante la superación de las contradicciones, se refleja en el conocimiento, que se caracteriza también por sus contradicciones específicas. En la enseñanza problémica se plantea que la contradicción entre las tareas señaladas por el curso de la enseñanza y las fuerzas cognitivas que tienen los alumnos, llega a convertirse en la fuerza motriz de su aprendizaje solo cuando se cumple:

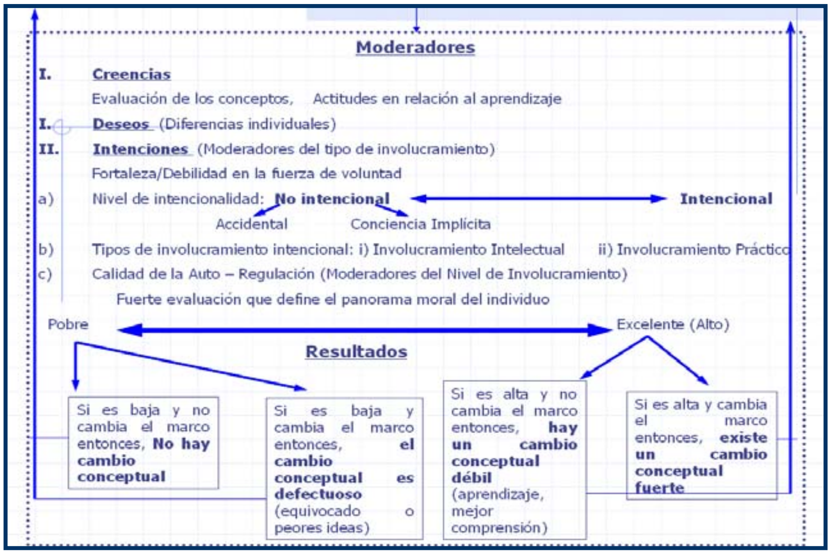
a) Que los alumnos comprendan las dificultades y la necesidad de superarlas.
b) Que las dificultades se correspondan con las posibilidades cognitivas de los alumnos
c) Que las contradicciones estén condicionadas y preparadas por el curso del proceso docente y su lógica.

d) Que se separe del campo visual del alumno en la primera etapa de estudio del material nuevo, todo lo que pueda distraer la búsqueda de la solución de la tarea cognitiva.
e) Que una condición decisiva para la formación de la contradicción, es que adquiere un carácter interno y pasa a ser una contradicción en la conciencia del propio escolar, en su conciencia en general y se interpreta como una dificultad.

El otro elemento teórico, fundamental en nuestro proyecto es el trabajo de Ferrari & Elik (2003) relacionado con el cambio conceptual intencional. De acuerdo a estos autores, una persona, no es solo parte de su cultura en el macro nivel sino que es también parte de la dinámica de las relaciones alrededor de ella en el micro nivel, en donde las emociones son significantes para el cambio conceptual intencional y éste puede ser logrado cuando los sentimientos son tan extremos que rompen los patrones o estructuras existentes.

Ferrari & Elik sugieren que el cambio conceptual intencional involucra el intento deliberado de una persona por un cambio radical de un sistema conceptual a otro porque son seducidos por el poder de ese nuevo sistema conceptual, o porque perciben algún defecto profundo en su visión actual. Desde su perspectiva, bajo condiciones del mundo real los nuevos y viejos conceptos son influenciados por los moderadores y mediadores del cambio conceptual. Los mediadores estructuran el enfoque completo que alguien posee de un concepto en particular; los moderadores determinan que tan fácil o difícil el individuo intentará cambiar los conceptos existentes.





Metodología

La investigación se planificó para ser desarrollada siguiendo el esquema metodológico siguiente:

Diagnóstico. El diagnóstico consistió en el diseño de tres cuestionarios y su aplicación a los estudiantes que participaron en la experiencia con el fin de explorar sus concepciones alternativas. El diseño del cuestionario se hizo con la idea de explorar las concepciones que acerca del comportamiento variacional de funciones elementales tienen los estudiantes, mediante la conversión y tratamiento de diferentes sistemas semióticos de representación, a saber, gráfico, verbal y analítico. Estas exploraciones fueron realizadas justo antes de iniciar con la preparación de las condiciones de nivel de partida de los estudiantes; se trató de conocer sus concepciones previas libres de las posibles influencias que se pudieran ejercer con el curso que se trabajó en un plan experimental. Los cuestionamientos incluidos en este instrumento exploratorio consistieron en la determinación de las zonas o intervalos de crecimiento, decrecimiento, estabilización y la coordinación de propiedades simultáneas tanto de ubicación en el plano como de comportamiento.

Formación de las condiciones de partida del curso. En esta etapa el interés estuvo dirigido hacia el estudio del concepto de variable, dominio, rango, y graficación de puntos sobre el plano cartesiano.

Diseño de situaciones didácticas. Para el diseño de situaciones didácticas se buscó crear un ambiente gráfico de tal suerte que los estudiantes pudieran adquirir la habilidad de analizar gráficas de funciones. Para ello, el diseño de las situaciones didácticas se llevó a cabo bajo los siguientes criterios:

- Que los estudiantes utilizaran el registro gráfico y verbal
- Que posibilitaran la transición del ambiente gráfico al verbal y viceversa
- Que plantearan contradicciones entre sus concepciones previas y las concepciones aceptables
- Que generaran condiciones para poder trascender sus concepciones alternativas

Puesta en escena de las situaciones didácticas. La puesta en escena de las situaciones didácticas se llevó a cabo durante la impartición del curso de Matemáticas I, Cálculo Diferencial e Integral a estudiantes de primer semestre de la carrera de Licenciado en Matemáticas de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero. El curso fue estructurado siguiendo un enfoque variacional, considerando al estudio de la variación como una especie de *eje rector* del que se desprende el contenido matemático a tratar. No se trata de enseñar la derivada porque es un concepto matemático *interesante* sino porque resuelve muchos problemas de la variación (Dolores, 2000). Bajo estas consideraciones, el contenido matemático no se ciñe necesariamente a la estructura lógico-formal del Análisis Matemático, más bien se trata de una introducción intuitiva e informal que tiene como punto de partida las necesidades de la práctica. Siguiendo la línea indicada por Wenzelburger E. 1993, tres nociones físicas son las fundamentalmente tratadas: la *variación*, la *rapidez promedio* de la variación y la *rapidez instantánea* de la variación. De aquí que el curso se estructuró en tres fases: la *fase preparatoria*, la *fase* de *formación del concepto,* la *fase* de *ampliación* y la *fase* de *fijación.* En la *fase preparatoria* se pretendió crear las condiciones mínimas del nivel de partida para acceder al proceso de formación del concepto en cuestión. En esta fase se parte de la modelación de problemas sencillos de la física de donde se abstraen las nociones de *variable* y *función,* de éstas se estudian sus propiedades básicas y se resuelven problemas. En la segunda fase la formación del concepto se inició a través la *rapidez de la variación,* particularmente de la velocidad y aceleración promedio. Después se arribó a la rapidez instantánea mediante un acercamiento intuitivo al límite y mediante la utilización de los infinitesimales. En la tercera fase se amplió la extensión del concepto a funciones que no necesariamente dependen del tiempo introduciendo la definición de *derivada*, se introdujo la noción de función derivada, se dedujeron (por medio de los diferenciales) y utilizaron las fórmulas y reglas básicas de derivación, pero sobre todo en esta etapa se resolvieron problemas tendientes a la fijación del concepto. En la cuarta fase se incluyó una etapa de *formalización* en donde se abordó la demostración de algunos teoremas del cálculo.

Las formas metodológicas básicas de organización de la enseñanza mas utilizadas en el curso fueron los métodos de elaboración conjunta, los de dirección del trabajo independiente y algunos métodos expositivos. El trabajo docente se organizó en clases prácticas, clases de repaso y las clases de control o evaluación. Las clases prácticas fueron destinadas a la resolución conjunta de los ejercicios y problemas más representativos planteados en el cuaderno de trabajo *Una Introducción a la Derivada a Través de la Variación* y el esclarecimiento de dudas sobre las tareas asignadas para realizar en casa. Dado que se pretendía desarrollar habilidades en los estudiantes, el trabajo con la resolución de ejercicios y problemas ocupó alrededor de las tres cuartas partes del tiempo destinado al curso, inclusive las tareas extraclase fueron sistemáticamente revisadas y evaluadas con el objetivo de contribuir a la calificación de los estudiantes y así estimular su realización. En las clases de control o evaluación se aplicaron cuestionarios de control o de sistematización y los exámenes fueron elaborados con fines investigativos. Las actividades realizadas trataron acerca de:

- El signo de las funciones *f*(*x*)
- El comportamiento de la función *f*(*x*), su crecimiento, su decrecimiento y su estabilización
- Trabajo simultáneo sobre los dos puntos anteriores para intentar coordinar el trabajo sobre la ubicación y el comportamiento de una *f*(*x*) dada

Las actividades que comprendieron las situaciones didácticas consideraron que el trabajo de los estudiantes incluyera tres fases: observación de gráficas, elaboración de gráficas y ejercicios de generalización.

Análisis de los resultados y análisis comparativo pre – post. La población con la que se desarrolló el proyecto fueron inicialmente 30 estudiantes. A estos 30 estudiantes se les aplicó el Pre – Test el primer día de clases, 1º de Septiembre del 2002 de lo que fue su curso de Cálculo Diferencial e Integral. El Pre – Test estuvo constituido por 3 cuestionarios. Meses después, el 13 de Enero del 2003, aproximándose el cierre del curso, cuando ya solo quedaban 23 estudiantes de los 30 iniciales, se volvieron a aplicar los mismos instrumentos exploratorios en lo que constituiría el Post – Test. Las entrevistas se aplicaron los días 17, 18 y 19 del mismo mes. El día 17 se entrevistaron a los primeros 7 estudiantes, el día 18 a los siguientes 8 y el día 19 a los últimos 8. Como era de suponer, para cuando se entrevistaron a los estudiantes los días 18 y 19, toda la información de las entrevistas ya había sido comentada por los estudiantes entrevistados el primer día, de manera que estas 16 entrevistas no fueron de utilidad para nuestra investigación pues estos quince estudiantes manifestaron una fuerte contaminación de las ideas de los primeramente entrevistados. Por lo anterior, solo desarrollamos 7 análisis longitudinales, mismos que incluyen los resultados del Pre – Test, la entrevista y el Post – Test de 7 estudiantes. En cada uno de estos 7 análisis, se hace un minucioso seguimiento de la evolución de las ideas de los estudiantes intentando identificar la permanencia o cambios de las concepciones que inicialmente manifestaron estos estudiantes respecto del análisis de funciones. Posterior a los análisis longitudinales, se desarrollará un análisis global. Finalmente, estableceremos una discusión teórica sobre los resultados obtenidos, en la búsqueda de explicaciones generales acerca de los cambios conceptuales que se hubieran presentado en los estudiantes.

Bibliografía

Cantoral R. y Farfán R. (2000). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. Contenido en *El futuro del Cálculo Infinitesimal, ICME-8;* Sevilla, España. Grupo Editorial Ibero América, pp. 69-91

Dolores, C. (1999). *Una introducción a la derivada a través de la variación*. Grupo Editorial Iberoamericana. México D. F. pp. 54-61

Dolores, C. y Guerrero L. A. (2002). Concepciones alternativas que, referentes al comportamiento variacional de funciones, manifiestan profesores de bachillerato. Artículo aceptado para la RELME 16, a celebrarse en la Habana, Cuba, en Julio del 2002.

Dolores, C. (2002). Concepciones alternativas que afloran en los estudiantes, cuando analizan el comportamiento de funciones a través de sus gráficas. En prensa

Ferrari M. & Elik N.(2003) *Influencias sobre el Cambio Conceptual Intencional*; Ed, Sinatra G. Pintrich. P, Intentional conceptual change, Mahwah, NJ: LEA.

Majmutov M. I. (1983); *La enseñanza problémica*; Pueblo y Educación; La Habana Cuba

Pozo, J. I. (1996). *Teorías cognitivas del aprendizaje*, Ediciones Morata, S.L.

VÍNCULOS CONCEPTUALES DISCRETOS Y CONTINUOS DEL CÁLCULO EN LA INGENIERÍA DE CONTROL

Carlos Rondero y Martín Sauza
U. Autónoma del Estado de Hidalgo, U. Tecnológica de Tula Tepeji.México
rondero@uaeh.reduaeh.mx

Resumen

Este trabajo de investigación pretende hacer un estudio preliminar de la dualidad discreto-continuo con profesores de matemáticas y física, específicamente aquellos que imparten estas materias en ingeniería. El Marco Teórico que sustenta este trabajo de investigación documental es el constructivismo de Piaget y la Matemática en Contexto que tiene su origen en el mismo constructivismo. En el trabajo de investigación se hacen varias referencias sobre la matemática en contexto con la ingeniería, sobre la matemática y la dualidad en el estudio de lo discreto y lo continuo dentro de la Ingeniería de Control. La madurez que debe de tener el cálculo en este trabajo de investigación es de que los alumnos distingan entre el diferencial como una variable continua y del tipo analógico entre el incremento como un intervalo definido y una variable discreta que da origen a las señales digitales. Hacer notar las herramientas matemáticas entre una y otra, así como mostrar la importancia de transitar o transformar (convertir) un tipo de señal a otra.

Introducción

El cambio que se está viviendo entre el mundo analógico y digital es importante debido a que la tecnología ha evolucionado, y pone mucha atención en la transición de la dualidad discreto-continuo, y la conversión de analógico a digital, dicha transición no ha pasado desapercibida, tanto que hasta nuestros días todavía no logramos tener una noción clara de esta dualidad y de la importancia de tener bien claros los conceptos, por esta razón creemos relevante y de gran importancia evidenciar esta falta de contexto del mundo real a través de las matemáticas en la ingeniería de control. El trabajo de investigación está sustentado por el aprendizaje significativo y la matemática en contexto, los cuales parten de un conocimiento que ya se tiene; sólo sé recontextualiza o se construye sobre la base de un nuevo conocimiento.

El propósito de este trabajo de investigación es mostrar la importancia que tienen las matemáticas discretas en la teoría de control; el modelar sistemas físicos que tienen como soporte un buen entendimiento de las herramientas matemáticas; así como contextualizar la matemática en la Ingeniería de Control, en la dualidad discreto-continuo. El trabajo de investigación trata de evidenciar los vínculos conceptuales entre el cálculo y la ingeniería de control, todo ello con el objetivo de incidir en el discurso matemático escolar.

La metodología utilizada es referente a la matemática en contexto con el enfoque en ingeniería de control; las evidencias muestran que en la enseñanza del cálculo se ha privilegiado el estudio de lo continuo, y la parte discreta se estudia en el momento en que se están abordando problemas de aplicación, motivo por el cual no existe un antecedente de matemáticas en sistemas digitales.

Es importante hacer énfasis que este trabajo de investigación pretende hacer un estudio preliminar de la dualidad discreto-continuo con profesores de matemáticas y física, específicamente aquellos que imparten estas materias en ingeniería.

La madurez que debe de tener el cálculo en este trabajo de investigación, es que los alumnos distingan entre el diferencial como una variable continua y del tipo analógico, entre el incremento como un intervalo definido y una variable discreta que da origen a las señales digitales; hacer notar las herramientas matemáticas de la dualidad discreto-continuo, así como mostrar la importancia de transitar o transformar (convertir) un tipo de señal a otra.

Génesis del problema de investigación

La visión que se tiene de discreto y continuo, se presenta enseguida, con la intención de ubicarnos dentro del problema de investigación, a través de dos enfoques: uno ilustra la idea que se tiene desde el punto de vista de la Física y el otro de las Matemáticas, concernientes al Cálculo.

En matemáticas lo discreto es el incremento de una función, es una diferencia finita dentro del cálculo diferencial, por lo tanto se ve como la parte discreta. La diferencial, es una diferencia infinitamente pequeña, esto es lo continuo dentro del Cálculo, Rondero (1999).

Desde el punto de vista variación y medición; si vemos que la variación es como tal un cambio y está en función del tiempo, ésta es la parte continua, y si nosotros queremos medir esa variación; lo que hacemos es tomar un intervalo y hacerlo finito para ciertos valores del tiempo, de tal forma que la medida es la parte discreta, así entiéndase, discreto como la medición y lo continuo la variación. Dolores C. (1989).

Discreto – Continuo en el Cálculo Diferencial e Integral.

Es importante destacar la importancia que la dualidad discreto-continuo tiene en el cálculo diferencial integral, para esto iniciaremos con un artículo que publica Rondero en una antología[(1)] sobre la visión Discreto-Continuo.

Con mucha frecuencia, es posible encontrar en la enseñanza de las matemáticas, conceptos que presentan una naturaleza múltiple. Por ejemplo, en las clases de cálculo podemos usar dos expresiones bien conocidas:

$$\Delta x \text{ y } dx$$

Para una misma idea.

Claramente no son el mismo concepto, pues uno se usa cuando se quiere representar incrementos finitos y el otro, si se nos permite, para incrementos infinitamente pequeños. Sin embargo tienen algo en común, ambos son el resultado de la operación "diferencia"; en un caso se trata de una resta finita y en el otro una resta infinita.

Baste recordar la descripción del programa leibniziano del diferencial. Para Leibniz, las diferenciales son diferencias infinitamente pequeñas entre valores sucesivos de una variable, en tanto L'Hopital, no considera a las variables como recorriendo una sucesión de valores infinitamente próximos, sino como creciendo o decreciendo de manera continua y así la diferencial (o diferencias como él les llamó), son las partes infinitamente pequeñas o en que aumentan o disminuyen dichas variables.

Resulta interesante ver como en cálculo se tiene la idea de discreto, como incrementos, ya que el incremento es un intervalo definido (finito). La parte de la diferencial es vista, si hacemos la analogía con el control analógico, tiene que ver con continuo en el tiempo; en el cálculo es visto como una diferencia infinitamente pequeña.

Visión Discreto–Continuo dentro de la Física
De acuerdo con Dolores C. (1989)

Desde el punto de vista etimológico, el término variación contiene el prefijo vari, este elemento prefijal forma parte de las palabras con significado de vara, este término a su vez, es indicativo de medición. Una vara es una medida de longitud equivalente a 853.9 mm. De acuerdo con el Diccionario General Ilustrado de la Lengua Española el término variación indica: acción y efecto de variar, este último término proviene del latín variare y significa hacer que una cosa sea diferente de lo que antes era, el término implica dar variedad o cambiar una cosa de forma, de propiedad o de estado. El término variación está pues, asociado a la medición y al cambio.

La medición es un procedimiento creado por el hombre para estudiar y entender la realidad, el cambio por otro lado, es el componente básico del movimiento. El movimiento es una modalidad o propiedad inherente de la materia y no existe sin ella, el movimiento comprende todos los cambios que se operan en el universo, desde un simple desplazamiento del lugar hasta el del pensamiento. La materia y sus manifestaciones son parte consustancial de la realidad y ésta es siempre cambiante. En un sentido genérico la medición es un proceso de relación conscientemente dirigido por el hombre hacia su realidad, desde el punto de vista físico, consiste en encontrar la razón de la magnitud que se mide con la de alguna unidad.

El problema de la medición jugó un papel importante en el desarrollo de la matemática, pues propició la interconexión entre la aritmética y la geometría, entre lo ***discreto y lo continuo****, entre el número y la magnitud. Las magnitudes son caracterizadas, como las abstracciones representadas geométricamente de las cosas medibles continuas. El número, por otro lado, esta asociado a la cantidad de veces que cabe la unidad de medida en lo que se mide, aquí se entrecruzan dos de los elementos constrastantes abstraídos de la realidad: lo discreto y lo continuo. Para cuantificar lo discreto conmensurable basta con los números enteros, lo segundo históricamente estuvo relacionado con la divisibilidad de la materia y sus implicaciones en la matemática dieron lugar a la creación de los números racionales, los infinitesimales y los números reales. Lo discreto es característico de algunos objetos de la realidad que son indivisibles en el sentido, que cuando se dividen dejan de ser lo que eran (medio de hombre, dos tercios de manzana, etc.), por otro lado, los objetos continuos y homogéneos son susceptibles de ser divididos ilimitadamente y agrupados sin perder su carácter esencial. De estos últimos objetos se pueden abstraer sus longitudes, áreas, volúmenes o relacionarlos con el tiempo en ciertos fenómenos, estas magnitudes como representan alguna característica de objetos o fenómenos continuos son también continuos.*

Las analogías anteriores nos dan una idea más clara del estado del arte de la dualidad **discreto-continuo** en matemáticas y en física, sin duda puntos de partida claves para nuestro problema de investigación.

Para la enseñanza de las Matemáticas a nivel licenciatura se requiere de un buen entendimiento de los conceptos Matemáticos. El Modelado de Sistemas Físicos en realidad depende de si el estudiante tiene bien claro estos conceptos para posteriormente darle una aplicación a la Ingeniería. En el nivel medio y superior, las aplicaciones quedan en el aire, porque muchos profesores en clases no estudian los problemas que necesitan de un buen razonamiento Matemático, y simplemente le dan la vuelta al problema; es aquí donde es importante crear un Vínculo Conceptual entre las Matemáticas y la Ingeniería, que permitan visualizar más los problemas de aplicación.

Es interesante cómo el alumno se percata, qué tanto carece de herramientas Matemáticas, y que sin éstas, hace de lado una parte muy importante de su formación como Ingeniero, debido a que es en las Ingenierías donde comúnmente se presenta este problema y donde se requiere un puente entre las Matemáticas y la Ingeniería; si los Ingenieros no tienen buenas bases matemáticas, no les permite ser eficientes y no desarrollan la Ingeniería conforme a las necesidades de su profesión. Es aquí donde vemos la necesidad de darle un significado al cálculo en la teoría de control, por estas razones considero que las curriculas a nivel licenciatura no están cubriendo las expectativas, para dar origen a la significación de la dualidad discreto-continuo, (debemos aportar ideas y diseñar actividades de aprendizaje que favorezcan la construcción de estos conceptos).

Se observa que en la Ingeniería Electrónica existe poco vínculo con las matemáticas que se aplican en la Ingeniería; este es un problema considerable en la Ingeniería de Control que ha privilegiado mucho la parte continua del Cálculo y se ha dejado a un lado la parte discreta. La Ingeniería Electrónica tiene problemas en su curricula, porque la mayoría de los alumnos no tienen como prerrequisito la parte discreta de las matemáticas y a nivel Ingeniería los profesores que imparten las materias de Control Analógico y Control Digital, tienen que ir a la par con aplicaciones y al mismo tiempo estudiando la parte discreta, por lo que en la enseñanza del Cálculo se tiene que incorporar a la discretización de funciones.

Al comenzar los alumnos a graficar funciones (lo hacen tabulando), posteriormente localizan los puntos en el plano cartesiano (unen los puntos para hacer una gráfica del tipo discreta, pero es aquí donde los profesores no hacen énfasis en que sé esta enseñando el elemento discreto), y lo pasan desapercibido, situación anómala por ser un acercamiento importante con el elemento en estudio.

Conclusiones

Los estudiantes tienen problemas de álgebra y en general falta de interés e iniciativa para poder estudiar estos temas, ya que en su mayoría creen que es solo práctica, pero olvidamos la parte del significado, el vínculo que se tiene que dar entre las matemáticas y la ingeniería; se debe al contexto mismo de las matemáticas en las ingenierías.

Es importante mencionar que los vínculos conceptuales que se plantean en el problema de investigación están latentes durante todo el desarrollo de este trabajo de investigación los cuales los podemos clasificar de la siguiente manera:

Diferencial - Función Continua – Señal Analógica.
Incremento - Función Discreta – Señal digital.

La matemática está aislada de la aplicación; es decir cuando se ve matemáticas no se ven aplicaciones, porque resulta ser muy frecuente que el profesor que da matemáticas en ingeniería es matemático puro y el profesor que da las aplicaciones delega la responsabilidad al de matemáticas, dando por hecho ambas partes que su conocimiento está dado. Cabe mencionar que pareciera ser que las matemáticas están desvinculadas con las aplicaciones, y aquí es donde se da la parte fuerte del aprendizaje significativo; la matemática en contexto y los vínculos conceptuales que no se han identificado, pero es evidente que están latentes en este trabajo de investigación.
Como pudimos ver en los conceptos estudiados anteriormente; es muy importante que en las escuelas a nivel medio y superior, aborden conceptos que involucren la parte discreta de las matemáticas, como series de Fourier, transformadas de series de Fourier y transformada Z, por mencionar algunas. Es importante mencionar que los programas de estudio no los consideran y si se llegan a considerar en la mayoría de los casos el tiempo es clave para que no se concluyan estos temas de interés. Es obvio que hasta este momento sólo se ha privilegiado a la parte continua en estudio, y como hemos visto hay evidencias de acercamientos tan importantes al mundo discreto como se pudo ver a la hora de que los alumnos tabulan una función. Es importante hacer notar a los alumnos que están discretizando una función.
Los problemas tan graves que generan la falta de contexto, se refleja en la ingeniería de control, específicamente en la parte discreta y continua, sino se tienen las bases y las herramientas necesarias para abordar problemas que tengan que ver con señales analógicas y digitales; los estudiantes difícilmente darán solución a los problemas con los cuales se están enfrentando. Es importante resaltar también la importancia que tiene la conversión de señales; es decir de digital-analógico y analógico-digital, que posteriormente son base para contextualizar y poder modelar sistemas, tanto en el mundo analógico como en el mundo digital.
En el análisis de libros de texto pudimos observar que en lo que se refiere a los libros de matemáticas estos abordan los temas de forma tradicional; es decir dan demostraciones de los teoremas, y resuelven ejercicios que sólo favorecen a la parte algorítmica; carecen de ejercicios que hagan al alumno contextualizar la matemática, es decir que le vean la aplicación. En los libros de ingeniería que se analizaron pudimos observar que algunos dedican un tema de repaso para algunos conceptos de matemáticas, también pudimos notar algunos temas que aplican las matemáticas y dan evidencia de que son herramientas poderosas para el estudio de la ingeniería de control, refiriéndonos en forma general al análisis de circuitos, analógicos y digitales.
Los temas expuestos en los libros de texto se enfocan más a las ecuaciones diferenciales y la transformada de Laplace, así como la transformada *Z*, ya que son bases importantes para poder contextualizar la ingeniería de control.

Se pudo observar que en la entrevista que se le hizo a un alumno de último semestre de la carrera de ingeniería electrónica, no supo decir dónde se aplicaba la transformada *Z*, lo interesante es que definió bien el concepto de función y dónde se aplican las ecuaciones diferenciales, pero lo que no supo es dónde se aplica la transformada *Z* y como ingeniero el va a manipular componentes electrónicos, cuya base matemática para modelar sistemas electrónicos que requieren a la transformada *Z* como herramienta, ésta es una evidencia clara de cómo no se ha incursionado en la práctica docente en el cálculo discreto.

Las curriculas actuales de las ingenierías dan evidencia de que se trabaja más con el cálculo continuo que con el cálculo discreto y lo poco que se contempla del cálculo discreto algunas instituciones no los cubren, por falta de tiempo, motivo por el cual el profesor titular de la materia donde se debe aplicar la matemática, a veces pierde algo de tiempo por tratar de dar algo de matemáticas discretas que no cubrieron las asignaturas anteriores.

Uno de los principios fundamentales del aprendizaje significativo es la parte cognitiva del conocimiento, para que se pueda dar un contexto y un significado a los conocimientos que ya se tienen. En el trabajo de investigación nos pudimos dar cuenta que en matemáticas discretas, no se tiene como antecedente, series de Fourier transformadas de series de Fourier, así como transformada Z. Como estas herramientas no se tienen, difícilmente un alumno podrá contextualizar y dar significado a las matemáticas en ingeniería de control.

A modo de reflexión, quisiera comentar que creo que la falta de contexto de significado de las matemáticas en la ingeniería, en la actualidad, es un obstáculo muy grande y uno de los motivos por los cuales se hace muy poca ingeniería aquí en nuestro país.

Bibliografía.

Rondero C. (1995).,*Ensayo sobre la dualidad* ***discreto-continuo****, de los saberes matemáticos. Casos de transición y transposición didáctica*. Tesis de Maestría. CINVESTAV-IPN, México.

Rondero C. (2000). *Un estudio sobre el papel de las ideas germinales, Ponderatium y AEquilibrium, en la construcción del saber Físico Matemático.* Tesis de Doctorado CINVESTAV-IPN. México.

Camarena P. (1995). *La Matemática en Contexto.* Novena reunión Centroamericana del Caribe Sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa, IPN. México.

Camarena P. (1999). *Hacia la Integración del Conocimiento: Matemáticas e Ingeniería*. Segundo Congreso Internacional de Ingeniería Electromecánica y de Sistemas. ESIME-Zacatengo IPN. México.

Piaget J. (1970), *Structuralism*. New York, Harpet & Row.

SISTEMATIZACIÓN DE EXPERIENCIAS

Se comunican experiencias en matemática educativa, informando de la intencionalidad que subyace y guía a la experiencia, como también cual ha sido la estrategia metodológica implementada. Además considera elementos conceptuales y/o marco teórico que orientan la práctica; marco contextual donde se inserta la experiencia y su descripción; marco metodológico que guía la sistematización. Culmina con la interpretación del proceso o elaboración de saberes desde esa práctica.

CONSTRUYENDO LA NOCIÓN DE FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA: ESTRATEGIAS DE APRENDIZAJE

S. Maldonado, G. Montiel y R. Cantoral
México, Cinvestav – IPN
gmontiel@ipn.mx, rcantor@mail.cinvestav.mx

Resumen
La enseñanza contemporánea se ve modificada, considerablemente, a causa de los resultados recientes de la investigación en matemática educativa tanto al nivel nacional como al de las diferentes regiones y escuelas de pensamiento en el mundo de hoy; estos resultados plantean, por ejemplo, que los asuntos del aprendizaje ligados al papel de la representación, la visualización y la utilización de tecnologías de la información juegan un papel prioritario en el diseño de secuencias didácticas novedosas para la escuela y la universidad. En el marco de este curso, dimos cuenta del estudio de las condiciones de construcción social de las funciones trigonométricas y lo presentamos a la luz de propuestas didácticas para favorecer los aprendizajes de los alumnos.

Antecedentes
Nuestro curso se apoya en el diseño de una presentación para el tratamiento de las funciones según la propuesta del libro *Funciones: visualización y pensamiento matemático* de Cantoral y Montiel, (2001). Este texto fue diseñado con base en las investigaciones conducidas por el equipo de Educación Superior del Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav – IPN en México. Se compone de secuencias didácticas sobre la noción de función desde una perspectiva en la que la visualización juega un papel relevante, con la mediación del uso de una particular tecnología, las calculadoras con capacidad gráfica con opciones dinámicas. Esta aproximación ha sido trabajada en diversos programas de formación docente en nuestro país, así como en eventos internacionales sobre enseñanza de la matemática. Para desarrollar esta propuesta consideramos como punto de partida que previo al estudio del cálculo, se precisa de la adquisición de un lenguaje gráfico que posibilite la transferencia de campos conceptuales virtualmente ajenos a causa de las enseñanzas tradicionales, estableciendo un "isomorfismo" operativo entre el álgebra básica y el estudio de las curvas, mejor aun, entre el lenguaje algebraico y el lenguaje gráfico (Cantoral y Farfán, 1998).
En nuestra opinión, el concepto de función ha sido una pieza clave en el desarrollo de la matemática, las ciencias y la tecnología. Aunque algunos de los resultados de investigación han llegado al nivel de propuestas didácticas, en la mayoría de las "clases reales" se le sigue reduciendo a una mera presentación formal y se acompaña de un tratamiento algorítmico entre los alumnos.

El proceso de transposición didáctica no es un proceso simple ni lineal, como se ha documentado ampliamente por la teoría antropológica de la didáctica de Yves Chevallard, y se sabe además que la participación de los profesores en tal proceso resulta de la mayor importancia, pues serán ellos quienes al final, con sus clases cotidianas podrán participar en el desarrollo del pensamiento matemático de sus estudiantes. Investigaciones como (Vinner, 1983; Dreyfus y Eisenberg, 1990; Breidenbach, et al., 1992, Dubinsky y Harel, 1992) tratan sobre el concepto de función y reportan dificultades ligadas a su aprendizaje. La mayoría de las aproximaciones teóricas que abordan la noción de función, han puesto la atención en la construcción de significados a través de procesos que bien podríamos llamar mentales. Vinner (1983) reporta por ejemplo algunas imágenes del concepto que desarrolla el alumno, en las que domina la regularidad en sus representaciones, se tiene también un cierto rechazo a las fórmulas y gráficas de funciones definidas por intervalos, a las fórmulas y gráficas de funciones constantes (por la ausencia de la variable independiente o la falta de variación en el bosquejo de la gráfica), entre otras. En otro sentido, apropiarse del significado de la noción de función implica formar una imagen de ella, tener estructuras cognitivas que se asocien al concepto, incluyendo representaciones mentales, procesos y propiedades asociados, más que la definición formal del concepto. Sin embargo, el cerebro no es una entidad puramente lógica, la manera compleja en la que funciona está a menudo en desacuerdo con la lógica matemática. El desarrollo de las imágenes conceptuales y de razonamiento, como camino hacia la comprensión y el aprendizaje de las ideas matemáticas, no puede ser coherente durante todo el tiempo pues los estímulos sensoriales excitan ciertos caminos neuronales e inhiben otros, pudiéndose producir conflictos congnitivos entre partes inconscientes de la imagen conceptual construida por el sujeto (Vinner y Tall, 1981).

En (Dubinsky y Harel ed., 1992; Breidenbach, et al., 1992) se hace una extensión del análisis piagetiano de la percepción y de la inteligencia usando el marco teórico de la abstracción reflexiva mediante acciones, procesos, objetos y esquemas, para hablar de la apropiación de las nociones. En términos generales, ellos reportan en lo que respecta a la noción de función, la complejidad que implica el pasaje de la concepción de acción a la concepción de proceso, debido a ciertas restricciones como la debida a su concepción (restricción de manipulación, restricción de cantidades, restricción de continuidad en la gráfica). Se refieren a una concepción de acción cuando el alumno requiere de las instrucciones precisas, como por ejemplo del empleo de fórmula algebraica para estar en condiciones de realizar transformaciones sobre ella, evaluar en puntos específicos o realizar la composición de dos funciones haciendo las sustituciones correspondientes, digámoslo así, haciendo sólo un paso a la vez. Una concepción de proceso significa bajo este enfoque, el tener una idea más dinámica, poder pensar a la función como algo que recibe una o más entradas y que regresa salidas o encontrar la inversa de una función. Esta etapa requiere de las coordinaciones de varias acciones. La concepción de objeto se logra cuando se manipulan las funciones mediante otras acciones y procesos, por ejemplo, cuando se derivan. Lograr la concepción de esquema involucra acciones, procesos y objetos del concepto de función, y distingue cuales pertenecen a cada esquema.

Otra postura respecto de esta noción de función se establece en términos de la llamada *dialéctica herramienta - objeto* de Régine Douady, quien reporta la existencia de dificultades para considerar a las funciones como *herramientas* en el trabajo matemático y, de forma más notoria, para traducir al contexto de funciones aquellos problemas que han sido planteados en otros contextos matemáticos como el numérico, geométrico, o externos a la matemática y que requieren de una *traducción* para ser resueltos.

En las aproximaciones teóricas mencionadas se le confiere un estatus importante al manejo de las diferentes *representaciones* del concepto de función, ya sea en términos de imágenes del concepto, concepciones de acción, proceso, objeto y esquema o en la dialéctica herramienta objeto. La formación del pensamiento científico, particularmente en matemática, está íntimamente ligado al desarrollo de simbolismos específicos para *representar* a los objetos y a sus relaciones, por tanto, el progreso de los conocimientos implica la creación y el desarrollo de sistemas semióticos nuevos y específicos (Ferrari, 2001). Por su parte, en (Duval, 1995) se señala que no puede existir comprensión en matemáticas si no se distingue un objeto de su representación, pero se requiere del manejo de estas representaciones para comprender el objeto. Se busca entonces la *formación, tratamiento* y *conversión* de los registros semióticos de representación del objeto para lograr su aprendizaje. Se ejemplifica este proceso con un esquema de la articulación de registros semióticos para el caso de la función cuadrática, lo que nos hace pensar que se requiere de un sistema de representación semiótico específico de este objeto, en otras palabras, que este sistema sería distinto de aquel que se utilice en la función lineal, o en una función trascendente por ejemplo.

Sin embargo, las dificultades ligadas al aprendizaje del concepto de función no pueden limitarse al manejo y articulación de sus representaciones, pues existen también obstáculos epistemológicos inherentes al concepto mismo y no así a las particularidades de las maneras de enseñarlo, son propios de la construcción cultural. Para otros autores, los entendimientos relativos al concepto de función consisten de la identificación de cambios observados a nuestro alrededor como un problema práctico a resolver, así como el reconocimiento de regularidades en las relaciones entre cambios como una manera de estudiarlos. Ignorarlos como condiciones necesarias para el desarrollo de la noción de función, conllevaría enfrentar un obstáculo epistemológico, relativo a la filosofía de la matemática, respecto a considerar que los problemas prácticos no conciernen a esta disciplina. Esto desconocería lo sucedido en la historia de las ideas, pues las funciones aparecieron como herramientas para predecir y describir fenómenos de la naturaleza. Por otro lado, se considera que el desarrollo de una fuerte creencia en el poder de las operaciones formales con expresiones algebraicas y la creencia que sólo las relaciones que pueden expresarse mediante una fórmula analítica son funciones constituyen otro obstáculo. En tanto que, discriminar entre la función y las herramientas analíticas utilizadas para describir una ley implicaría un acto de entendimiento. Además se establece que la definición es una descripción del objeto conocido a través de los sentidos. La definición no determina al objeto, sino el objeto a la definición. Superar este obstáculo requeriría la capacidad de *discriminar* entre una definición matemática y la descripción del objeto, es decir, hacer una *síntesis* de la concepción general de función como objeto. Tomar en consideración los elementos epistemológicos de la construcción de los conceptos nos hace pensar en cómo enfrentar la problemática del aprendizaje del concepto de función cuando tenemos distintos tipos de funciones (algebraicas, racionales, trascendentes, entre otras), cada una con origen en un contexto específico, con distintas propiedades analíticas, esto es, con epistemologías propias, esto lo aborda ampliamente la socioepistemología.

Bajo este enfoque, se sabe que un concepto no se reduce a su definición, y que se constituye en distintos contextos de representación. La articulación y vinculación de estos contextos son necesarias para el entendimiento del concepto, pero no suficientes. Por ejemplo, para el caso del concepto de función, el alumno debe reconocerlo como definición, relación de conjuntos, tabla de valores, fórmula, gráfica, representación icónica; y, vincular y transitar entre una y otra, pero además, deberá darle una *funcionalidad* al concepto dentro y fuera de escenarios escolares. Esta funcionalidad debe reconocerse en su construcción social, y por lo tanto reproducir ciertas prácticas culturales.

Dado que el entendimiento es parte del complejo mundo del pensamiento y comportamiento humano, hay elementos tales como la expresión, el gesto, los movimientos, la interacción con el medio, que contribuyen al entendimiento de los problemas y a su resolución. Quizá por ello las corrientes sicológicas se han ocupado de los asuntos de visualización de los conceptos matemáticos, incorporando heurísticas de aprendizaje, contextos de representación, herramientas visuales, entre otras. En su mayoría, toman en cuenta la articulación de contextos y sus procesos cognitivos relacionados como la ***visualización de los conceptos*.**

Este curso se enfocó al estudio de los efectos del juego de marcos, el algebraico y el analítico en particular, en la construcción de propiedades analíticas de las funciones trigonométricas. En el tránsito de estos marcos para las funciones trigonométricas, buscamos localizar y analizar las propiedades asociadas a las funciones circulares o trigonométricas, tanto al nivel del origen del conocimiento como al de la forma en que los estudiantes pueden participar de dicho proceso.

Haciendo un estudio breve de los programas curriculares en cuanto al estudio de función trigonométrica, observamos que para definirlas se presentan elementos involucrados a su aplicación; tales como el triángulo, círculo trigonométrico, medida de ángulos. El interés principal para su presentación radica en solo aprender los términos que la definen para su uso como herramienta en la solución de problemas.

Ahora bien, consideramos de partida que la trigonometría clásica se basa en el estudio de las propiedades de los triángulos, y de las razones trigonométricas como medios principales para estudiar dichas propiedades; en la trigonometría analítica en cambio, se inicia con el círculo, de modo que el círculo unitario permite dar otra definición a las funciones trigonométricas, mediante las que se estudian sus propiedades de naturaleza analítica. El paso de la medida de los ángulos en grados a la medida de los ángulos en radianes plantea un escenario de interés para los estudios didácticos, en este estudio nos interesaremos más por el tránsito que se da de las funciones trigonométricas sobre ángulos a las funciones trigonométricas sobre reales. Este curso desarrolló estrategias didácticas para estos fines.

En algún sentido, la limitación que introduce el tratamiento de las funciones trigonométricas restringidas a los ángulos es matemáticamente innecesaria, y de hecho consideramos que puede constituirse como un obstáculo didáctico para el aprendizaje. Con frecuencia en las clases y en las aplicaciones matemáticas, se deberá tratar con funciones trigonométricas como funciones del tiempo o de la distancia, o simplemente como funciones de un número real. Pero debemos señalar que si bien la diferencia entre sen(2 rad) o sen(2°) o sen(2) no tiene demasiada importancia significativa en los textos y en las clases de matemáticas, si creemos que plantea una dificultad mayor al nivel de los procesos de aprendizaje. Esto se acentúa cuando notamos que en las diferentes calculadoras con capacidad gráfica, o en los programas computacionales con posibilidades de graficación, se emplea la misma tecla *sen* para todos los fines, independientemente del dominio de definición o de las unidades de medida que se elijan, ya sea para evaluar una razón o para graficar una función.

Aunque la presentación escolar de las funciones trigonométricas será restringida en los primeros años de su enseñanza a las relaciones entre las medidas de los lados de los triángulos rectángulos con las de sus ángulos interiores, más adelante el alumno encontrará que tiene que operar sobre situaciones novedosas, como por ejemplo habrá de tratar con ángulos superiores a 180° sin hacer alusión a triángulo alguno, o deberá graficar funciones que combinan una parte algebraica con otra trascendente, como cuando debe estudiar el crecimiento de $f(x) = \text{sen}x + x$, o decidir sobre la suavidad de la gráfica de la función g en el origen, con: $g(x) = \cosh - 1$ si $x \geq 0$; pero es 0 si $x < 0$, del mismo modo ocurre cuando deba calcular límites que no se abordan con estrategias algebraicas, como por ejemplo los límites:

$$\underset{x\to 0}{lím}\frac{senx}{x} \text{ o } \underset{x\to 0}{lím}\frac{\cos x - 1}{x}.$$

También tendrá que discutir la naturaleza de la convergencia de series que involucran, de diferentes formas, a las funciones trigonométricas, como por ejemplo:

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \text{ o bien } \sum_{1}^{\infty}\frac{sen(2n-1)x}{2n-1}$$

Bajo este enfoque, no estaremos limitando nuestra problemática de interés, al papel de las representaciones semióticas en la actividad cognitiva de los alumnos, ni a la formación de representaciones mentales entre los escolares, sino más bien, desarrollaremos la tesis de que la epistemología de la funciones trigonométricas, y el uso social que de ellas se hace, impregnan de significados a dichos conceptos. Fundamentalmente, asumimos que los obstáculos epistemológicos ligados a la construcción de función trigonométrica deben ser considerados en un diseño de ingenierías didácticas particulares.

Iniciamos el curso con la resolución de ecuaciones algebraicas mediante factorización de polinomios con coeficientes reales, estudio gráfico y algebraico de las funciones potencia. Queremos trabajar la naturaleza de las raíces de una ecuación polinomial: simples, dobles, triples y cuádruples, y sobre el cómo se forma un patrón de comportamiento gráfico para $y=x^{2n}$ y $y=x^{2n+1}$, la función seno, incluida su gráfica y sus propiedades como periodicidad, acotación, oscilación, pero que no se haya estudiado a la función seno como el límite de una particular serie potencias.

En este sentido, nuestra propuesta se desarrollará sobre factorización de polinomios y su clasificación por la naturaleza de sus raíces, tomamos la forma algebraica y la naturaleza del contacto entre la gráfica de una función potencia y el eje X. Centraremos la atención en las formas de escritura, de argumentación y de validación y del empleo de gestos y movimientos corporales que pongan en juego ante problemas no rutinarios.

Pero un tratamiento, basado en gráficas, movimientos y argumentaciones con respecto de las funciones trigonométricas no podría reducirse a transformaciones y traslaciones, sino dar inicio por la construcción de sus primitivas (sen x, cos x, tan x). De aquí que, como segunda parte del curso, se reflexionó y discutió sobre los momentos de ruptura que precisa la función trigonométrica para su construcción en el aula, y que proponemos son:

- De la realidad macro al modelo a escala
- La razón como abstracción de la proporción
- Extracción de la razón de un referente teórico: el triángulo.
- Conversión de unidades: grados $\leftrightarrow$ radianes $\leftrightarrow$ reales
- De las funciones reales a las funciones complejas

de donde proponemos nuestra hipótesis de investigación, a saber, *que la función trigonométrica abstrae propiedades de las tablas trigonométricas y del estudio de los triángulos, pero obedece a prácticas de naturaleza distinta que la trigonometría como rama de la geometría*. De aquí que nuestro fundamento teórico sea aquel que incorpore las cuatro componentes de la construcción social del conocimiento matemático, la *socioepistemología*.

Referencias

Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, J. y Nicholson, D., (1992) Development of the process Concept of function. *Educational Studies in Mathematics*, 23 (3), 247 – 285.

Cantoral, R. y Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Epsilon*, 42, 353 – 369.

Cantoral, R. y Montiel, G. (2001) *Funciones: visualización y pensamiento matemático*. México: Prentice Hall.

Chevallard, Y. (1985) *La transposition didactique du savoir savant au savoir enseigne.* La Pensee Sauvage, Grenoble, France.

Dreyfus, T. y Eisenberg, T (1990). On the reluctance to visualize in mathematics. Visualization in teaching and learning mathematics. En W. Zimmerman y S. Cunningham (Eds.) MAA Notes 19, 25 –38.

Duval, R. (1995) *Semiosis y Pensamiento Humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática.

Dubinsky, E. y Harel, G. (Eds.). (1992): *The concept of function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*. Notes 25, MAA.

Ferrari, M. (2001) Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo. Tesis de Maestría. Cinvestav – IPN. México.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. Educational Studies in Mathematics **12**, 151 – 169

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of mathematics education, science and technology.* 14 (3), 293 – 305

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA SOBRE DIFERENTES RELACIONES DIDÁCTICAS EN EL PROCESO DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA EN CARRERAS DE INGENIERÍA

Jorge Azpilicueta y Alicia Ledesma
Universidad Nacional de Córdoba, República Argentina.
jorgeazpilicueta@arnet.com.ar

Resumen

Dada la relevancia que tiene en la actualidad el currículum de las Matemáticas en carreras de ingeniería, el CONFEDI (Consejo Federal de Decanos de Ingeniería) ha considerado y dejado establecido que en el proceso de modernización de la enseñanza es necesario formular adecuadamente los objetivos de la educación matemática, describir el papel que desempeña en la formación de los ingenieros y en su práctica profesional, seleccionar contenidos y distribuirlos correlativamente a lo largo de la carrera, precisar sus alcances y elegir de manera adecuada los aspectos metodológicos del trabajo en el aula, el que debe tener un fuerte acento en el planteo de situaciones problema vinculados con la profesión. Estos propósitos docentes deben tener en cuenta en primer lugar cual es la preparación previa de los alumnos que deben cursar Matemática en el primer año de Ingeniería en la Universidad Nacional de Córdoba y en segunda instancia cuáles son sus expectativas y el nivel de desempeño, al inicio y durante el desarrollo de dichos cursos. Para conocer como se manifiestan las posibles relaciones didácticas entre docentes y alumnos durante el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, se plantea como objetivo de esta investigación realizar una evaluación diagnóstica sobre: el rendimiento escolar de los alumnos que ingresan en el Ciclo de Nivelación, las condiciones de enseñanza-aprendizaje en los cursos de Introducción al Análisis Matemático y Análisis Matemático I, y la opinión de los docentes que dictan estas materias en contextos educativos similares. De los resultados de esta experiencia se puede inferir que la mayor parte de los alumnos que cursan Matemática, tienen cierto grado de dificultad en el aprendizaje de la misma, más por razones de índole metodológica, que por otras causas. Una evaluación diagnóstica de este tipo es siempre un punto de partida muy útil para la toma de decisiones con el fin de elaborar un plan de acción metodológico que facilite el logro de los aprendizajes matemáticos en este nivel educativo y contribuir al desarrollo de la Didáctica de la Matemática como disciplina científica.

Introducción

Esta experiencia visualiza cuáles son las relaciones didácticas que se establecen entre Profesor y Alumno en el Ciclo de Introducción a la Matemática y en el curso de Análisis Matemático I en la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de la UNC.

Se parte de la premisa general de que un profesor se encuentra con sus alumnos en el aula para enseñar un conocimiento matemático determinado que deberán aprender los alumnos. Enseñar significa crear las condiciones que producirá la apropiación del conocimiento por parte de los estudiantes. Para un estudiante "aprender" significa involucrarse en una actividad intelectual cuya consecuencia final es la disponibilidad del conocimiento en su doble condición de herramienta y objeto. Las realidades pueden ser otras y dependerán de las interacciones que se puedan establecer entre ambos protagonistas de este proceso.

La Matemática ayuda a pensar, a inducir y deducir, a analizar y sintetizar, a generalizar y abstraer y a realizar otras operaciones mentales que contribuyen al desarrollo de la inteligencia Nickerson, R. [8]; Resnick, L.[9]; Guzmán, M.[4]; Fernández, V. et al [3] y Kilpatrik, J.[6]. Para Artigue, M. [1] el conocimiento

matemático puede ser una manifestación de la interacción antes mencionada para el profesor, pero no del todo para un cierto número de estudiantes. O al contrario ser una manifestación para algunos estudiantes y puede no serla para el profesor.
Sin importar cuales son las intenciones al llegar a la Facultad de Ingeniería, cada alumno va a tener más o menos éxito o a fracasar en su proyecto. Del otro lado, según la historia personal del profesor, su propia representación y conocimiento de la Matemática, su concepción del aprendizaje de la Matemática, su voluntad de conocer y la fuerza de las restricciones a la cuales esté sometido, intentará hacer valer y defender sus convicciones en el marco del currículum del Cálculo, según los objetivos y los aspectos metodológicos de la educación matemática en su Institución, González, J.[4]; Moitre,D. [7] y Azpilicueta, J. [2].
Para lograr un punto de partida con mayor conocimiento de la realidad de los alumnos ingresantes a la Facultad de Ingeniería, el objetivo de esta investigación es realizar una evaluación diagnóstica para conocer el grado de preparación, rendimiento y las expectativas que tienen los estudiantes en relación a la Matemática en los cursos iniciales, y la opinión de los docentes que enseñan esta materia en la UNC, a fin de optimizar las relaciones didácticas entre ambos protagonistas de este proceso de enseñanza-aprendizaje.

Metodología

Se trabaja en tres direcciones a través de encuestas a docentes y alumnos:
La encuesta Nº 1 se realiza a los alumnos que cursan el Ciclo de Nivelación 2001, en dos comisiones: la 116–Ingeniería Electrónica- y la 162–Ingeniería Industrial-, con un total de 100 alumnos (tamaño de la muestra igual al quince por ciento del total de alumnos). Se analiza en general la categoría rendimiento en el secundario y en particular las categorías en la materia Matemática, del curso de nivelación.
La encuesta Nº 2 está orientada a determinar cuales son las condiciones iniciales de los alumnos que cursarán Análisis Matemático I, habiendo cursado previamente, Introducción al Análisis Matemático. El tamaño de la muestra es igual a 62, de un total de 350 alumnos del curso regular.
La encuesta-entrevista Nº 3 se realiza a docentes que enseñan Matemática y/o Análisis Matemático tanto en carreras de ingeniería como en otras carreras que tienen Matemática en su currícula (Geología, Economía, Ciencias Químicas) en la Universidad Nacional de Córdoba. El objetivo de la misma es considerar distintos aspectos pedagógico-didácticos y específicos del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en carreras para no matemáticos.

Resultados

Respecto a la encuesta Nº 1 se observan los siguientes resultados:
A) Rendimiento académico en el último curso que realizó el alumno en el Secundario, según el grupo al cual considera pertenecer.

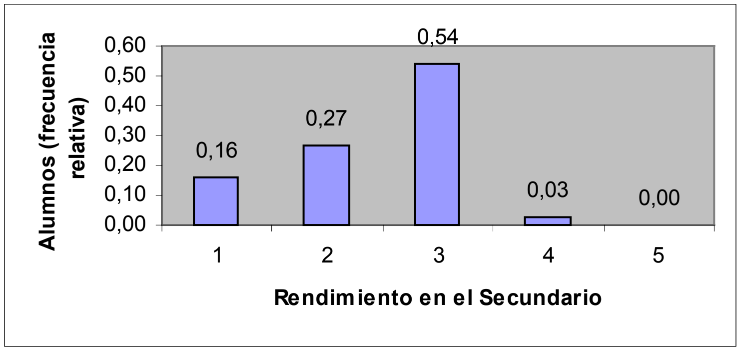


Fig. 1. Rendimiento académico del último curso del secundario categorizado como: 1: grupo de los mejores; 2: grupo de los destacados; 3: grupo de los normales; 4: grupo de los mediocres; 5: grupo de los peores.(Ajuste prueba de Chi-cuadrado).

B) Respecto a la asignatura Matemática la Tabla Nº1 muestra: aprendizaje de la materia, adecuación de carga horaria, contenidos desarrollados y actividades propuestas (cantidad y calidad).

	No opina	Muy bueno	Bueno	Aceptable	Pobre
Aprendizaje	0,05	0,36	0,38	0,21	0
Adecuación	0,06	0,2	0,34	0,31	0,09
Cantidad	0,06	0,18	0,48	0,24	0,04
Calidad	0,08	0,24	0,41	0,23	0,04

C) Distribución del tiempo en estudio dedicado a Matemática.

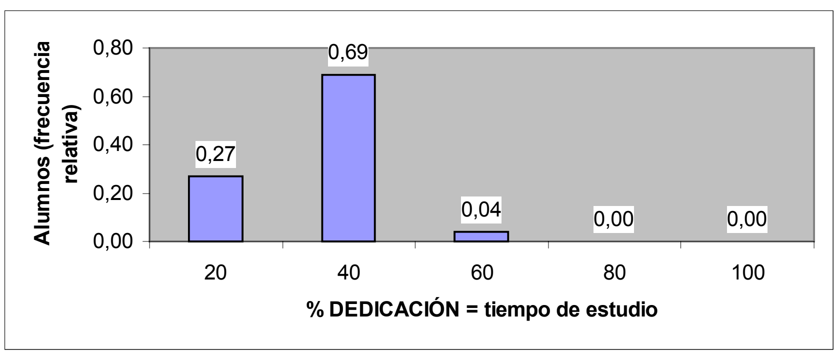


Fig. 2. Tiempo de los alumnos dedicado al estudio de la materia. (Ajuste prueba de Chi-cuadrado).

D) Grado de dificultad de los alumnos en Matemática.

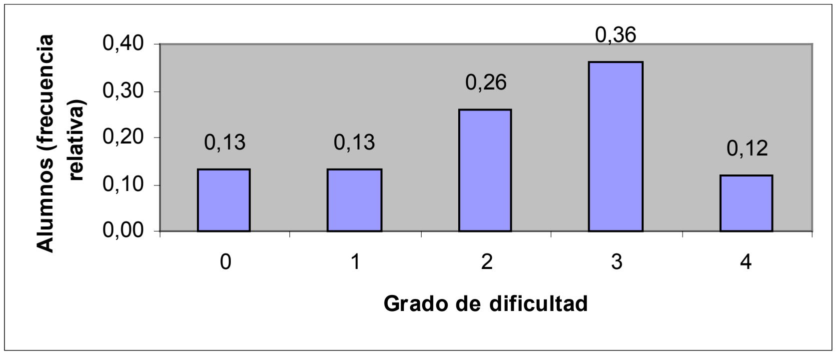


Fig. 3. Grado de dificultad categorizado como: 0: no opina; 1:muy alto; 2: alto; 3: medio; 4: bajo.
E) Desempeño del profesor de matemática en el curso introductorio ver Tabla Nº2.
Tabla Nº2: Respuesta de los alumnos a las actividades del Profesor.

	No opina	Muy bueno	Bueno	Aceptable	Pobre
Profesor (dictado)	0,05	0,65	0,16	0,14	0
Profesor (organización de contenidos)	0,05	0,42	0,41	0,12	0
Profesor (preguntas-respuestas)	0,06	0,61	0,22	0,09	0,02
Profesor (estímulo)	0,08	0,24	0,41	0,23	0,04

La encuesta Nº2 tiene tres items: A. Condiciones iniciales de los alumnos que cursarán Análisis Matemático I; B. Forma de estudio que realizan los alumnos y C. Expectativas al iniciar el curso de Análisis Matemático I.
Para el punto A se observa en la Tabla Nº3.
Tabla Nº3: El cumplimiento de las expectativas, las dificultades en el cursado de la materia y la comprensión e integración de contenidos por los alumnos.

	Totalmente	Parcialmente	Ninguno
Cumplimiento expectativas	40%	57%	3%
Dificultades en el cursado	32,78%	62,30%	4,92%
Comprensión e integración	14,00%	79,00%	7,00%

El punto B, resume algunas condiciones de estudio que realizan los alumnos en la clase de Análisis Matemático I (2001) y fuera de ella (Tabla Nº4).

Pregunta (Item B)	Si (%)	No (%)
1. Le gustaría poseer otra forma de estudio más eficaz	75,41	24,59
2. Le resulta fácil estudiar solo.	65,58	34,42
3. Le resulta fácil estudiar en grupo.	63,94	36,06
4. Le resulta más fácil que el profesor exponga siempre.	90,17	9,83
5. Le resulta fácil estudiar parte de los temas por libros.	32,79	67,21
6. Pone atención durante la explicación del profesor.	100,00	0,00
7. Realiza preguntas durante la clase si no entiende algo del tema.	57,38	42,62

Para el punto C se presentan en la Tabla Nº 5 las categorías de las expectativas que tienen los alumnos al iniciar el curso de Análisis Matemático I (2001) en una escala de 1 a 10

Categoría	Expectativa	Respuesta (%)
1	Finalizar el cursado sabiendo razonar y aplicar los conocimientos adquiridos en la Práctica Profesional.	24,15
2	Aprender e integrar conocimientos.	16,6
3	Recordar los contenidos aprendidos en Análisis Matemático I para no tener dificultades en las materias correlativas.	16,67
4	Entender los conceptos desarrollados en la clase.	9,38
5	Que todos los temas sean desarrollados durante el cursado.	6,25
6	Aprobar la materia.	5,20
7	Lograr comprender algún tema en particular (por ej. Integrales, Derivadas, Funciones, etc.)	4,17
8	Que se profundicen más los contenidos de la materia.	3,13
9	Que las explicaciones del docente sean claras.	3,13
10	Mejorar la relación docente/alumno.	3,00

La encuesta-entrevista Nº 3 realizada a docentes que enseñan Matemática o Análisis Matemático visualiza que:
existen múltiples causas por las cuales los alumnos tienen bajo rendimiento en la materia.
el nivel de los estudiantes, en Matemática al inicio de los cursos universitarios es regular o malo.
Las dificultades se pueden categorizar, de mayor a menor, en los siguientes niveles: 1:Mala base en el secundario; 2 :Escaso desarrollo del pensamiento lógico; 3:Dificultad lecto-comprensiva; 4: Dificultad en la aplicación de los conceptos matemáticos; 5: Aprendizaje memorístico; 6: Falta de interés de los alumnos por ser Matemática materia básica en la Carrera; 7: Falta de una metodología de enseñanza

adecuada; 8: Falta de integración de los conceptos matemáticos con la carrera; 9: Clases tradicionales. Profesor conductista.

Exposición y Discusión de Resultados

En relación al rendimiento académico en el secundario, la mayoría de los alumnos se consideran situados en el grupo de los normales, seguido del grupo de los destacados, de los mejores y un bajo porcentaje en el grupo de los mediocres. Si se agrupan las tres primeras categorías se observa que prácticamente el 97% de los alumnos están en condiciones para comenzar un proceso de aprendizaje de la matemática sin mayores dificultades o al menos motivados para iniciarlo (Fig. 1).

Respecto de la asignatura Matemática que se dicta en el Ciclo de Nivelación (Tabla Nº1) se observa que el aprendizaje ha sido muy bueno y bueno en más del 70%; que la adecuación de los contenidos desarrollados y su carga horaria aproximadamente en un 70% ha sido buena y aceptable, y la relación cantidad y calidad de las actividades propuestas se han definido en casi un 70% como buena y aceptable, y un 20% muy buena. La mayoría de los alumnos ha dedicado alrededor de un 40% (promedio) del tiempo de estudio a Matemática, con un grado de dificultad alto y medio mayoritariamente (Fig. 2 y Fig. 3). Sin embargo su opinión en relación al desempeño del docente ha sido en general buena, tanto en el dictado de la clase y organización de la asignatura, como las respuestas del profesor para facilitar el razonamiento de los estudiantes (Tabla Nº2).

El análisis de los resultados de la encuesta Nº 2 muestra que para el 40% de los alumnos las expectativas se cumplieron totalmente, un 57% considera que se dieron parcialmente y sólo un 3% opina que no se cumplieron (Tabla Nº3).

Con respecto al grado de dificultad un 33% declara muchas dificultades, un 62% pocas y un 5% ninguna.

En relación a la forma de estudio, se observa en la Tabla Nº 4, gran interés en tener una metodología más eficaz para el aprendizaje de la materia, no obstante no les resulta fácil estudiar las temáticas por libros, les interesa que el profesor exponga siempre y sólo la mitad de los alumnos hacen preguntas en la clase si no comprendieron los temas.

De acuerdo a las expectativas de los alumnos que cursan Análisis Matemático I, la Tabla Nº 5 muestra que el mayor porcentaje (24,15%) se refiere a “finalizar el cursado de la materia sabiendo razonar y aplicar los conocimientos adquiridos en la práctica profesional”. Luego siguen en orden decreciente con el 16%, dos categorías “aprender e integrar los conocimientos” y “recordar los contenidos de Análisis Matemático I, para no tener dificultades en las otras materias”. Sobre otras categorías y hasta el quinto lugar, los alumnos expresan “entender los conceptos desarrollados en clase” (9,38%) y “que todos los temas sean desarrollados durante el cursado” (6,25%).

La entrevista con docentes que enseñan Análisis Matemático o Matemática General en carreras no matemáticas consideran la existencia de múltiples causas por las cuales los alumnos tienen bajos rendimientos en estas materias. Entre las que se pueden destacar: aprender “sin pensar”; preponderancia de lo visible sobre lo inteligible; falta de capacidad de abstracción (básico para Matemática); lenguaje conceptual sustituido por lenguaje perceptivo que es infinitamente más pobre; metodología de enseñanza en el nivel medio más inductiva y conductista, que impiden alcanzar niveles de comprensión abstracta; falta de preparación y conocimientos de los docentes de nivel medio; falta de interés por el aprendizaje de los educandos; falta de motivación por el aprendizaje o por el proceso de enseñanza-aprendizaje tanto de docentes como de alumnos.

Conclusiones

Como conclusión de esta investigación se puede decir, que los alumnos ingresantes a la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales UNC (2001), tienen afinidad y predisposición en aprender matemática, lo que facilita la relación didáctica profesor-alumno.

En el cursado de esta materia las expectativas de los estudiantes se cumplen parcialmente y la mayor parte de ellos tienen un grado alto y medio de dificultad, lo que impide la integración y comprensión de contenidos de la materia. Los problemas se suscitan en relación a la forma de estudio, expresando gran interés en tener metodologías que faciliten su aprendizaje.

Posibles soluciones se pueden dar al respecto teniendo en cuenta los roles que deben jugar tanto docentes como alumnos. Una de las soluciones es implementar metodologías de aprendizajes asociadas a la participación activa de los estudiantes como la resolución de problemas y otra la capacitación de los docentes en cursos de post-grado, con el propósito de facilitar y coordinar los procesos de enseñanza-aprendizaje de la matemática en contextos no tradicionales.

Bibliografía

Artigue, M. et al. (1995). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática*. Grupo Editorial Iberoamérica.

Azpilicueta, J. (2003*). Enseñanza de la Matemática para no matemáticos: una propuesta para considerar la resolución de problemas como metodología activa de aprendizaje de Análisis Matemático.* Tesis de Maestría en Docencia Universitaria. Universidad Tecnológica Nacional. Facultad Regional Córdoba.

Fernández, V. et al. (1999). *Educación Matemática para no Matemáticos*. Ed. Fundación. U.N. de San Juan. Argentina.

González, J. (1997). Unificación curricular: experiencia argentina. *I Encuentro Iberoamericano de Directivos de Enseñanzas de Ingeniería*. Madrid. España.

Guzmán, M. (1991). *Para pensar mejor*. Barcelona. Paidós.

Kilpatrick, J. (1985). *A retrospective account of the past twenty-five years of research on teaching mathematical problem solving*. In E.A. Silver (Ed. pp. 1-15 Hillsdale NY: Lawrence Erlbaum.

Moitre, D. (2000). *Tercer Congreso Argentino de Enseñanza de la Ingeniería. Tomo I. Bahía Blanca.* CONFEDI.

Nickerson, R. et al. (1985). *Enseñar a pensar*. Aspectos de la aptitud intelectual. Barcelona. Paidos. 1987.

Resnick, L. (1987). Education and learning to think. Washington, D.C.. *National Academy Press*.

FORMACIÓN DE PROFESORES QUE ENSEÑAN MATEMÁTICAS: INVESTIGACIÓN COLABORATIVA, PRODUCCIÓN Y SOCIALIZACIÓN DE SABERES

Edda Curi
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
edda.curi@terra.com.br

Resumen

Este artículo reflexiona acerca de la formación del profesor que enseña Matemáticas en la educación primaria. Este profesional, con formación multidisciplinaria, se encuentra en un momento en el que documentos oficiales se orientan hacia nuevas perspectivas para la formación de profesores en Brasil y destacan la importancia de profundizar los conocimientos sobre los objetos de enseñanza. Como la nueva legislación brasileña tiende hacia la formación de profesores multidisciplinares en nivel superior, la Secretaría del Estado de Educación de São Paulo realizó una experiencia innovadora, un curso superior destinado a profesores que ejercen su profesión, con el propósito de complementar la calificación profesional y profundizar estudios relacionados a áreas curriculares en una estrecha relación de teoría y práctica, aunque existan problemas en relación con la formación de esos profesores que se evidencian en evaluaciones externas, principalmente con relación a la formación matemática proporcionada por ese curso superior en la práctica profesional de esos profesores. Nuestra investigación se enfoca en el impacto de la formación matemática proporcionada por ese curso superior en la práctica profesional de esos profesores. La metodología utilizada fue el análisis de narrativas de siete profesoras que participaban del curso arriba citado y que formaron parte de un grupo de investigación colaborativa. Inicialmente nuestra intención no era formar un grupo de investigación colaborativa, pero los rumbos que el grupo tomó y las características de los encuentros se encuadraron en teorías que varios autores definen como investigación y que sirvieron de base para nuestro análisis. Entre los resultados obtenidos destacamos que las narrativas de las profesoras permitieron identificar puntos fuertes y débiles del curso y necesidades de las profesoras en cuanto a su propia formación matemática. Permitieron también, la producción de nuevos saberes a partir del análisis de las prácticas a la luz de los conocimientos construidos en el curso y la socialización de esos saberes con el grupo. Otros resultados importantes se relacionan con las reflexiones compartidas, pues las mismas posibilitaron que los conocimientos matemáticos y de la educación matemática construidos y desarrollados durante el curso, fueron priorizados por esos profesores en su práctica. La incorporación de esos saberes y la reflexión sobre esa nueva práctica permitía la producción de otros saberes en un proceso continuo de construcción de saberes profesionales.

Un país de grandes números

En los últimos años, el Ministerio de Educación y Cultura ha demostrado gran preocupación con el acceso y permanencia de los niños en la escuela, con la ampliación de los años de escolarización de los jóvenes brasileños, con la democratización de la enseñanza secundaria que actualmente es parte de la Educación Básica, y con la formación de los profesores. Se han realizado muchas acciones, no sólo por iniciativa del MEC, sino también por varios segmentos de la sociedad preocupados por una escuela de calidad para todos. Para transformar ese sueño en realidad, leyes y documentos oficiales fueron producidos en los últimos años, entre ellos la ley de Directrices y Bases de la Educación Nacional – LDBEN 9394-96, los Parámetro Curriculares Nacionales – PCN- para todos los años de enseñanza, las Directrices Curriculares Nacionales – DCN- para formación de profesores. Entre las acciones para la mejora de la calidad de la Educación en el país, el MEC señaló la necesidad de que la formación de profesores, para cualquier año de enseñanza, sea de nivel superior, para ello propuso un plazo de diez años para que en el sistema de enseñanza brasileño solamente trabajen profesores con formación universitaria. Esa propuesta de formación está siendo implantada gradualmente. Hasta el final del sigo XX, el profesor que enseñaba en los cuatro primeros años de la educación fundamental (7 a 10 años) se formaba en los cursos de habilitación para el Magisterio. Se estima que cerca de la mitad de los establecimientos de enseñanza secundaria del país ofrecían un curso de formación de profesores y en el final del año 2000 existían 760 000 alumnos matriculados en esos cursos. En los últimos diez años, el Estado de São Paulo era el responsable por el mayor número de matrículas en los cursos de habilitación de Magisterio. Nuestra vivencia como formadora de profesores de enseñanza fundamental permite afirmar que los cursos de formación de profesores no han logrado articular las cuestiones concretas de la enseñanza de Matemáticas con las teorías, comprometiendo la calidad de los cursos. La preocupación por la formación del profesor generalista, se expresa en los documentos oficiales arriba citados. Esos documentos indican la necesidad de que el profesor conozca sus objetos de enseñanza con más profundidad que aquello que va a enseñar. Es importante destacar la preocupación del documento con el grado de elaboración de ese saber, o sea, con los conocimientos definidos para la escolaridad en la cual el profesor irá actuar y también con los conocimientos articulados a esos que componen un campo de ampliación de profundización del área. Es importante resaltar aún que por primera vez, a lo largo de la historia de los cursos de formación del profesor generalista en Brasil, hay una preocupación por el conocimiento profundo del objeto de enseñanza. En este momento varias Secretarías de Educación, preocupadas en posibilitar a los profesores una formación de calidad, resolvieron proporcionar estudios universitarios para profesores en ejercicio procurando calificarlos en nivel superior. Destaco para este artículo el curso de formación en servicio propuesto por la Secretaría Estatal de Educación de São Paulo.

La experiencia Innovadora del Estado de São Paulo: Valoración de la Formación Matemática

En 2002, en la escuela pública estatal de São Paulo, cerca de 39 100 docentes de la educación fundamental era efectivos (42%), de los cuales 26 700 tenían formación universitaria (68%) y 12 400 en la educación secundaria (32%). La propuesta era de formar 7000 profesores efectivos (56%) en 18 meses[2]. El objetivo del curso era proporcionar a esos profesores la posibilidad de complementar su calificación profesional, profundizando estudios relativos a las áreas curriculares en una estrecha relación de teoría y práctica. Los profesores, distribuidos en grupos de 40, asistían clases mediadas sea por un pedagogo o por un especialista que utilizaba medios interactivos para alcanzar una población de 160 profesores. Los grupos de profesores trabajaban en la misma escuela o en escuelas próximas. El material de apoyo utilizado fue especialmente elaborado para ese curso.

El curso de Matemáticas se desarrolló en 140 horas de clases con más de 48 horas de actividades relativas a la práctica, a las vivencias educadoras. La característica destacada de ese curso fue discutir la teoría asociada a la práctica pedagógica teniendo como eje de formación el estudio (sin la perspectiva de encuadrarlo en los moldes académicos). El objetivo era que los profesores recogiesen informaciones, registrasen sus observaciones, reflejasen sobre su propio trabajo, documentasen sus experiencias. Un tipo de trabajo semejante utilizado en este proceso de formación fue descrito por Lytle y Cocharam-Smith (1999) que lo denominan como "Estudio del Profesor" el estudio sistemático e intencional de un profesor sobre su propio trabajo. El material de Matemáticas fue elaborado por un grupo de Educadores Matemáticos, hecho que ciertamente determinó las concepciones del curso, que orientó la selección y organización de los contenidos priorizados en la formación la elección de metodología de resolución de problemas, las propuestas de pequeñas investigaciones y de análisis de situaciones en el aula, la selección de investigaciones de educadores matemáticos a ser analizadas, las discusiones sobre la importancia de identificar conocimientos previos de los niños y de intervenir en las situaciones de aprendizaje de sus alumnos, etc. Durante el curso fueron desarrolladas 6 unidades a saber: Delineando el escenario, Conocimientos previos, Hipótesis y errores, Contextualización, Resolución de problemas y Construcción de significados, Delineando nuevos tiempos, Valorando competencias matemáticas tales como: experimentar, conjeturar, representar, relacionar, comunicar, argumentar, validar, conexiones entre la Matemática diaria y diferentes temas Matemáticos.

Investigación Colaborativa

Mi objetivo fue investigar el impacto de la formación matemática sobre la práctica de los profesores que participaban de esa formación. Realicé algunos encuentros para conversar con un grupo de profesores y analizar los materiales de formación, las carpetas, las actividades realizadas con los niños, la repercusión en las escuelas, etc. La participación de los profesores en esos encuentros era voluntaria. Desde el inicio, sentía que las profesoras que hacían monografías con temas matemáticos tenían muchas preocupaciones y siempre que fue posible buscaban elementos para discutir la investigación que realizaban. Pasé a darles más atención y el grupo se fue definiendo naturalmente quedando reducido a las siete profesoras. De común acuerdo agendamos otros encuentros con fechas y horarios marcados. Esos encuentros pasaron a tener un carácter informativo. Nos pusimos de acuerdo en que tomaríamos como elementos para reflexión el curso de Matemáticas y su impacto sobre la práctica a partir de las narrativas que las profesoras producirían, destacando situaciones mercantes reveladas por el curso como consecuencia del mismo. A medida en que las profesoras narraban sus experiencias, el grupo reflejaba, cuestionaba, opinaba. Esas contribuciones permitían la ampliación de la comprensión de aspectos revelados por la narradora. Quizás fue la proximidad de las escuelas de actuación de esas profesoras, o su papel de alumnas, la camaradería propia de compañeras de curso, o incluso las narrativas producidas y discutidas por todos, el hecho es que existía una complicidad entre todos los elementos del grupo. Una empatía muy grande fue tomando a los participantes y los encuentros se tornaron extremadamente ricos, todas oían las narrativas de las compañeras y opinaban sobre ellas, no había jerarquía en nuestras relaciones personales, ni profesionales con más expedientes o con diferentes niveles de formación; todas nosotras participamos de las investigaciones en las clases de Matemáticas de las compañeras del grupo, en la elaboración de las secuencias de actividades, en la observación de la clase, en el registro de los datos, en el análisis de los mismos, nosotras discutíamos nuestros éxitos y fracasos, reflexionábamos y producíamos conocimientos. La intención inicial no era formar un grupo de investigación colaborativa, por lo que no había preocupación de utilizar la literatura pertinente, pero los rumbos que el grupo tomó y las características de los encuentros se enmarcaron en teorías que varios autores definen como investigación colaborativa y sirvió de base para el análisis de las narrativas. Realizamos quince encuentros presenciales y 2700 minutos de grabación; seleccionamos algunas partes de narrativas para ese artículo[4]. Autores como Connelly y Clandinin (2000) apuntan como características de la investigación colaborativa: el proceso investigativo fundamentado en una experiencia compartida, la igualdad de participación de todos los miembros del grupo, (profesores y formadores) en el oír, en el hablar, una relación colaborativa entre los elementos del grupo que permite que el profesor y el formador cuenten sus éxitos y también sus fracasos, el compartir de sentimientos de angustias, de crecimiento, de igualdad y de placer. Destacan la necesidad de compartir las narrativas con todo el equipo, de modo que todos sus miembros tengan voz, pero también se establezcan relaciones personales empáticas, en un clima de receptividad y de colaboración. En los primeros encuentros, las profesoras narraron sus historias de vida. Las reflexiones sobre esas narrativas hicieron emerger las relaciones de esas profesoras con las Matemáticas y la influencia de esas relaciones en su práctica profesional y aun en la elección de la profesión. Sandra destacó la influencia de la Matemáticas escolar en la elección de la profesión:

> ... mi fuerte no es las Matemáticas, me relaciono mucho más con la lengua portuguesa, hago poesías, en realidad me gustaría ser escritora, pero acabé dando clases, sólo me gusta enseñar a leer, escribir, recitar... (Sandra)

Nilceia apuntó la influencia de sus profesores en su forma de actuar como profesora:

> ... me pasa en la mente como una película, como resolvía problemas. Uno tenía que hacer la técnica operatoria, la sentencia matemática, operación, respuesta... Uno hacía aquéllo, tan mecánicamente!, uno no entendía, si el profesor preguntaba que cuenta debería hacerse para resolver el problema uno respondía, creo que hay que sumar..., o no creo que sea de menos... siempre hice las cosas muy mecánicas en Matemáticas, sólo ahora es que entendí muchas cosas, voy a poder trabajar mejor con mis alumnos, pues hasta hoy he trabajado mecánicamente, como aprendí... (Nilceia)

Sonia relató su experiencia positiva con relación a las Matemáticas en una situación extra de la escuela:

> ...fui criada en una finca, tuve una experiencia bien concreta con números y medidas, tenía 6 hermanos, cuando mi padre iba a comprar zapatos, él nos medía el pie con una hebra del lana ("pita"). Mi padre hacía muchas cuentas, compras de mantenimiento, paga de los trabajadores, medir área de terreno e identificar la cantidad de semillas para plantar, entonces yo tenía mucho contacto con las Matemáticas. Matemática para mí es eso. (Sonia)

Nuestras reflexiones compartidas, analizaban los modelos de enseñanza que tuvieron mientras estudiantes e identificaban concepciones de las Matemáticas de la escuela y su práctica pedagógica, Según Tarfid, a lo largo de su historia de la vida personal y de la escuela el futuro profesor interioriza un cierto número de conocimientos, competencias, creencias y valores, los cuales son reutilizados, no de la manera reflexiva, pero con gran convicción durante su actuación. En esa perspectiva, los saberes empíricos[5] de los profesores no están basados solamente en su actuación en el aula de clase, sino que también acuden a gran parte de preconcepciones de enseñanza y del aprendizaje heredadas de su historia de vida y de su historia escolar. Aparte de eso, él afirma que hay mucho más continuidad que ruptura entre el conocimiento profesional del profesor y las experiencias preprofesionales, especialmente las que marcaron su socialización primaria (familia y ambiente) y su socialización en la escuela mientras era alumno de la escuela fundamental. Los saberes empíricos de esos profesores orientaban su práctica diaria y la formación concentrada a la cual estaban sometiéndose lo que provocaba un efecto de retomada crítica de los saberes adquiridos anteriormente, dentro o fuera de la práctica profesional. La experiencia profesional enriqueció las reuniones del grupo que pasó a reflejar sus propios saberes basados en la experiencia. Las reflexiones compartidas permitieron que los nuevos conocimientos matemáticos y de la educación matemática construidos/desarrollados, durante el curso fueron priozados por esos profesores en su práctica en la escuela. Esos conocimientos eran rediscutidos, muchas veces, en más de una reunión y los éxitos relativos compartidos con los compañeros, en un proceso continuo de construcción de nuevos saberes.

En uno de los encuentros, dos profesoras[6] describieron su práctica con relación a la resolución de problemas. El diálogo revela toda la angustia de una de ellas al reflexionar sobre su práctica y compararla al proceso de cambio de la práctica de su compañera.

> Nélia: Antes que los alumnos resuelvan los problemas, necesito leer y explicar, dar ejemplos de problemas parecidos... mis alumnos no resuelven problemas, pues tienen muchas dificultades en la lectura e interpretación y sólo resuelven los problemas si les hago la lectura y explico lo que quieren decir... aun después de darles algunos ejemplos ellos no logran entender... hoy decidí explicar uno por uno entonces dijeron: ¿eso era lo que se tenía que hacer?... y en el final les pregunté, ¿ por qué creen que se equivocaron?... muchos respondieron que se equivocaron porque no leyeron...
>
> Vera: yo no leo, dejo que ellos lo intenten resolver primero. Sabes, después de ese curso de Matemáticas estoy convencida que no trabajo las Matemáticas al contrario de lo que se debería hacer, uno enseña las operaciones, el problema sirve sólo para aplicar las operaciones, para ver si el alumno aprendió a hacer cuentas, uno no hace problematización, no da una situación para ver como ellos proceden... no se problematiza para ver como lo resuelven, la cuestión de no aprender matemáticas no está en ellos, está en la forma de enseñar...
>
> Nélia: ¿será? Quedo tan angustiada... cuando empecé a corregir los problemas que iba a usar en la monografía y ellos no aceptaban me fui poniendo angustiada. ¿qué estoy haciendo qué no aprenden?... Matemáticas es una cosa que me gusta, pero es difícil para mí …cómo será entonces para mis alumnos...

Fue en ese momento que otras experiencias desarrolladas por los profesores del grupo se hicieron relevantes y formativas. Las narrativas de otras experiencias desarrolladas y la reflexión del grupo sobre esas narraciones permitió el crecimiento individual y colectivo. Inclusive las profesoras que no hacían monografía sobre Resolución de Problemas narraron las experiencias socializando sus saberes y sus preocupaciones:

> Un niño del segundo año esquematizó la resolución del problema con palillos, otro hizo todo con cuadraditos, otro usó la técnica operatoria, noté que los niños estaban en puntos diferentes del aprendizaje, pero todos llegaron al mismo resultado. Yo separé las tres resoluciones diferentes para discutir con el grupo, no sé como debo intervenir... (Nilceia)
>
> Las discusiones en el grupo han traído por lo menos para mí muchos conocimientos nuevos en los que no había reflexionado, no había pensado en eso, principalmente en la resolución de problemas que regularmente yo trabajaba para aplicar la técnica operatoria; tuve la oportunidad de ver que se

[6] Nélia y Vera desarrollaron monografías sobre la Resolución de Problemas.
[7] Meire, Natalina y Nilcelia desarrollaron monografías com contenidos de Geometría. Sandra y Sonia investigaron el uso de juegos como estrategia de enseñanza de matemáticas.
[8] PO: Profesora Orientadora de la monografía, no era educadora matemática.

puede partir de la situación problema, problematizar, se nota que es posible intervenir la situación... ¿ustedes notan lo mismo?... (Meire).

La socialización de las preocupaciones individuales con el grupo y el contacto con experiencias de algún modo semejantes a las suyas permite disminuir la ansiedad proveniente de reflexiones individuales sobre la práctica. Sin apoyo del grupo el profesor, usualmente, abandona experiencias de enseñanza cuando se siente angustiado.

Algunas profesoras se resistieron a la realización de las actividades de Geometría. Incluso las que hacían monografías con contenidos de Geometría[7], estaban inseguras con la propuesta que les generaba conflictos íntimos. Las narrativas apuntaban a que la resistencia de las profesoras era a menudo la inseguridad en realizar un trabajo con contenidos que nunca habían aprendido, o aún de la ansiedad provocada por su papel de alumnas que tendrían evaluación de su aprovechamiento. Las resistencias fueron superadas gradualmente a lo largo de los encuentros. Una constatación posible de ser hecha es que los "bloqueos" con ese tema hicieron al grupo más colaborativo, las profesoras se ayudaban mutuamente tanto en la ampliación de los conocimientos de los contenidos que deberían desarrollar con sus alumnos como en la didáctica de esos contenidos, participaban de la organización de materiales, observaban y registraban las actividades desarrolladas por la compañera. Las narrativas de las profesoras destacaban fortalecerse, cuando necesitaban socializar sus saberes:

... creo que mi formación no era suficiente para eso y la PO[8] también a lo que me parece, no sabía orientarme. Pero quedo en conflicto, converso mucho con Nilceia y con Sonia... por que creo que así, no sabía ni por donde empezar... ,nunca habría aprendido... yo cogía las cosas del libro didáctico, y aplicaba exactamente como estaba en el libro didáctico... yo jamás haría sola una colección de objetos y pediría que los niños las agruparan. Nunca me pasó eso por la cabeza... de la manera que venía en el libro didáctico yo trabajaba... cuando yo trabajaba..., porque yo no veía la Geometría como una parte de las Matemáticas que pudiera trabajar, que ayudase en el desarrollo del raciocinio de los alumnos, para mí era todo fragmentado, todos trabajan así, la Geometría la das si quieres, si no, no... (Natalina)

...los alumnos, decían tantas cosas que no había tiempo para tomar nota, pedí ayuda a Natalina. Ahora ella observa mis clases y hace las anotaciones y después, cuando ella hace las experiencias, yo observo las clases de ella y hago los registros. Después analizamos juntas y cada una escribe... (Nilceia)

... todo eso fue fácil de hablar en aquella clase pero ahora anda a dar una clase sin la colección de objetos... En mi mente las estoy apilando de una manera y ellos de otra... (Sandra)

...yo no tenía la claridad de los objetivos de la enseñanza de Geometría... de repente descubrí que puedo trabajar con Geometría, coger una regla, medir, desarmar y armar cajas... (Meire)

... yo tengo una duda... ¿los niños del primer año logran relacionar las formas geométricas con el medio donde viven, por ejemplo con la naturaleza o con objetos diarios?... otra duda que tengo... ¿será que los niños identifican la forma planificada del cilindro con un cilindro cerrado? (Sonia)

...¿qué tal hacer ese estudio con los niños, pensar en actividades para que ellos identifiquen cuál es el sólido que se parece con una lata de aceite, o con una caja de leche?... o entonces mostrarles un cilindro y pedirles que dibujen un molde de la figura, como sería aquella figura abierta..., antes de "abrir" el cilindro, antes de planificar... después vamos a traer las actividades de los niños y analizar las repuestas, reflejar sobre eso e intentar contestar colectivamente nuestras dudas... (Vera)

A modo de conclusión

Todas las profesoras de ese grupo destacaron como puntos fuertes del curso de Matemáticas la metodología de resolución de problemas y la identificación de los conocimientos previos de los niños. En sus narrativas las profesoras apuntaron la

necesidad de una mayor profundización en los contenidos de Geometría y del tratamiento de la información para incorporarlos en sus prácticas.
En relación a la experimentación de las actividades, las narrativas sugieren que cuando las profesoras tenían los saberes matemáticos de la escuela necesarios para realizar su trabajo, incorporaban los cambios metodológicos con más facilidad y menos resistencia que cuando necesitaban profundizar o aun construir esos saberes.
Los nuevos descubrimientos con relación a asuntos matemáticos y a su tratamiento didáctico, así como la discusión sobre criterios de selección y organización de contenidos, las análisis de libros didácticos y de indicadores oficiales relativos al aprendizaje de los niños sucedían porque ese grupo de profesoras frecuentaban un curso para complementar su formación. En ese curso las profesoras reflexionaron sobre textos teóricos, profundizaron conocimientos matemáticos en "sitios" de internet o en libros (o textos) indicados como complementares y participaron de las vivencias propuestas. La participación en el grupo colaborativo dio más consistencia a la formación. Una expectativa del grupo era que continuasen reuniéndose en el año de 2003, pero a causa de condiciones de trabajo, horario y distancia esos encuentros aún no fueron posibles.
El grupo consideró lo más importante en ese proceso fue la producción y socialización de sus saberes. Saberes construidos cuando discutían sus experiencias, relataban sus inquietudes, demostraban perseverancia para continuar, presentaban sus narrativas sin preocupación con la crítica de los compañeros y registraban sus reflexiones y que se perderían si no fueran registrados.
Considero la investigación colaborativa una estrategia importante para la realización de investigaciones sobre la práctica, pues la colaboración de los compañeros aumenta la seguridad de los profesores para desarrollar sue experiencias. Es importante resaltar que la buena relación personal y profesional entre los participantes hizo posible un trabajo conjunto sin atritos?? durante un periodo de tiempo. Es necesario destacar que esa relación fue construida a lo largo de la convivencia de esos profesores en el curso y que el papel de alumno asumido por ellos permitió una mayor homogeneidad en el grupo colaborativo. No siempre eso pasa. A veces es necesario parar antenas y renegociar contratos en todos los encuentros para que haya colaboración.

Bibliografía

MEC (2002). Diretrizes Curriculares para formação de professores. Brasília: MEC..

Curi, E. (2002). *Formação de professores de Matemática: realidade presente e perspectivas futuras*. Lisboa: APM.

Pires, C. M. C. (2000). *Currículos de matemática: da organização linear à idéia de rede*. FTD. São Paulo.

Ponte, J. P. (2002). *Refletir e investigar sobre a prática profissional*. Lisboa: Artes Gráficas Ltda.

Schon, D. (2001). *Educando o profissional reflexivo*. Porto Alegre: Editora Artmed.

FUNCIONANDO CON LA COMPUTADORA

Medina P., Astiz M., Vilanova S., Oliver M., Rocerau M.,
Valdez G., Vecino M., Álvarez E., Montero Y.
U. Nacional de Mar del Plata, Argentina
pmedina@mdp.edu.ar ; mastiz@mdp.edu.ar

Resumen

En este trabajo se presenta la descripción y resultados de la segunda etapa de una experiencia planteada con el objetivo de indagar la manera en que los alumnos determinan e interpretan funciones que explican situaciones problemáticas valiéndose de una nueva forma de trabajo en el aula: la utilización de la computadora como herramienta y un programa asistente matemático. La primera etapa consistió en el desarrollo de un taller optativo con alumnos de entre 14 y 15 años de edad del Colegio Dr. Arturo Illia de la Universidad Nacional de Mar del Plata (Argentina) y sus conclusiones fueron expuestas en el trabajo "FUNCIONando con la computadora. Una experiencia con un asistente matemático" en RELME 16. A partir de las mismas, y con el objetivo final de elaborar una propuesta didáctica basada en la utilización de la computadora en los cursos de matemática, se diseñó esta segunda etapa para lo que se desarrolló un taller similar al anterior con las siguientes diferencias:

a) se seleccionó un colegio privado de la ciudad con características académicas diferentes al de la primera etapa.
b) se conformaron dos grupos, de 20 alumnos (de 14 - 15 años) cada uno. Uno de ellos trabajó con computadoras y otro sin ellas.
c) se incorporó al docente de matemática del curso en el trabajo de ambos grupos.

Una vez finalizada la experiencia observó nuevamente una diferencia en la motivación a favor del grupo que utilizó la computadora como herramienta y se reafirmaron las observaciones realizadas durante la primera etapa del trabajo:

a) la computadora es realmente una herramienta más que poderosa para facilitar la predicción de resultados ante cambios en las condiciones de datos o variables de los problemas propuestos, la búsqueda autónoma, la gestación de ideas y el descubrimiento de estructuras matemáticas sencillas en la resolución de los problemas
b) la naturalidad con la que manejaron y seleccionaron las distintas formas de representación de funciones como tabla de valores, fórmula, gráfico, descripción verbal.

Introducción y marco teórico

Las actuales concepciones de la enseñanza ponen énfasis en que el estudiante debe construir activamente su conocimiento y sus habilidades a través de la interacción con el medio ambiente y mediante la reorganización de sus estructuras mentales anteriores. El aprendizaje significativo es entendido como la incorporación sustantiva, no arbitraria ni verbalista, de nuevos conocimientos en la estructura cognitiva, mediante un esfuerzo deliberado por relacionar los nuevos conocimientos con conceptos ya existentes en la mente del alumno (Novak, 1984). Desde el punto de vista del aprendizaje de la matemática, el poder de las funciones consiste tanto en describir de manera simple situaciones complejas, como en predecir resultados y realizar los análisis cualitativos correspondientes. A la hora de trabajar con funciones, la computadora tiene tres características interesantes que un docente debe valorar al tomar la decisión de utilizarla como recurso. Por una parte, proporciona una forma cómoda de gestionar y representar la información, permitiendo que el alumno dedique su atención al sentido de los datos y al análisis de los resultados. Por otra, brinda la posibilidad de ejecutar órdenes de muy distinto tipo (dibujos, cálculo, decisiones...), con gran rapidez; por lo tanto, puede simular experiencias aleatorias que manualmente sería imposible realizar, trazar una o varias gráficas a partir de datos o fórmulas, ejecutar algoritmos de cálculo largos y tediosos o con expresiones complicadas. La tercera característica es la de interactuar con el alumno, que puede intervenir en determinados momentos proponiendo datos o tareas nuevas en función de los resultados que se van obteniendo, lo que la convierte en un poderoso instrumento de exploración e indagación. Es precisamente esta capacidad de interacción, junto con sus posibilidades de tipo audiovisual, lo que hace que su uso en el aula sea motivador en sí mismo. Por último, la nueva tendencia en el uso de la computadora en educación se caracteriza por una clara inclinación hacia sistemas que involucran herramientas puestas a disposición de los alumnos, a fin de facilitar la indagación y la adquisición de conocimiento, en ambientes de aprendizaje colaborativo e interactivo (Kaput, 1992). En este contexto, el software seleccionado (asistente matemático) puede ser integrado a la enseñanza de temas de matemática de cinco maneras diferentes: como herramienta matemática, como asistente para la resolución de problemas, como un entorno de investigación o exploración, como un tutor interactivo y como una ayuda para visualizar e interpretar (Berry et al., 1994). Es importante destacar que ya que la computadora ha simplificado el problema de graficar, se pretende que los estudiantes desarrollen una apreciación global e intuitiva del comportamiento de las funciones y sus propiedades, basado tanto en la lectura de los gráficos que las representan como de sus expresiones analíticas. De este modo podrán traducir estas últimas a gráficas y viceversa, anticipando en cada caso las características, ya sea del gráfico o de su expresión algebraica. El presente trabajo consiste en la descripción de la segunda etapa de una experiencia planteada con el objetivo de determinar si una nueva forma de trabajo en aula (caracterizada por la utilización de la computadora y un programa asistente matemático como herramienta) modifica la forma en que los estudiantes determinan e interpretan funciones que explican situaciones problemáticas.

Las conclusiones de la primera etapa de este trabajo, fueron publicadas en Actas RELME 16 bajo el título "FUNCIONando con la computadora (Medina P et al, 2002). A partir de estos datos, y con el fin de avanzar en la elaboración de una propuesta didáctica utilizando la computadora como herramienta en la enseñanza de la matemática, se diseñó esta segunda experiencia. Las diferencias con la etapa anterior consisten en: a) en trabajar con un grupo experimental y uno de control; b) incorporar un docente de matemática a ambos grupos de trabajo, y c) las características académicas del colegio en que se llevó a cabo, que pueden considerarse estandar, a diferencia del colegio anterior, preuniversitario, con ingreso selectivo y caracterizado por ser un permanente receptor de experiencias didácticas innovadoras.

Objetivos específicos de la segunda etapa de la experiencia

En este etapa también se trabajó en la resolución de problemas que involucran el uso de funciones, pero se trabajó con dos grupos de alumnos, en dos ambientes distintos de enseñanza-aprendizaje: uno de ellos utilizando computadoras como herramientas de trabajo y el otro no. Los objetivos se centraron en:

- Comparar en ambos grupos
  - la participación en el trabajo en aula
  - la tendencia hacia el aprendizaje colaborativo
  - el interés por el tema desarrollado
  - el tipo de consultas realizadas
  - la manera con la que manejaron y seleccionaron las distintas formas de representación de funciones como tabla de valores, fórmula, gráfico, descripción verbal,
- Determinar si la computadora resultó ser para ellos una herramienta poderosa para facilitar la predicción de resultados ante cambios en las condiciones de datos o variables de los problemas propuestos, la búsqueda autónoma, la gestación de ideas y el descubrimiento de estructuras matemáticas sencillas en la resolución de los problemas
- Comparar los resultados obtenidos en la primera y la segunda etapa en función de la diferencia entre las instituciones seleccionadas.

Metodología de trabajo

1) Entorno de trabajo y participantes

La experiencia se llevó a cabo en el Colegio Provincias Unidas del Sur (PUdS), un colegio de enseñanza privada de la ciudad de Mar del Plata, con una división por cada curso y un nivel académico normal medio. Para realizar el trabajo las autoridades del Colegio PUdS permitieron realizar el taller con todos los estudiantes del curso de 9º año de la EGB (14-15 años), dividiendo al mismo en dos grupos, uno que trabajaría con la computadora y otro sin ella. Los grupos trabajaron en dos ambientes distintos de enseñanza-aprendizaje, en ambos con la modalidad aula-taller. La diferencia entre ellos estuvo dada por el trabajo en laboratorio de computación para acceder al uso de la computadora como herramienta de trabajo en uno de ellos (curso experimental) y sin dicha herramienta, en aula convencional en el otro ambiente (curso control). En el entorno de trabajo del curso experimental intervinieron el docente del taller, el docente de matemática, el material de trabajo y las computadoras con un asistente matemático (software) sencillo de utilizar y con muy buenas posibilidades gráficas y algebraicas. Se dispuso de una computadora por cada dos estudiantes. Por su parte el grupo control contó con el mismo entorno pero sin las computadoras. Durante el desarrollo del taller se trató de buscar un balance entre la instrucción receptiva y el aprendizaje por descubrimiento. Estos estudiantes habían trabajado algunos conceptos relacionados con el tema como definición de función, dominio, codominio, expresión funcional. En el momento de pasar a la interpretación gráfica y la resolución de problemas que involucran el uso de funciones, comenzaron a trabajar en el taller.

2) Modalidad

Los temas seleccionados fueron los mismos que los presentados en la primera etapa de la experiencia y por tal motivo las actividades se centraron en:

- Traducir datos y variables de problemas en expresiones funcionales y hallar sus gráficas;
- Interpretar el concepto de dominio de definición y de imagen a partir de una situación problemática concreta;
- Generar modelos a partir de situaciones problemáticas;
- Reconocer que con el mismo tipo de función se pueden elaborar modelos para una gran variedad de problemas;
- Predecir resultados de problemas que se explican a través de funciones cuando se varían las condiciones de las variables involucradas;

El taller se dividió, al igual que el primero, en 12 encuentros de 2 horas cada uno.
Al comienzo del taller, al grupo experimental se lo instruyó en el uso del asistente matemático, en aspectos tales como escribir una función, realizar un gráfico y determinar intersecciones tanto en forma algebraica como a través de observaciones. Más adelante les fueron dados otros elementos para trabajar con funciones por tramos, como así también para resolver ecuaciones en forma algebraica (tema indispensable para la determinación de intersección de funciones).

En lo que respecta al tema específico de matemática, en los dos grupos se trabajó presentándoles a los estudiantes los problemas que debían resolver para lograr los objetivos del taller. Los problemas propuestos involucraron funciones lineales (relacionadas con costo de servicios, trayectorias), cuadráticas (relacionadas con superficies, trayectorias), cúbicas (relacionadas con volúmenes).

En todos los casos el avance en los temas se realizó en función al progreso de los estudiantes dentro de cada grupo. Durante el proceso de resolución de los problemas la dinámica de trabajo fue la de generar un ámbito de discusión grupal ante las dificultades o inquietudes que surgieran.
La evaluación fue continua y se tuvieron en cuenta no sólo los avances en el trabajo individual, sino también el nivel de participación y colaboración de cada estudiante.

Instrumentos de observación
Los instrumentos para determinar el nivel de participación y colaboración en el trabajo en el aula se basaron en las técnicas de la observación participante. Parte de estas observaciones, que pueden considerarse como estructuradas, se recogieron en una tabla de especificaciones que registraba la colaboración en el trabajo con sus compañeros, el interés demostrado en el tema, el tipo de consultas realizadas, la participación en el desarrollo de los trabajos prácticos y el compromiso de trabajo. Para completar las observaciones, se tomaron notas muy breves de carácter general durante las clases, las cuales eran ampliadas no bien finalizaban las mismas.

Resultados
A partir de las observaciones realizadas, se pudo advertir una mayor tendencia hacia el aprendizaje colaborativo en el grupo experimental que demostró mayor interés por el estudio del tema. La utilización de la computadora como herramienta les permitió, por un lado, incursionar en el software e ir así encontrando nuevos recursos para la

resolución de los problemas y por otro, generar nuevos problemas e investigar alternativas de resolución desde la matemática.

Esto se evidenció en el tipo de consultas realizadas por el grupo experimental, las que se diferenciaron notablemente de las realizadas por el grupo control. El grupo experimental rápidamente avanzaba más allá de las exigencias del problema, realizando cambios en variables y condiciones del mismo para evaluar diferentes alternativas generando una constante búsqueda de nuevos conceptos, mientras que el grupo control basó su trabajo específicamente en el problema dado, dependiendo permanentemente de los docentes para abordar temas relacionados con la representación de funciones.

Los indicadores: tendencia hacia el aprendizaje colaborativo, participación durante el proceso de aprendizaje e interés por el estudio del tema fueron comparados entre los dos grupos, dando resultados favorables para el grupo experimental en un *nivel de significación de 0.05*. Los valores de ***p*** obtenidos para cada indicador fueron respectivamente *0.025, 0.010, 0.012*.

Consideraciones finales

Durante el transcurso del taller, a partir de las herramientas y conceptos previos de que disponían los estudiantes, se logró en ambos grupos que predigan resultados ante cambios en las condiciones de datos o variables de los problemas propuestos. No obstante, a través del registro de las clases se pudo observar una diferencia en la motivación a favor del grupo que utilizó la computadora como herramienta y se reafirmaron las observaciones realizadas durante la primera etapa del trabajo:

a) el grupo que utilizó la computadora trabajó con mayor naturalidad el manejo y selección de las distintas formas de representación de funciones como tabla de valores, fórmula, gráfico, descripción verbal.
b) en el grupo experimental se evidenció una mayor tendencia al aprendizaje colaborativo
c) el grupo experimental demostró interés en realizar modificaciones en los parámetros de las funciones logrando variantes de los problemas originales, que los llevaron en algunas oportunidades a profundizar sobre algún tema (dominio de definición de una función) o a tratar temas que no conocían (funciones de dos variables), ya que la utilización de la computadora como herramienta les permitió, entre otras cosas, incursionar en distintas posibilidades gráficas y algebraicas.

En suma, la computadora se mostró como una herramienta más que poderosa para facilitar la predicción de resultados ante cambios en las condiciones de datos o variables de los problemas propuestos, la búsqueda autónoma, la gestación de ideas y el descubrimiento de estructuras matemáticas sencillas en la resolución de los problemas. Otros estudios realizados por nuestro Grupo de Investigación, basados en encuestas a docentes, nos han mostrado que no contar con material didáctico de referencia, es una de las razones por la que los docentes de matemática no utilizan la computadora en sus clases. Estas observaciones junto a los resultados descriptos en el presente trabajo conforman la justificación para abordar la última etapa de la experiencia. La misma consiste en la elaboración de una propuesta didáctica para llevar adelante en cursos de matemática utilizando la computadora y un asistente matemático con potencia de graficación y cálculos algebraicos como herramienta en el ambiente de trabajo. Una vez elaborado, puesto en práctica y evaluado el material, quedará por observar si disponer del mismo genera un cambio de actitud por parte de los docentes con respecto a la utilización de la computadora en sus clases.

Bibliografía

Ausubel, D.P. (1997). *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo.* México: Ed. Trillas.

Berry, J., Graham, T. y Watkins, T (1994). Integrating the DERIVE program into the teaching of mathematic. En *The International DERIVE Journa*",1(1), 83-96.

Contenidos básicos para la Educación General Básica (1996). Argentina: MCyE.

De Corte, E. (1996). Aprendizaje Apoyado en el Computador: una Perspectiva a Partir de la Investigación acerca del Aprendizaje y la Instrucción. *Memorias del III Congreso Iberoamericano de Informática Educativa,* 8-11.

Duval R. (1995) *Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissage intellectuels.* Suiza: Peter Lang.

Guzmán, M. de, Gil Pérez, D. (1993). *Enseñanza de las Ciencias y la Matemática. Tendencias e innovaciones.* OEI. Ed. Popular

Guzmán, M. de, Colera, J., Salvador, A. (1987). *Matemáticas Bachillerato 1.* Madrid: Grupo Anaya.

Kaput, J.J. (1992). Technology and Mathematics Education. En *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, 515-556. N. Y. Ed. Macmillan.

Kutzler, B., Kokol-Voljc, V. (2000) Introducción a DERIVE 5.(Llorentes Fuster, Trad). Valencia: DERISOFT

Medina P., Astiz M., Vilanova S., Oliver M., Rocerau M., Valdez G., Vecino M., Alvarez E., Montero Y. (2003) Funcionando con la computadora. Una experiencia con un asistente matemático. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 16(1), 334-345 .

Novak, J.D. y Gowin, D.B. (1984). *Learning how to Learn*. N.Y.: Ed. University Press.

Paulogorrán, C. y Pérez C. (1994). *Cálculo Matemático con Derive para PC*. Madrid: Ed. Ra-Ma.

GENERACIÓN DE MODELOS DE ENSEÑANZA–APRENDIZAJE EN ÁLGEBRA LINEAL

Eduardo Miranda Montoya
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Occidente (ITESO): México
emiranda@iteso.mx

Resumen

Dos de las dificultades más importantes y frecuentes que encontramos en el aprendizaje del álgebra lineal, tenemos la conceptualización y la formalización. Los contenidos de la materia son, en gran medida, formulados a partir de la definición de vectores, espacios vectoriales, bases, transformaciones lineales, etc. En los primeros capítulos de un curso de álgebra lineal, es frecuente acudir a la visualización geométrica en R^2 y R^3 como ayuda pedagógica para ilustrar las representaciones vectoriales y sus operaciones. Pero esto no siempre es así, la noción "visual" de otros conceptos, su enseñanza parte solamente de la definición formal la cual frecuentemente carece de alguna "justificación plausible" del porqué es así. Ejemplos de ellos son las definiciones de espacios vectoriales o de espacios con producto interno. Algunas investigaciones en torno a las dificultades en el aprendizaje del álgebra lineal comienzan con la descripción de tres tipos de lenguaje (geométrico, aritmético y algebraico) que se maneja en el álgebra lineal. En estas investigaciones, las dificultades en el aprendizaje tienen entre otros orígenes, la falta de articulación entre estos lenguajes.

Introducción. Problemas asociados con la enseñanza del Álgebra Lineal

Entre las dificultades más importantes y frecuentes (más no las únicas) que encontramos en el aprendizaje del álgebra lineal, son la conceptualización y la formalización, puesto que los contenidos de la materia son, en gran medida, formulados a partir de la conceptualización de entes tales como vectores, espacios vectoriales, bases, transformaciones lineales. Uno de los conceptos importantes de un curso de álgebra lineal, en Ingeniería, es la noción de un vector junto con la de espacio vectorial. Tanto en la práctica cotidiana de un profesor como en los libros de texto, con frecuencia se motiva la enseñanza de estos conceptos a partir de ilustraciones geométricas en R^2 y de R^3 de las representaciones vectoriales y sus operaciones. Pero esta manera de ilustrar un concepto no siempre es posible, por ejemplo en el caso de los espacios vectoriales, la representación geométrica no es muy plausible (Sierpinska, 1996), en estos casos la noción "visual" de ese concepto está ausente, ya que su enseñanza parte solamente de la definición formal. Esta falta de conceptualización en el álgebra lineal puede ser motivo de que un estudiante tenga dificultades para "traducir correctamente" los enunciados, es frecuente observar que muchos estudiantes no logran entender qué es lo que se pide en un problema de álgebra lineal (Sierpinska, 1996). Un ejemplo de esto es lo siguiente:

En el semestre Ene–May de 2002, a un grupo de 23 alumnos de Ingeniería del ITESO, se le pide lo siguiente -después de que se les enseñó lo que es un vector en R^2 o en R^3, las operaciones de suma, resta y multiplicación por escalar- *¿Es posible encontrar los valores de x & w de manera que se cumpla la igualdad* $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{w}$*, donde* $\mathbf{u} = (-2, x)$, $\mathbf{v} = (w, 3)$ *y* $\mathbf{w} = (-1, 4)$*?*

Después de la lectura del problema (en unos 4 minutos) solo dos estudiantes escriben la solución correcta del problema en su cuaderno y los demás comentan que no saben qué es lo que se quiere encontrar. Al cabo de unos minutos, se les da la sugerencia de

sustituir **u, v y w** como (-2, x) + (w, 3) = (-1, 4), para después sumar y obtener (-2 + w, x + 3) = (-1,4)
Uno de los alumnos pregunta en voz alta: "*¿Hay que igualar las componentes de cada vector?*"
Otros preguntan: "*¿Cuáles componentes*?"

Lenguajes y representaciones en el álgebra lineal

Entre las dificultades que un estudiante enfrenta para aprender conceptos del álgebra lineal están la variedad de lenguajes y representaciones semióticas con los que se estudian sus objetos. Hillel (1994) distingue tres tipos básicos de lenguajes usados en el álgebra lineal que son: *lenguaje abstracto* (correspondiente a la teoría general abstracta del álgebra lineal, *el lenguaje algebraico* de R^n y el *lenguaje geométrico* de R^2 y R^3. Para Sierpinska (1996) en el álgebra lineal hay tres tipos de lenguaje: *Lenguaje geométrico*: el que se usa para ilustrar las representaciones y propiedades de los vectores en R^2 y R^3; *Lenguaje aritmético*: usado para describir las operaciones entre matrices, soluciones de ecuaciones, etc. y *Lenguaje algebraico*: usado para formalizar y simbolizar entes como espacios vectoriales y transformaciones lineales. La autora reporta que algunas de las dificultades en el aprendizaje de los conceptos del álgebra lineal tienen que ver con la falta de una práctica instruccional que articule estos lenguajes. La desarticulación puede deberse a los contenidos propician la coexistencia de esos lenguajes como modos de pensamiento que algunas veces son intercambiables pero que nos son equivalentes.

Esto es, a modo de ejemplo, la visualización geométrica puede ayudar a un estudiante a interpretar un problema usando el lenguaje geométrico, sin que eso implique que pueda pasar del lenguaje geométrico al lenguaje algebraico para resolver completamente un problema. Un ejemplo de esos, lo encontramos en la solución del siguiente problema (aplicado en un examen del mismo grupo referido anteriormente):

"Determine si el conjunto $M = \{(x,y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ es o no subespacio vectorial de R^2 Haga un dibujo del conjunto M que le ayude a obtener la respuesta"

En las respuestas del grupo se encontró que 17 de los 23 estudiantes si graficaron el círculo correspondiente. Y de esos 17 alumnos, 11 escribieron respuestas similares a la siguiente:

"*Como el origen (0,0) está dentro del círculo, entonces M si es subespacio vectorial*"

Cuatro, de ellos, se aprendieron de memoria las propiedades que debe satisfacer un subespacio vectorial y escribieron algo similar a lo siguiente: " *si U = (x,y) y V = (z, w) entonces U + V = (x+z, y+w); y si k es un escalar kU = (kx, ky), por lo tanto si es un subespacio vectorial*"

Uno de los estudiantes restantes escribió: "*Si $U = x^2 + y^2 \leq 1$ y $V = x^2 + y^2 \leq 1$ entonces $U + V = 2x^2 + 2y^2$, entonces M si es subespacio vectorial*"

Y el último escribió: "*Si U = (1,0) y V = (0,1) entonces U + V = (1,1) y $1^2 + 1^2$ no es ≤ 1 por tanto U + V no pertenece a M, entonces M no es subespacio vectorial*"

Como se puede apreciar, en todas las respuestas, excepto, quizá la última (ya que puede suceder que esta persona tuviera la gráfica en su mente y de ahí dedujera su respuesta), que el lenguaje geométrico y el algebraico están desarticulados en la mente de los entrevistados.

La propuesta didáctica

En la actualidad, algunas de las propuestas didácticas en la enseñanza del álgebra lineal sugieren la implementación de experiencias o prácticas pedagógicas en las que el aprendizaje se da en forma dialéctica empezando por las experiencias geométricas para después seguir con el lenguaje aritmético y llegar al lenguaje algebraico, todo esto en forma articulada. Podemos ver este tipo de acercamientos didácticos en los trabajos de Rogalski (1996), quien centra su estudio en la articulación de las representaciones cartesianas y las representaciones paramétricas de subespacios vectoriales o también, Sierpinska (1999), en cuyo trabajo se explora al enseñanza del álgebra lineal mediante el diseño de situaciones de enseñanza en un ambiente de geometría dinámica usado Cabri con la finalidad de representar vectores en R^2 y sus transformaciones

En este trabajo, se propone obtener algunos modelos de enseñanza - aprendizaje del álgebra lineal siguiendo las tres fases siguientes: (a) La adquisición de conceptos por medio de modelos geométricos de espacios y subespacios vectoriales: (b) La redefinición de esos modelos vistos en R, R^2 y R^3 al espacio R^n y (c) La generalización a espacios vectoriales más abstractos. Para llevar a cabo las tres fases, requerimos primero de hacer un análisis de cada uno de los temas en cuanto al diseño de experiencias de enseñanza – aprendizaje. En cada una de estas etapas, usamos partes de la metodología propuesta por el Dr. Ed Dubinsky (Asiala et al**:** 1996) para obtener una descomposición genética de algún tema matemático a enseñar.

Exploración de algunos conceptos del Álgebra Lineal (Transformaciones lineales)

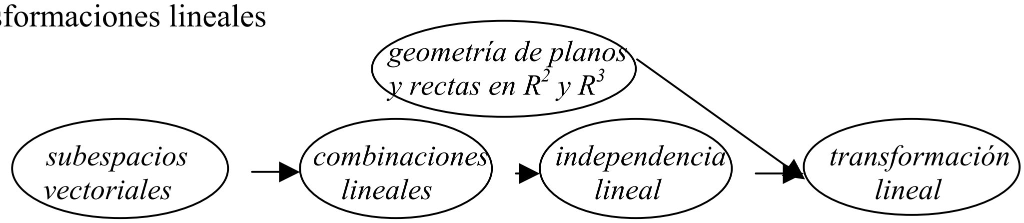
Un ejemplo donde aparecen imbricados los tres lenguajes del álgebra lineal, descritos al principio de este trabajo, son las transformaciones lineales. Para este concepto se han estado reuniendo datos empíricos, desde el semestre Ene– May de 2002, para determinar un modelo de enseñanza que nos lleve a un diseño de instrucción adecuado en el curso de Álgebra lineal para Ingenieria del ITESO.

Se ha elegido de inicio este concepto debido a que posee una gran riqueza de contenidos, en los que se pueden articular los lenguajes geométrico, algebraico y aritmético. En ese semestre se realizó una entrevista a cada uno de cinco estudiantes elegidos al azar de un grupo donde normalmente había personas de varias carreras. Esto se hizo después de que en su grupo habían visto la definición de transformación lineal así como algunos argumentos geométricos que muestran la acciones de las transformaciones lineales sobre figuras geométricas.

La clase sobre transformaciones lineales se diseño mediante un análisis preliminar del concepto determinado por las creencias del profesor (y de los textos) acerca de las conceptos matemáticos que un estudiante debe dominar previamente de modo que pueda llegar a entender el concepto de transformaciones lineales revela un esquema de enseñanza siguiendo el siguiente camino

subespacios vectoriales → *combinaciones lineales* → *independencia lineal* → *transformación lineal*

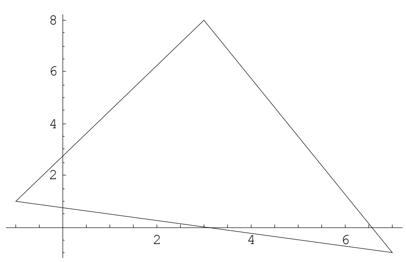
A este camino se le añadió el tema de geometría de rectas y planos en R^2 y R^3, como un concepto que el estudiante debe recuperar para visualizar las acciones de las transformaciones lineales

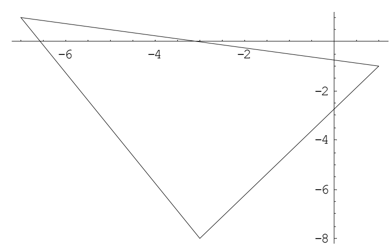


Para ilustrar y manipular el poder geométrico de las transformaciones lineales se presentó el siguiente extracto de una práctica computacional, diseñado con la finalidad de que un estudiante manipule y ejercite acciones sobre fórmulas de transformaciones lineales sencillas

Consideremos un triángulo con vértices en los puntos (1,1), (7,-1), (3,8). Al tiempo supongamos transformaciones definidas por T: R^2 -> R^2: T(x,y)= (2x,3y);T(x,y)= (-x,-y) y T(x,y)= (-y,-x) ¿Cuál es el efecto de estas transformaciones sobre el triángulo anterior?

Este problema se debería contestar primero con cálculos manuales para después "enseñarle a la computadora" cómo debería hacer los cálculos. Este planteamiento, se respondió con la ejecución del un código correspondiente en Mathematica.





La visualización de estas figuras condujo a respuestas por parte de los estudiantes referentes al efecto de las transformaciones dadas como las siguientes: "*el triángulo giró en forma simétrica sobre el eje de las x*"
O bien: "*la figura giró* 270^0"
Del mismo modo, la visualización indujo respuestas para las otras transformaciones como: "*la transformación T(x,y) = (2x, 3y) hace crecer los lados horizontales el doble y el triple para los lados verticales*"
Algunos estudiantes intuyeron que si la transformación tuviera coeficientes como ½ o 1/3 entonces los lados se reducirían a la mitad o a la tercera parte.
Por lo que toca a la parte aritmético – analítica del concepto, se formularon los problemas:

1. *Dada la transformación* $T:R^2 \rightarrow R^2$ *definida como T(x-y, x+y) calcula: T(1,2), T(-1,2), T(3,2) , T(-2,2)*
2. *Demuestra que la transformación anterior es lineal*

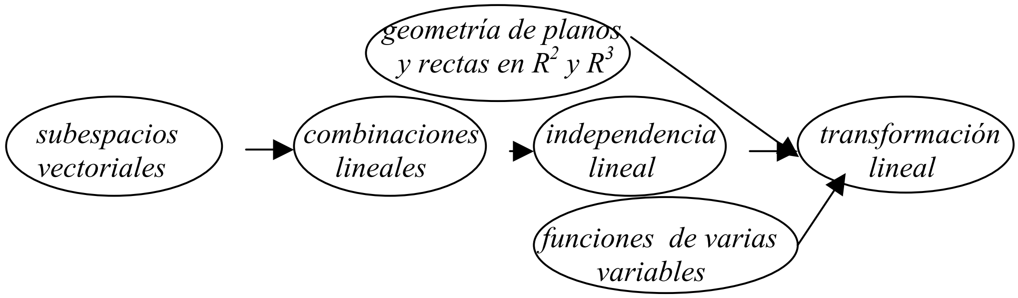
Los resultados entregados, denotan un cierto dominio de la sustitución de valores numéricos en una transformación, lo cual se refleja también en la escritura del código

de Mathematica mostrado a los estudiantes. Pero se encontró que esto no fue suficiente para llegar a formalizar una prueba de la linealidad de una transformación.
En sus escritos había respuestas como las siguientes:
a) *T(u+ v) = u-v + u + v = 2u*
b) *T(u + v) = (u-v,u+v)*
c) *T(cu) = cu-cu = 0*
d) *T(cu) = (cu-v, cu + v)*
Y en cuatro (de los cinco entrevistados) se concluían cosas, como las siguientes:
a) *Como T(x,y) = (x-y, x+y), T transforma rectas en rectas, por lo que T si es transformación lineal*
b) *Si aplicáramos la transformación a una recta se transformaría en otra recta, por lo que si es transformación lineal.*
Lo anterior refleja, otra vez, la desconexión entre la parte geométrica y la parte analítica del concepto. En la entrevista, se determinó que uno de los problemas asociados a la demostración reside en que en realidad se debe considerar a un vector y a la expresión de T como funciones de varias variables
El problema es que el estudiante sabe que para demostrar la relación T(u + v) = T(u) + T(v) tiene que sustituir variables en la expresión dada para T, pero lo hace como si fuera una sola variable, lo cual vemos en el siguiente extracto: (E es el entrevistador y A es el alumno)

> E: *A ver, si la transformación es T(x, y) = (x-y, x+y) ¿cómo es que determinas que T(u+ v) = u-v + u + v = 2u?*
> A: *Bueno tengo que demostrar que T(u+v) = T(u) + T(v), entonces sustituyo u y v en vez de x & y como si fuera una función y me queda T(u+ v) = u-v + u + v = 2u*
> E: *Pero ¿eso es T(u) + T(v)?*
> A: *Si porque T(u) = u – y + u + y = u y también T(v) = v –y + v + y = v*
> E: *Pero entonces te resultaría que T(u) + T(v) = u + v y antes dijiste que T(u+v) = 2u*
> A: *Si...pero... si es transformación lineal pues en las gráficas se ve que se transforman rectas en rectas*
> E: *Si lo visualizas así pues si es cierto, pero hay que demostrarlo analíticamente*
> A: *¿Qué no es como lo hice?*
> E: *No*
> A: *Entonces no entiendo, porque hay que sustituir en la fórmula de T a u y v y....*
> E: *A ver hazlo*
> A: *T(u + v) = (u-v.......no se... me sale lo mismo*

Otro de los estudiantes entrevistados hizo respuestas similares, y los otros tres no respondieron al problema, pues mencionaron que no tenían idea de cómo hacerlo.
Lo anterior nos hace ver que a pesar de que las personas entrevistadas pueden hacer sustituciones numéricas en la expresión algebraica de T, pero estas personas no han podido hacerse a la idea de que los vectores u y v deben ser vistos como funciones de dos variables que deben ser sustituidos en la expresión de T y manejar esta como una función de varias variables.

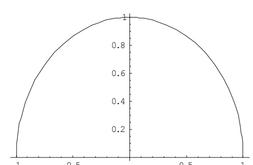
Estos datos nos sugieren modificar el modelo de enseñanza adoptado inicialmente para añadirle un concepto matemático más (necesario para aprender transformaciones lineales), la de función de varias variables. En donde se debería ver a estas funciones al menos al nivel de descripción de éstas y la sustitución de variables, para evaluar puntos o para "mirar" cómo se transforma una figura bajo una función de varias variables.



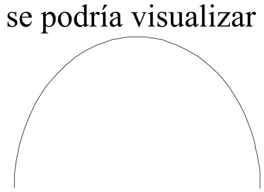
En el semestre Ago–Dic de 2002 se implementaron estas mismas prácticas computacionales y con lo sugerido por los resultados anteriores, se añadió (en forma experimental) a la clase de transformaciones lineales, un apartado para describir funciones de varias variables y algunas formas de graficar puntos o regiones solo en forma operativa

Del mismo modo se buscó introducir el concepto de transformación desde las funciones de una variable, donde se puede considerar que un segmento de recta (que será el dominio de la función) es transformado, por la acción de la función en otros objeto geométrico.

Así, por ejemplo: la función f: [-1,1] →[0, 1] dada por $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ tiene como gráfica a:



Esta misma función podemos considerarla como la transformación del segmento [-1, 1] en el arco de circunferencia referido, lo cual se podría visualizar como:

-1 ______________1 → 

Desde este punto de partida, se esperaba que ya no fuera extraño, para un estudiante, presentar objetos en dos o tres dimensiones y mirar como se transforman bajo una función de varias variables en dos planos o espacios tridimensionales.

Cuando, en el transcurso del semestre, se llegó al tema de trasformaciones lineales, se aplicaron las mismas prácticas computacionales, comentadas más los puntos adicionados al programa de estudio.

En esta ocasión, se eligieron al azar 10 exámenes, sin importar la calificación obtenida. De estos exámenes, uno de los problemas a evaluar es precisamente la verificación de las propiedades de una transformación dada. La transformación del examen se definió como sigue:

Demuestra que T: $R^3 \rightarrow R^3$, definida como T(x,y,z) = (3x+2y + 4z, 2x + 2z, 9x + 2y + 3z) es una transformación lineal

De los 10 exámenes elegidos, 7 obtuvieron resultados correctos, 3 ni siquiera hicieron anotación alguna. Se entrevistó solamente a los estudiantes que no respondieron ese problema, pero el denominador común es que no habían asistido a clases, ni habían hecho las tareas, por lo que su respuesta común es que no tenían ni idea de cómo hacer la demostración. Con los otros estudiantes no hubo oportunidad de hablar con ellos, debido a problemas de tiempo. De cualquier manera, los resultados obtenidos dan pie a sugerir una implementación de esta práctica educativa a más grupos, esperando obtener resultados similares con la mayoría de estudiantes. Pudiera ser que en el modelo de enseñanza hubiera variaciones de acuerdo a cada grupo en particular, pero lo que importaría a largo plazo es obtener un modelo cuyas componentes permanezcan invariantes a lo largo del tiempo, de modo que el modelo de enseñanza de las transformaciones lineales llegue a estabilizarse y ser la guía general par a el diseño de prácticas educativas.

A modo de conclusión

Habrá, desde luego, más experimentaciones, pero sobre todo la búsqueda de más modelos de enseñanza. En especial, el próximo a estudiar será uno correspondiente al tema de subespacios vectoriales, donde las demostraciones, al parecer también tienen que ver con el conflicto del manejo de funciones de varias variables.

Bibliografía

Asiala M, Devries, Brown A, Dubinsky E, Mathews D, Thomas K. (1996) A framework for research and development in undergraduate mathematics education, *Research in Collegiate Mathematics Education II*, pág. 1-32

Hillel J, Sierpinska A. (1994) On One Persistent Mistake in Linear Algebra, in The Proceedings PME 18, Universidad de Lisboa, Portugal, pág: 65–72.

Rogalski M. (1996) Teaching Linear Algebra: Role and Nature of Knowledge in Logic and Set Theory which Deal with Some Linear Problems, *Proceedings PME 20*, Universidad de Valencia España, Vol. 4, 211–218.

Sierpinska A, Trgalova J., Hillel J., Dreyfus T., (1999) Teaching and Learning Linear Algebra with Cabri. Research Forum paper, *Proceedings del PME 23*, Haifa University, Israel, Vol 1, 119–134.

Sierpinska A. (1996) Problems related to the design of the teaching and learning process in linear álgebra, *Research Conference in Collegiate Mathematics Education*, Central Michigan University.

INTRODUCCIÓN AL INFINITO

Patricia Lestón, Daniela Veiga
Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González". Buenos Aires, Argentina
patricialeston@uolsinectis.com.ar , veigadaniela@yahoo.com.ar

Resumen

Uno de los problemas más frecuentes que el docente de escuela media debe enfrentar durante la introducción al análisis matemático, y en particular al concepto de límite, es la dificultad que los alumnos presentan en la comprensión y manejo del infinito. Frente a esta problemática, las autoras llevaron a cabo una investigación a lo largo del año 2002, en dos escuelas privadas, una de la Provincia de Buenos Aires y otra de la Ciudad de Buenos Aires (Argentina). La metodología de trabajo se apoyó, principalmente, en el análisis de algunos problemas clásicos y lecturas complementarias para abordar la enseñanza de este tema, sin necesidad de sacrificar otros no menos importantes. De esta manera, se pretende lograr el buen manejo de un concepto tan complejo como el que éste representa. En el trabajo se presentan algunos de los problemas y lecturas trabajadas, con el análisis de las dificultades que surgieron de las mismas. Por ejemplo, una de las principales dificultades radica en la contradicción que se genera al intentar trasladar las propiedades de los conjuntos finitos a los infinitos. La aritmética de los números transfinitos aparece ante los alumnos como una contradicción al sentido común. No es de esperar que un alumno acepte que la "cantidad" de números pares es la misma que la de números naturales. Sin embargo, existen algunos ejemplos (que sin el rigor de una demostración) ponen en evidencia esta proposición. Lo que se quiere destacar con esta experiencia son los beneficios de un aprendizaje gradual y significativo del concepto de infinito como expresión puramente matemática, a través de problemas y lecturas sencillas.

Introducción

> *"¿Qué es el infinito? ¿El número de granos de arena de una playa, o el de estrellas que vemos en el cielo? Felizmente, ni el uno ni el otro. Aun la cantidad de átomos en el universo es tan poco infinita que da lástima. En realidad, semejante cifra no está más cerca del infinito que otras más modestas como 2, 15 ó 3089. ¿Y entonces? Para encontrarnos con conjuntos que ningún número pueda contar, debemos recurrir al mundo de las matemáticas. Pero no necesitamos adentrarnos demasiado en él: los números naturales (1, 2, 3, 4, 5...) o los puntos de una recta, son infinitos, terriblemente infinitos. Y cuando uno se encuentra con conjuntos infinitos, enseguida encuentra que funcionan de manera peculiar, para decirlo suavemente." (Moledo, 1994).*

Uno de los problemas más frecuentes que el docente de escuela media debe enfrentar durante la introducción al análisis matemático, y en particular al concepto de límite, es la dificultad que los alumnos presentan en la comprensión y manejo del infinito. Probablemente, dicha dificultad surja de la ausencia de una unidad temática dentro del currículo que permita el estudio del infinito como tema específico.
Frente a esta problemática, las autoras proponen el trabajo de algunos problemas clásicos y lecturas complementarias para abordar la enseñanza de este tema, sin necesidad de sacrificar otros temas no menos importantes. De esta manera, se pretende lograr el buen manejo de un concepto tan complejo como el que éste representa.

Las características de la propuesta permiten que el trabajo pueda realizarse de manera continua a lo largo de todo el curso, facilitando la adquisición y familiarización progresiva con el concepto; mejorando de esta manera los resultados en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Marco teórico

Para comprender en profundidad por qué determinados conceptos matemáticos presentan obstáculos en su adquisición, es necesario remontarse a su origen histórico y la actitud que tuvo la humanidad frente a ellos.

El infinito en particular ha sido uno de los temas que más conmovió a los matemáticos de todos los tiempos. Gauss (1831), uno de los grandes matemáticos de toda la historia, se expresó al respecto: *"Protesto contra el uso de la magnitud infinita como una cosa completa, que jamás puede permitirse en Matemática. Infinito es simplemente una forma de hablar y la verdadera significación es un límite al que ciertas razones se aproximan indefinidamente, mientras otras aumentan sin restricción"*. A partir de esto, surge la necesidad de tratar con más rigor al infinito. Y se desarrolla entre los años 1871-84 la teoría de conjuntos de Cantor que permite darle al fin una base teórica al concepto de infinito. Opina respecto a este tema A. W. Moore (1995): *"Al igual que casi todo el mundo, durante más de dos milenios los matemáticos no han sabido a ciencia cierta que pensar del infinito. Varias paradojas ideadas por los pensadores griegos y medievales les habían convencido de que acerca del infinito no se podía reflexionar impunemente. Así estaban las cosas en los años '70 del siglo pasado cuando Georg Cantor develó la matemática transfinita, rama de las matemáticas que aparentemente resolvía todas las paradojas que planteaba el infinito. Cantor, en su obra, demostraba que existían números infinitos, que los había de distinto tamaño y que podían utilizarse para medir la extensión de conjuntos infinitos"*.

A pesar de haberse comprendido parte del misterio, es sabido que en los alumnos existe el conflicto de la confusión entre el símbolo que representa al infinito con un número "muy grande". Frente a esto, Courant y Robbins (1964) opinan: *"...el paso del adjetivo 'infinito' que significa simplemente 'sin fin', al sustantivo 'infinito' no debe hacernos pensar que 'infinito', representado generalmente con el símbolo ∞, puede considerarse como si fuera un número ordinario. No es posible incluir el símbolo ∞ en el sistema de los números reales y conservar al mismo tiempo las leyes fundamentales de la aritmética"*. En primera instancia, la aritmética de los números transfinitos aparece ante los alumnos como una contradicción al sentido común. No es de esperar que un alumno acepte que la "cantidad" de números pares es la misma que la de números naturales. Sin embargo, existen algunos ejemplos (que sin el rigor de una demostración) ponen en evidencia esta proposición. Hans Hahn dice: *"Si miramos a nuestro alrededor para ejemplos de conjuntos infinitos numerables llegamos inmediatamente a unos resultados altamente sorprendentes. El conjunto de todos los números naturales es por sí mismo infinito numerable, esto es evidente, puesto que era de este conjunto que definíamos el concepto de 'infinito numerable'. Pero el conjunto de todos los números pares es también infinito numerable y tiene el mismo número cardinal $\aleph_0$, como el conjunto de todos los números naturales, aunque naturalmente hay muchos menos números pares que números naturales"* (Newman, 1997).

Para concluir, no se puede negar que el infinito encierra muchas dudas aún sin develar y no debe sorprendernos la dificultad que este tema representa para los alumnos de escuela media y el hombre en general. Ya en 1921, David Hilbert sentenció: *"El infinito! Ningún otro problema ha conmovido tan profundamente el espíritu del hombre"*.

Perfil del alumno

Los cursos en los que se trabajó este tema eran cursos correspondientes al último año de la escuela media (17-18 años), de carga horario de 3 horas cada uno. El nivel de conocimiento era muy bueno para lo que es un curso de esas características en la escuela secundaria. En general, los alumnos manejaban las herramientas algorítmicas que necesitaban para resolver los problemas que se les presentaban, pero no había comprensión real de muchas de las cosas que hacían, sin embargo se trataba de alumnos participativos y con mucho interés en la materia.. Con respecto al concepto de infinito, la idea era totalmente intuitiva y les sorprendía que pudiera existir algo más dentro de este concepto, como distintas clases de infinitos y propiedades desconocidas para su manejo.

Actividades Propuestas

A continuación se presentan algunos de los problemas que se trabajaron y que permitieron aproximar a los alumnos al concepto de infinito. Al mismo tiempo, adquirir las herramientas necesarias para el eventual trabajo de límite.

Problema 1(Versión tomada de Corbalán, 1998):

Se propone utilizar el famoso problema del Hotel de Hilbert para mostrar la diferencia entre los conjuntos finitos e infinitos. En los conjuntos finitos el todo es siempre mayor que las partes. En los conjuntos infinitos, en cambio, el todo no es mayor que alguna de sus partes.

Lee y analiza el siguiente texto:

a- Imaginemos un hotel con un número finito de habitaciones, y con todas ellas ocupadas. Si llega un viajero y pide una habitación, el propietario, aún lamentándolo, tendrá que decirle que no puede darle alojamiento. Pero supongamos ahora que el hotel tiene un número infinito de habitaciones, que están numeradas 1, 2, 3, 4, 5...., y que, como en el caso anterior, está completamente lleno. También a última hora de la tarde llega un nuevo huésped y pide una habitación. "Por supuesto", le dice el propietario. Y piensa: "Haremos lo siguiente: el huésped de la habitación número 1 se cambia a la habitación número 2, el de la número 2 a la habitación 3, el de la 3 a la 4, etc. Así quedará libre la habitación número 1 y en ella se puede colocar al nuevo huésped".

¿Cuál es la diferencia entre los dos hoteles?. ¿Cómo es posible que a pesar de estar todas las habitaciones ocupadas en el hotel de infinitas habitaciones se pueda hospedar otra persona más?

b- Lee como continúa la historia y responde:

Ya estaba resuelta la situación pero como los problemas nunca vienen solos, aparecieron mil nuevos huéspedes. El dueño otra vez les dijo que no había problema, y pensó cómo actuar.

Propone tres soluciones diferentes a este problema.

c- *Cuando la situación parecía controlada, aparecieron INFINITOS NUEVOS CLIENTES.*

¿Cómo acomodarías a estos infinitos nuevos huéspedes?

d- ¿Qué nuevas propiedades aparecen cuando se trabaja con conjuntos infinitos?

Observaciones: Con el análisis de este problema, se logró afianzar en los alumnos la diferencia que existe entre los conjuntos finitos e infinitos. Para los alumnos, es claro *que "el todo es mayor a cada una de las partes", sin embargo, el estudio de este tipo de problemas, muestra muy claramente que esta propiedad no es válida en los conjuntos infinitos. La última pregunta en particular, requiere de un mayor detenimiento y abstracción por parte de los alumnos, pero se consigue alguna respuesta, que puede completarse con el siguiente problema.*

Problema 2 (Versión tomada de Guzmán, 1993):

El siguiente problema permite comprobar las diferencias entre la aritmética entre conjuntos finitos e infinitos.

La famosa leyenda sobre el origen del "Juego de ajedrez":

a- Ante una inminente guerra, el rey Iadava, elaboró un plan de batalla que le valió el triunfo, pero desgraciadamente muchos jóvenes pagaron con su vida la seguridad del trono y el prestigio de la dinastía. Entre ellos, el príncipe Adjamir, hijo del rey Iadava. Un día al fin, se presenta ante el rey un joven brahmán ofreciéndole un juego desconocido, que llamó la atención del monarca. El inventor explicó las reglas del juego de ajedrez al rey Iadava, quien quedó tan entusiasmado con el juego que le ofreció regalarle lo que pidiera. El inventor le pidió lo siguiente: Un grano de trigo por la primera casilla del tablero, dos por la segunda, cuatro por la tercera, ocho por la cuarta,... y así sucesivamente, duplicando en cada casilla la cantidad de la anterior hasta llegar a la última. El rey se extrañó de lo poco con que se conformaba, pero ordenó que le dieran lo que pedía. Sólo cuando sus contables echaron cuentas, vieron, asombrados, que no había trigo en el reino, ni siquiera en toda la tierra, para juntar esa cantidad.

¿Por qué crees que no es posible pagarle al brahmán lo que pide? ¿es esta cantidad infinita?.

b- *La leyenda no dice más, pero podemos imaginar al soberano atribulado y humilde disculpándose frente al inventor por no poder cumplir lo prometido. O, a caso, iracundo y altivo, mandando decapitarlo por tomarle el pelo. No obstante, preferimos imaginar una tercera versión en la que el rey ingenioso y jocundo, sabe devolverle la broma al inventor. Manda llamarlo y le dice: "Me pides* $1+2+4+.....+2^{63}$ *granos de trigo. Poca cosa para mi. Te daré más; te daré tantos granos como correspondan, no a un limitado tablero de 64 casillas, sino a un tablero infinito. Te daré pues* $1+2+4+...+2^{63}+2^{64}+2^{65}+...$ *Echemos cuentas del número S de granos que te debo.*

$S=1+2+4+8+16+...+2^{63}+2^{64}+2^{65}+...=1+(2+4+8+16+...+2^{63}+2^{64}+2^{65}+...)=1+2\cdot(1+2+4+8+16+...+2^{63}+2^{64}+2^{65}+...)= 1+2\cdot S$

Entonces $S= 1+2S \rightarrow S=-1$

¡Dame, buen hombre, el grano de trigo que me debes!.- Concluiría nuestro rey bromista.

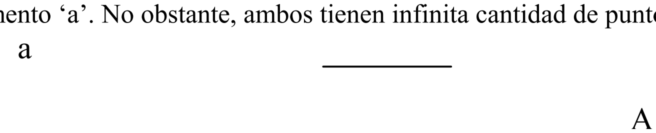
Este cálculo muestra un error, ¿puedes señalarlo? ¿Qué ocurre cuando aplicas propiedades de la aritmética a sumas infinitas?.

Observaciones: Este problema genera un enfrentamiento con el concepto de infinito. La primera pregunta pone de relieve la diferencia entre cantidades muy grandes y cantidades infinitas. Al mismo tiempo, surge una situación más conflictiva al notar que las propiedades aritméticas que utilizaron durante toda la vida les pueden generar conflictos. Aparecen aquí las primeras alertas de que el infinito encierra mucho más contenido matemático de lo que ellos esperaban.

Problema 3 (Versión tomada de Courant y Robbins, 1964):

Proponemos el siguiente gráfico como una demostración sencilla de la correspondencia biunívoca que existe entre dos segmentos cualesquiera o entre un segmento y la recta.

Observando el siguiente gráfico, es trivial afirmar que la recta 'A' tiene "más cantidad" de puntos que el segmento 'a'. No obstante, ambos tienen infinita cantidad de puntos:



Demuestra la correspondencia que existe entre los puntos de los siguientes segmentos

Demuestra la correspondencia que existe entre los puntos de una semicircunferencia y una recta
Demuestra la correspondencia que existe entre los puntos de una semicircunferencia y un segmento
Resuelve los ítem b y c para una circunferencia
<u>Observaciones:</u> La dificultad que se presentó con la demostración de la correspondencia biunívoca entre los puntos de dos segmentos fue que, muchos alumnos argumentaban que en algún momento, se iba a "llenar" de rectas el primer segmento, y no así el segundo.

Errores y dificultades
1.Los alumnos no tuvieron dificultad en admitir que no es lo mismo un hotel con 1000, 10.000, 1.000.000 ó 1.000.000.000 de habitaciones, que uno que tenga "infinitas" habitaciones.
2.Cuando se propuso a los alumnos, que ubiquen al nuevo huésped al llegar al hotel de infinitas habitaciones, muchos alumnos respondieron que esto era imposible, debido a que <u>todas</u> estaban ocupadas.
3.Al discutir sobre cómo ubicar al nuevo huésped en el hotel, algunos alumnos opinaron que esto no era posible, argumentado que *"no hay lugar para este nuevo huésped, porque si se corren todas las personas un lugar (aunque sean infinitos), ¿dónde se ubica al "último"?*.
4.Muy pocos alumnos pudieron proponer otras dos soluciones distintas para ubicar a los nuevos 1000 huéspedes.
5.Frente al problema de ubicar a los nuevos "infinitos" huéspedes, muchos alumnos respondieron: *"Es imposible ubicarlos, porque se puede mover a los huéspedes mil habitaciones "hacia la derecha", de tal forma de dejar las anteriores vacías, pero si se quiere dejar las "primeras infinitas" habitaciones vacías, necesitaríamos vaciar el hotel.*
6.La mayor parte de los alumnos, considera que la cantidad de granos de arena que el rey debe pagar, es infinita.
7.El problema geométrico es, tal vez, el más complicado. En la Argentina al menos, es bastante común que la geometría sea dejada de lado en la educación media. Siendo esta la situación general del curso, se dedicó a este problema más tiempo que al resto, dando especial importancia a los conceptos de punto, recta y continuidad. Finalmente se logró que los alumnos comprendieran que la cantidad de puntos de un segmento y su longitud son circunstancias independientes.
Por otro lado, se pueden trabajar las paradojas de Zenón de Elea que se encuentran muy bien desarrolladas en el libro *Matemática 4* de G. Barallobres y otros, Ed. Aique (1994). De la misma manera, en el tomo 6 de *Sigma, el mundo de las matemáticas* Ed, Grijalbo (1997), se encuentra un capítulo en donde se desarrollan una serie de paradojas. Se recomienda también, la complementación de los trabajos con lecturas

muy amenas, relacionadas con el concepto de infinito. Esta idea tiene como finalidad no sólo el aprendizaje del tema, sino acercar a los alumnos una idea más poética y cotidiana del infinito.

Se recomienda para el tratamiento de los textos la utilización del libro *Los Matematicuentos. Presencia matemática en la literatura* de Palacios, A. y otros. (1995. Argentina: Magisterio del Río de la Plata). En este libro se tratan una serie de textos junto con un análisis de los mismos mostrando cómo se encuentran en esos cuentos conceptos matemáticos tratados a través de la literatura.

Entre todos los cuentos que allí se encuentran, se destacan los siguientes que tratan el tema del infinito.

El Aleph. (Borges, J. L.(1973). *El Aleph.* Buenos Aires, Argentina: Emecé Editores).

"...El diámetro del Aleph sería de dos o tres centímetros, pero el espacio cósmico estaba ahí, sin disminución de tamaño. Cada cosa (la luna del espejo, digamos) era infinitas cosas, porque yo claramente la veía desde todos los puntos del universo..." (El Aleph, Jorge Luis Borges).

La paradoja de Tristam Shandy (Russell, B. (1951). *Misticismo y Lógica.* Buenos Aires, Argentina: Piados. Pp 94-95.)

"Tristam Shandy, como se sabe, invirtió dos años de su vida para hacer la crónica de los dos primeros días de su vida, y se lamentaba que a ese ritmo el material se acumularía más rápidamente de lo que él era capaz de elaborarlo, de suerte que con el paso de los años cada vez estaría más lejos del final de su relato. Ahora bien yo sostengo que si él hubiese vivido eternamente sin sentirse cansado de su trabajo, entonces, aun en el caso de que su vida hubiese estado tan repleta como cuando comenzó, ninguna parte de su biografía habría quedado sin escribirse... Esta proposición paradójica, pero perfectamente verdadera, depende del hecho de que el número de días de todo el tiempo no es mayor que el número de años". (La paradoja de Tristam Shandy, Bertrand Russell).

El libro de arena (Borges, J. L.(1975). *El Libro de arena.* Buenos Aires, Argentina: Emecé Editores).

"Fue entonces que el desconocido me dijo:

-Mírela bien. Ya no la verá nunca más.

...En vano busqué la figura del ancla, hoja tras hojas...

...-Me dijo que su libro se llamaba El Libro de Arena, porque ni el libro ni la arena tienen principio ni fin.

Me pidió que buscara la primera hoja...Todo fue inútil: siempre se interponían varias hojas entre la portada y la mano. Era como si brotaran del libro...

-El número de páginas de este libro es exactamente infinito. Ninguna es la primera; ninguna, la última..." (El libro de arena, Jorge Luis Borges)

Conclusiones

Existe una dificultad que radica no sólo en el conflicto originado en los alumnos por adquirir el concepto sino también, en los docentes por lograr la transposición adecuada del conocimiento.

Al momento de enfrentarse con el infinito, se pueden adoptar diferentes posturas. La propuesta de hacerlo a través de problemas clásicos y lecturas motivadoras permite abordar en el aula un concepto que, por su complejidad, generalmente estuvo apartado de los programas de educación media. Por otro lado, su ausencia se hace notable al momento de enfrentar conceptos básicos del análisis matemático.

La sencillez de los problemas planteados y de las lecturas recomendadas permiten al docente abordar este tema en cualquier momento del curso y de esta manera, lograr, por un lado, un aprendizaje gradual, y por otro, afianzar el concepto de infinito como expresión puramente matemática.

Blibliografía

Barallobres, G., Sassano, M. (1994). *Matemática 4*. Argentina: Aique Grupo Editor.

Bell, E. (1948). *Los grandes matemáticos. Desde Zenón a Poincaré*. Argentina:Ed. Losada.

Corbalán, F. (1998). *La Matemática aplicada a la vida cotidiana*. España: Ed. Graó.

Courant, R., Robbins, H. (1964). *¿Qué es la matemática?*. Editorial Aguilar.

Crespo Crespo, C. (2002). "La noción de infinito a través de la historia". En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. Volumen 15, I, pp 529-534, México: Grupo Editorial Iberoamérica.

De Guzmán, M., y otros (1993). *Matemáticas. Bachillerato 2,* España: Editorial Anaya.

De Morgan, A. (1997). "Colección de Paradojas". En Newman, J. (Ed.) *Sigma. El mundo de las matemáticas.* Volumen 6, pp 304-318. Barcelona, España: Ed. Grijalbo.

Hahn, H. (1997). "El infinito". En Newman, J. (Ed.) *Sigma. El mundo de las matemáticas.* Volumen 4, pp 384-401. Barcelona, España: Editorial Grijalbo.

Moledo, L. (1994). *De las tortugas a las estrellas. Una introducción a la ciencia.* Argentina: AZ Editora.

Moore, A. (1995, junio). Breve historia del infinito. *Investigación y Ciencia*. pp 54-65.

Palacios, A., Barcia, P., Bosch, J., Otero, N. (1995). *Los Matematicuentos. Presencia matemática en la literatura.* Argentina: Magisterio del Río de la Plata.

LAS ACTITUDES HACIA LA MATEMÁTICA Y EL RENDIMIENTO ACADÉMICO EN ALUMNOS DE CÁLCULO DIFERENCIAL

Margarita Veliz de Assaf y María Angélica Pérez de del Negro.
Universidad Nacional de Tucumán, Argentina
mveliz@herrera.unt.edu.ar y mperez200@hotmail.com

Resumen
Como parte de un trabajo de investigación para la búsqueda de nuevas estrategias, con el fin de optimizar el aprendizaje de la Matemática, se abordaron una serie de actividades para evaluar las Actitudes hacia la Matemática (AHM) de los alumnos que cursaron Cálculo Diferencial en el año 2002, asignatura correspondiente a 1º año de nuestra Facultad. Se seleccionó una muestra al azar de 250 alumnos sobre un total de 1100 y se trabajó con una Escala Likert para las mediciones. En este trabajo se muestra el grado de asociación entre el rendimiento y las AHM de los estudiantes, los niveles de asociación entre el rendimiento y cada uno de los aspectos mencionados, como así también la relación existente entre el rendimiento y los perfiles actitudinales construidos sobre la base de dichos aspectos.

Introducción

Como punto de partida para el estudio de las AHM, se indagó sobre los siguientes aspectos actitudinales: la dificultad percibida para el aprendizaje de la Matemática, el temor del alumno para trabajar en Matemática y para participar en clase, el gusto por la Matemática, percepción de comprensión, percepción de competencia para el aprendizaje, utilidad de la Matemática y la percepción del profesor.

En los resultados se presentan los niveles de asociación hallados entre el rendimiento y cada uno de los aspectos mencionados, como así también la relación existente entre el rendimiento y los perfiles actitudinales construidos sobre la base de dichos aspectos (desfavorable, neutro y favorable).

La evaluación de las actitudes se realizó en los mismos alumnos que la evaluación del rendimiento académico, con la finalidad de poder llegar a conclusiones que se puedan complementar. Sobre este tema existe abundante bibliografía internacional que sustenta la asociación entre rendimiento y actitudes. Esta bibliografía permite respaldar y guiar el proceso de evaluación, además de dar referentes para comparar los resultados.

Actitudes. Definición

Las actitudes son definidas como "la tendencia psicológica que se expresa a través de la evaluación favorable o desfavorable de una entidad en particular. Dicha entidad puede ser un objeto, una persona, un suceso o cualquier evento capaz de ser valorado" (Eagly y Chaiken, 1998: 269). El *objeto de actitud* en este caso es la Matemática.

La primera dificultad a que se enfrenta toda investigación en actitudes, se refiere al hecho de que éstas "son entidades no observables y no se traducen necesariamente en conductas" (Summers, 1976: 14)**.** Las actitudes son adquiridas; la forma en que se presentan es variada, proviniendo de experiencias positivas o negativas con el objeto

de la actitud, y/o modelos que pueden provenir de compañeros de clase, docentes, padres, materiales de estudio, etc.
La relevancia de las actitudes reside en la consistencia que tienen con la conducta. Lo que se espera es que si una persona tiene una actitud favorable hacia un determinado objeto, se comportará favorablemente hacia dicho objeto. Sin embargo, las actitudes, positivas o negativas, no siempre resultan en conductas consistentes con las mismas.
El estudio de las actitudes ha sido objeto de atención en el campo de la Psicología, y en especial entre los psicólogos sociales de las últimas décadas. Auzmendi (1992: 16) resalta que "las actitudes deben su fuerza motivacional a que producen ciertos sentimientos, placenteros o displacenteros en el sujeto".

Componentes de las actitudes
Las respuestas mensurables de la actitud se llaman componentes y son tres:

- *componente cognoscitivo*, definido por las creencias y percepciones de una persona sobre el objeto de la actitud.
- *componente afectivo*, definido por los sentimientos que el individuo tiene hacia el objeto de la actitud y la intensidad de los mismos. Este componente considera el aspecto esencial de una actitud, a tal punto que algunos investigadores lo tratan como si fuera la actitud misma.
- *componente de voluntad o conductual,* definido por la respuesta que el sujeto tendría en reacción al objeto de la actitud. Tiene que ver con la probabilidad o con la tendencia de que un alumno emprenda una acción específica o se comporte de una forma particular.

"Una visión amplia del tema de las actitudes como campo de investigación, debe tener en cuenta los tres componentes básicos de toda actitud: cognoscitivo, afectivo y conductual" (Auzmendi, 1992: 17).

Instrumento: para evaluar actitudes pueden considerarse varios tipos de instrumento. En este trabajo se utilizó el de informes acerca de sí mismo o autoevaluaciones, aplicado colectivamente, con descripción del sujeto. Esta forma de aplicación es la más popular según Summers (1976: 25), ya que con un instrumento se recogen las expresiones de cada uno de los sujetos en una toma colectiva de datos.

Variables: respecto a las variables que se miden, una actitud puede considerarse una variable continua. Las variables de actitud, como creencias, preferencias e intenciones, son medidas con escala de clasificación. Tales escalas proporcionan a los entrevistados un conjunto de categorías numeradas que representan el rango de juicios de posiciones posibles. En este trabajo, utilizamos la Escala Lickert para las mediciones, llamada "*escala totalizada o aditiva"* porque los resultados de las afirmaciones individuales se suman para presentar un puntaje total. Es una escala graduada que va del "Totalmente desfavorable o en desacuerdo" al "Totalmente favorable o de acuerdo", utilizando el intervalo del "1 al 5".

Investigaciones sobre actitudes hacia la Matemática y rendimiento académico
Estudios internacionales han mostrado que existe una relación significativa y directa entre las actitudes de los alumnos y el rendimiento en Matemática. Entre ellos, el

estudio del TIMSS (Third Internacional Math and Science Study) realizado entre 1994 y 1995 con la participación de más de 40 países, en el que se concibieron las actitudes como un insumo para facilitar el aprendizaje cognoscitivo y como un producto deseable de cualquier sistema educativo. Los resultados varían por países y niveles educativos. En conjunto, se muestra una relación positiva entre el gusto por la Matemática y las puntuaciones obtenidas en pruebas de esta asignatura.

Los estudios del Nacional Assesment of Education Progress (NAEP) realizados entre 1994 y 1996 en EE.UU. revelaron que existe asociación entre el gusto por la Matemática y la disposición de los alumnos para estudiarla.

Si bien en los estudios mencionados, y en general en la literatura que trata sobre el tema, se muestra la asociación de las actitudes con el desempeño de los estudiantes. Es preciso considerar que puede darse el caso de un alumno que alcance un nivel de rendimiento satisfactorio, y tenga una actitud desfavorable frente a la asignatura. De esta manera, una actitud favorable no garantiza un mejor rendimiento, aunque sí eleva la probabilidad de que éste se dé.

Es importante mencionar que la relación entre actitud y rendimiento es bidireccional y compleja. Desde la psicología educativa se postula que la participación activa del alumno en clase favorece su involucramiento en el proceso educativo y, por tanto, su nivel de desempeño y logro.

Desarrollo

Este estudio se llevó a cabo mediante una muestra de tamaño 250, seleccionada aleatoriamente de los 1100 alumnos inscriptos para cursar Introducción al Análisis Matemático (Cálculo Diferencial) en el año 2002. Se aplicó el instrumento para medir actitudes al comienzo y al final del cursado de la asignatura, que contenía los componentes cognoscitivo, afectivo y conductual. Los resultados de las afirmaciones individuales se sumaron para presentar un puntaje total para cada alumno. A cada reactivo se le dio la misma dirección, en todos los casos "**hacia la Matemática**", obteniéndose los distintos niveles actitudinales que se utilizaron en esta investigación (Veliz y Pérez, 2003).

Cuadro Nº 1: Distribución conjunta del gusto por la Matemática observada al comienzo y final del dictado de Introducción al Análisis Matemático. Año 2002.

Gusto por la Matemática -- Al final	Gusto por la Matemática -- Al comienzo. %			Total
	Agrado	Indiferente	Desagrado	
Agrado	25.0	14.1	13.0	52.1
Indiferente	8.2	11.7	18.7	38.6
Desagrado	0.0	2.3	7.0	9.3
Total	33.2	28.1	38.7	100.0(250)

La concordancia en las respuestas al comienzo y al final de esta variable categórica ordinal se midió con el estadístico no paramétrico Somer's (Siegel, 1995: 346), que nos indica el grado de concordancia entre el gusto por la Matemática observado en dos momentos (al comienzo y final del dictado de la asignatura). En este caso, el estadístico Somer's D = 0,3473 nos indica una leve concordancia. Las frecuencias porcentuales indicadas en la diagonal principal del cuadro son las que manifiestan permanencia o acuerdo entre el gusto antes y después. Podemos decir que los que tuvieron una actitud positiva al comienzo (33.2 %) en un pequeño porcentaje (8.2 %) no la mantuvieron declarándose al final indiferentes. Los que se manifestaron inicialmente indiferentes (28.1%), en un porcentaje considerable (14.1%) se ubicaron luego en el agrado, el (11.7%) permanecieron en la indiferencia, y el resto (2.3%) pasó al desagrado. Los que manifestaron al comienzo una tendencia negativa hacia la Matemática, en su gran mayoría la dirigieron al final hacia una actitud más positiva.
De igual modo se analizaron todos los aspectos actitudinales considerados.
Este estudio, nos llevó a analizar también la relación existente entre los aspectos actitudinales y el rendimiento académico de los alumnos.

Rendimiento académico

El **rendimiento académico** es una expresión valorativa particular del logro alcanzado por los alumnos, correspondiente a un período dado en el proceso educativo, que se presenta en el área del conocimiento, y en el marco de una institución. Se eligió como **indicador** del rendimiento académico, las **calificaciones** obtenidas por los alumnos en las tres pruebas parciales y la calificación final del curso de Introducción al Análisis Matemático, porque se consideró que éstas pueden reflejar el avance que tuvieron los alumnos en lo explícito, en el cuatrimestre en que se dictó la asignatura, bajo las condiciones que institucionalmente se fijaron.

Relaciones entre variables
En el Cuadro Nº 2 se muestra los porcentajes de los alumnos que se ubican en cada uno de los aspectos actitudinales estudiados, así como el rendimiento académico en las medias de las calificaciones de los exámenes parciales y final para cada uno de esos aspectos. Se observa que los mayores porcentajes se encuentran en las categorías consideradas como favorables y que los promedios de las calificaciones en cada uno de los exámenes considerados para las categorías favorables se encuentran por encima de la media general de cada uno de los exámenes. Por lo que se puede apreciar que el rendimiento está asociado positivamente con las respuestas a las preguntas consideradas para el estudio.

Cuadro Nº 2: Distribución de los alumnos y medias de las calificaciones en los exámenes según las categorías de los aspectos considerados. Introducción al Análisis Matemático. Año 2002.

Aspectos Actitudinales	**Categorías---- %**		**Calificación Promedio**			
			1º parcial μ= 6.9	2º parcial μ=5.3	3º parcial μ=6.0	Exam en final μ=5.7
Temor	No manifiesta	**87.0**	7.0	5.5	6.5	5.9
	Si manifiesta	**13.0**	5.8	4.5	5.1	4.9
Gusto	Agrado	**33.1**	7.3	5.8	6.4	5.9
	Indiferente	**28.4**	6.8	5.0	5.6	5.6
	Desagrado	**38.4**	6.5	4.9	5.3	5.1
Percepción de competencias para el aprendizaje	Alta	**72.0**	7.0	5.4	6.2	5.7
	Baja	**18.0**	6.5	4.8	5.4	5.2
Percepción del profesor	Buena	**86.0**	7.0	5.3	6.3	6.0
	Mala	**14.0**	6.5	4.8	5.4	4.6
Dificultad percibida para el aprendizaje	Sin dificultad	**51.0**	7.3	5.9	6.3	6.0
	Alguna dificultad	**40.0**	6.2	5.1	5.6	5.3
	Con dificultad	**9.0**	5.8	4.9	5.1	5.2
Percepción de comprensión	Buena	**84.0**	7.3	5.9	6.0	6.6
	Mala	**16.0**	6.7	5.2	5.5	5.8

Se determinó que en cada una de las categorías del rendimiento en el examen final (malo, regular, y bueno), las frecuencias decrecen con respecto a las categorías del gusto excepto los de rendimiento malo que su gusto se manifiesta en la indiferencia y el desagrado.

Otro aspecto importante estudiado es la percepción del profesor con respecto al rendimiento.

Es significativamente diferente el rendimiento de los alumnos con experiencias de buenos profesores que los que manifiestan experiencias con malos profesores. Para ellos se realizó un test estadístico de rangos no paramétrico de Kruskal-Wallis entre los dos grupos independientes (con experiencia de buenos y malos profesores). Se testó la hipótesis nula "No existen diferencias entre los rendimientos de ambos grupos". El estadístico de prueba KW = 10,2423 P-Value = 0,0013, con lo que se rechaza la hipótesis nula aceptando que el rendimiento en ambos grupos es diferente.

En el Cuadro Nº 3 se puede observar la relación existente entre el rendimiento y los niveles actitudinales construidos sobre la base de dichos aspectos.

<u>Cuadro Nº 3</u>: Medias de los Rendimientos en los Exámenes según los niveles actitudinales. Introducción al Análisis Matemático. Año 2002.

Examen	Niveles Actitudinales			Anova	
	Desfavorable (18,3%)	Neutro (36,6%)	Favorable (45,1%)	F	Prob
1º Parcial	5.36	5.94	6.53	3,26	0,039
2º Parcial	5.02	5.08	5.72	3,03	0,050
3º Parcial	5.18	5.83	6.1	6.14	0.002
Final	5.1	6.0	6.6	3,26	0,039

El test Anova realizado en cada uno de los niveles actitudinales, indica para cada uno de los exámenes, que existen diferencias significativas entre las medias de cada uno de ellos, siendo la del nivel favorable diferente a la del desfavorable.

Conclusiones

Del estudio de la variable Actitud hacia la Matemática, y de su relación con el rendimiento académico de los alumnos, se desprende que:

- Los aspectos actitudinales analizados son muy relevantes en el rendimiento, ya que las respuestas que denotan una actitud favorable se relacionan de manera directa con el nivel de logro académico alcanzado por los alumnos.
- Los resultados encontrados, sugieren la importancia de la dimensión afectiva del aprendizaje sobre el rendimiento académico de los estudiantes.
- La recepción de los contenidos por parte de los alumnos, la comprensión de la información que reciben, el sentimiento de competencia para el aprendizaje expresado por su seguridad, y el gusto por la materia, tienen una asociación significativa con el rendimiento, aunque la magnitud de cada aspecto sobre la variable rendimiento es diferente. Esto nos sugiere que para lograr un mejor rendimiento, es necesario que los alumnos se sientan competentes para aprender, comprendan los contenidos que se trabajan en clase, cuenten con un ambiente en el aula que estimule y motive sus participaciones.
- Este estudio sugiere la existencia de una fuerte relación entre el rendimiento académico de los alumnos y el gusto por la Matemática, como así también con la percepción del profesor. Los alumnos con buen rendimiento académico tienen una actitud más positiva hacia la Matemática
-

Bibliografía

Auzmendi, E. (1992). *Las actitudes hacia la Matemática – estadística en las enseñanzas media y universitaria. Características y medición*, Editorial Mensajero, Bilbao, España.

Eagly, A. y Chaiken, S. (1998)"Attitude Structure and Function", en Gilbert, D.T.; Fiske, S.T. y Lindzey, G., *The handbook of Social Psichology,* vol 1, pp. 269 – 322, Mc. Graw Hill, 4º edición, New York.

Morales, F. (1994). *Psicología Socia*l. Madrid: Mc Graw-Hill/Interamericana, España.

NAEP *(The National Assessment of Educational Progress).* (1994) NAEP 1994 Trends in Academic Progress

Rodríguez, A. (1990). *Psicología Social,* Editorial Trillas, México.

Siegel, S. y Castellan, N. J. (1995). *Estadística no paramétrica,* Editorial Trillas, México.

Summers, G. F. (1976). Medición de actitudes, Editorial Trillas. México.

TIMSS (Third International Mathematics and Science Study). (1998). Mathematics and Science Achievement in the final year of secondary school: *Third International Mathematics and Science Study.*

Valdez Coiro, E. (2000). *Rendimiento y actitudes*, Grupo Editorial Iberoamérica, México.

Veliz, M. y Pérez, M.A**.** (2003). Estudio diagnóstico: las actitudes hacia la Matemática en alumnos de primer año del nivel superior, *trabajo presentado en el VSEM (V Simposio de Educación Matemática*, Chivilcoy, Buenos Aires.

LAS PRÁCTICAS SOCIALES COMO GENERADORAS DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO

Jaime Arrieta, Gabriela Buendía, Marcela Ferrari, Gustavo Martínez, Liliana Suárez
Cinvestav-IPN, UAEH, UAGRO. México
j_arrieta@hotmail.com, gbuendia@uaeh.reduaeh.mx, mferrari@mail.cinvestav.mx, gustavomtzs@yahoo.com.mx, lsuarez@mail.cinvestav.mx

Resumen

La socioepistemología, como aproximación teórica, aborda la construcción del conocimiento matemático a través de cuatro dimensiones actuando de manera sistémica: cognitiva, didáctica, epistemológica y social. Aunque es un marco teórico en construcción, marca desde su génesis, una manera distinta de hacer investigación en Matemática Educativa pues se reconocen y estudian científicamente elementos presentes en la construcción del conocimiento como las herramientas y argumentos utilizados en contextos interactivos. Estos elementos serán la metáfora para explicar la construcción del conocimiento matemático.

Las investigaciones socioepistemológicas permiten concebir a la matemática no como un saber fijo y preestablecido, sino como un conocimiento con significados propios que se construyen y reconstruyen en el contexto mismo de la actividad que realiza el hombre. Este artículo da cuenta de la sistematización de la reflexión habida a propósito del Grupo de Trabajo *Las Prácticas Sociales como Generadoras del Conocimiento Matemático* realizado en el marco de la XVII Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa realizada en Santiago de Chile entre los días 21 y 25 de julio de 2003. El Grupo de Trabajo tuvo como objetivo plantear un escenario donde se mostraron algunas de las investigaciones doctorales que se han generado recientemente bajo este marco. En ellas, se abordan aspectos como la relación entre prácticas sociales y el conocimiento matemático y el uso de herramientas en contextos interactivos. La riqueza de la discusión está en la diversidad de temas matemáticos sobre los que se ha investigado y que, sin embargo, coinciden en tratar al conocimiento matemático como una construcción social.

La socioepistemología como base de reconstrucción de significados

El acercamiento socioepistemológico desarrolla estrategias de investigación de naturaleza epistemológica donde ésta es entendida como el estudio de las circunstancias que favorecen o posibilitan la construcción del conocimiento. Que la epistemología sea entendida a través de la actividad humana permite tomar como objeto de estudio situaciones que no están definidas en una estructura matemática y que, sin embargo, están presentes cuando se estudia al hombre haciendo matemáticas y no sólo su producción matemática. Es en este sentido donde los aspectos constructivos del conocimiento son el foco de interés para nuestras investigaciones.

El planteamiento anterior deriva en el análisis de la relación entre prácticas sociales y el conocimiento, entendiendo a las prácticas sociales como un conjunto de acciones voluntarias que, intencionalmente, desarrolla el individuo para construir conocimiento.

Las investigaciones que se están desarrollando han dado evidencia de elementos socioepistemológicos de conceptos como los logaritmos (Ferrari, en prensa) y lo periódico (Buendía y Cordero, 2003). A través de revisiones históricas y de lo que sucede en los sistemas didácticos, en esas investigaciones se da evidencia de cómo el discurso matemático suele favorecer sólo algunos aspectos relacionados con dichos conceptos, dejando de lado elementos presentes en la construcción social del conocimiento tales como los argumentos y las herramientas relacionadas; que son básicamente aquellos factores que posibilitan la construcción del conocimiento.

Tradicionalmente, la epistemología de conceptos ha permitido explicar las dificultades en la adquisición de objetos estáticos; sin embargo, no ha logrado establecer relaciones, más allá de un nivel utilitario, entre los diferentes tópicos del conocimiento matemático. Nuestra hipótesis básica, en cambio, es que una epistemología basada en prácticas sociales favorecería un estudio de la construcción social de la matemática a través de la reconstrucción de significados asociado al saber matemático. De esta manera, se favorecería el carácter funcional del mismo.

Una vez que se reconocen a las prácticas sociales como generadoras de conocimiento, las situaciones que se diseñan fundamentadas en dichas socioepistemologías permiten hacer evidente herramientas y argumentos en los contextos interactivos del salón de clases.

La predicción y lo periódico

Un resultado que arroja la investigación bajo la perspectiva socioepistemológica es la relación entre la predicción, como práctica social y lo periódico en un contexto de funciones (Buendía y Cordero, 2002, 2003).

El discurso matemático escolar suele favorecer la presentación inicial de la periodicidad funcional, a través del estudio de las funciones trigonométricas, como el seno, que son periódicas con periodo 2π porque $sen\ (x+2\pi) = sen\ x$. De ahí, cualquier fenómeno que se modele a través de dicha función será, por consiguiente, periódico. Esta presentación favorece una errónea generalización hacia concepciones como “Cualquier función que tenga forma senoidal será periódica” El significado que parece estar presente es que cualquier tipo de regularidad hace que la función sea periódica.

Sin embargo, la revisión epistemológica de la periodicidad en las funciones trigonométricas muestra que, a pesar de que funciones como el seno y coseno eran conocidas desde principios de nuestra era, dicha propiedad no fue reconocida y analizada sistemáticamente sino hasta el siglo XVIII.

Ese reconocimiento se debe al trabajo de Euler en ecuaciones diferenciales, en el que el autor tuvo necesidad de utilizar explícitamente la función seno (y no arco seno, como tradicionalmente se había hecho) de tal manera que el desplazamiento del móvil en estudio pudiera quedar expresado en términos del tiempo. Esto le permitió estudiar el movimiento en cualquier tiempo y sus propiedades.

Creemos que esta acción de predecir favorece, en el caso de los movimientos repetitivos, una reconstrucción de significados alrededor de la regularidad del movimiento. Es por medio de dicha reconstrucción que el aspecto periódico de las funciones puede generarse de una manera funcional dentro del saber matemático de un individuo.

La integración sistémica de conocimientos matemáticos como práctica social

Martínez (2002, 2003) han dado evidencias que permiten aislar la presencia de un mecanismo de construcción de conocimiento, al que han denominado convención matemática, que construye los significados y funcionalidad de los convencionalismos relativos a los exponentes. Preguntas como qué significado puede dársele a la expresión a^x? pueden ser planteadas y resueltas a través del mecanismo mencionado. Una caracterización de tal mecanismo se puede resumir como: *el proceso mediante el cual un significado es* convenido *para posibilitar la construcción de cuerpos unificados y coherentes de conocimiento* matemático *(es decir para la integración sistémica de conocimientos)*.

Tal caracterización es el resultado del estudio de las diversas formulaciones, a lo largo del devenir histórico, que hemos encontrado en relación a los exponentes no naturales: al seno de dos sintaxis algebraicas y en dos semánticas gráficas. Tal caracterización es posible debido a que en todas las formulaciones señaladas es posible observar el funcionamiento de la misma herramienta para construir significados aun en escenarios distintos (algebraicos y gráficos, por ejemplo). A tal herramienta la han denominado "Convención matemática".

Lo anterior es un hallazgo importante para nuestro proyecto de *reconstrucción* del discurso matemático escolar; ya que permite señalar que la atención debe ser puesta en los mecanismos constructivos y no en los conceptos matemáticos en sí. De esta manera la pregunta básica, ¿qué es lo que permite construir conocimiento?, adquiere aquí un marco de referencia específico y la respuesta apunta hacia la conformación de un *escenario* centrado en una *práctica social* de integración sistémica de conocimientos matemáticos; en donde la convención matemática sería un consecuencia particular de tal práctica. Con esta idea básica se pretende poner en marcha una línea de investigación, al seno de la socioepistemología, que explore algunas de las "componentes de convención matemática" presentes en la construcción de diversos contenidos matemáticos. La tarea es presentar ejemplos que apoyen esta hipótesis, la que es una guía para las investigaciones futuras.

La covarición y los logaritmos

Al seno de este acercamiento socioepistemológico, en Ferrari (2003), se presenta un estudio de la dislexia en la presentación escolar de los logaritmos. Esto es, su carácter operativo en bachillerato para luego reaparecer en los cursos de Cálculo (nivel superior) pero como función.

Su presencia en el discurso matemático escolar, puede tildarse de ostensivo, es decir, "ver y creer" sin ser construido escolarmente lo cual consideramos que propicia la no apropiación de este concepto.

Del estudio de la evolución de esta noción desde sus inicios, cuando aún no era definida formalmente, hecho debido a Napier en 1614, la relación entre una progresión geométrica y una aritmética, definición primera de los logaritmos, se constituyó en una fuente rica en significados que permitió ser modelado en varios registros y a su vez modelar fenómenos de la naturaleza.

Su origen como "facilitadores de cálculos", es decir, su definición con el fin multiplicar sumando, fue extendiéndose hasta llegar a nuestros días como una poderosa herramienta utilizada en varios contextos y ciencias.

Creemos que percibir a los logaritmos como la covariación entre una progresión geométrica y una aritmética, es un potente argumento de resignificación de los logaritmos que nos permite vislumbrar caminos de construcción escolar de esta noción, mismo que no habría sido relevante si el estudio hubiera sido de corte netamente histórico.

Hacia una modelación del Cálculo

Uno de los puntos de atención es la reconstrucción de significados[1] del Cálculo en la que el contexto y la intención didáctica de las actividades de aprendizaje proporcionan elementos para reformulaciones epistemológicas del saber matemático que se presenta en el salón de clases. La formulación epistemológica del Cálculo de esta aproximación puede explicarse como se señala a continuación (Cordero, 1998):

> "Consideramos el Cálculo como el estudio de los fenómenos de variación, donde la operación fundamental es la resta que modela la comparación de dos estados. Algunas veces en una situación local y otras veces en una situación global. Esta visión […] corresponde más a una base de modelación y de uso", p. 59.

Esta perspectiva epistemológica del Cálculo es distinta a otros proyectos de innovación para la enseñanza del Cálculo. Por un lado, proporciona explicaciones de cómo surge el conocimiento matemático, cuál es su funcionamiento y cuáles sus diversas formulaciones. Y por otro lado da elementos para cambiar el discurso de la enseñanza del Cálculo, esto es, rediseñarlo. (Alanís, 2000). Plantea un programa de investigación en el cual se parte de estos marcos de referencia epistemológica hacia el estudio de los planos de representación de los estudiantes para proporcionar explicaciones que permitan una reorganización en el salón de clases. (Cordero, 1998). El programa consiste en tomar los estudios realizados en la década de los noventa (Cantoral, 1990; Cordero, 1994) como base epistemológica para la búsqueda de elementos que permitan el rediseño del discurso matemático escolar del Cálculo.

En este contexto se inscribe un proyecto de investigación titulado *El estudio de la variación a través de las prácticas de simulación, graficación y manejo de datos (Suárez 2001)*. En este proyecto se proporcionará una explicación de las construcciones matemáticas de los estudiantes cuando utilizan herramientas tecnológicas para el estudio de fenómenos de variación. El supuesto básico es que estas construcciones se encuentran determinadas por las herramientas y los significados que se generan a partir de las prácticas mencionadas, por lo tanto el propósito de la investigación es caracterizar, dentro de la perspectiva teórica de la socioepistemología, la simulación, la modelación y el manejo de datos como formas de construcción del conocimiento matemático.

Comentarios finales

Lo anterior ha permitido compartir con la Comunidad Latinoamericana de Matemática Educativa que bajo una misma Escuela de Pensamiento de naturaleza social, pueden convivir diversos estudios que a medida que se fortalecen, generan líneas de investigación. Esto permite el desarrollo de la disciplina y, al mismo tiempo, favorece que cada comunidad nacida por la expansión de dichas líneas reconozca sus condiciones, recursos y posibilidades y pueda establecer sus estrategias, medios y escenarios, formular acciones y teorizar (que es hacer ciencia) para trazar orientaciones y entender lo que se desarrolla en su seno.

[1] A la incorporación en experiencias de aprendizaje de los significados identificados en los análisis epistemológicos se le ha llamado reconstrucción de significados (Cordero, 1992; 1994; 1998; 2001; Cantoral, 1990; Muñoz, 2000).

Referencias

Alanís, J. (2000) La predicción: un hilo conductor para el desarrollo de un curso de Cálculo. En Cantoral, R. (Com.) El futuro del Cálculo infinitesimal. Grupo Editorial Iberoamérica.

Arrieta, J. (2003) La modelación como proceso de matematización en el aula. Tesis doctoral del Departamento de Matemática Educativa. Cinvestav - IPN

Buendía, G., Cordero, F. (2003) Una epistemología del concepto de periodicidad a través de la actividad humana. La predicción como argumento. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. l6(1),* 112-116.

Buendía, G. y Cordero, F. (2002). Una epistemología del concepto de periodicidad a través de la actividad humana. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 15*.

Cantoral, R. (2000). Pasado, presente y futuro de un paradigma de investigación en Matemática Educativa. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 13, 54-62)* Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R. (1990) Desequilibrio y equilibración. Categorías relativas a la apropiación de una base de significados propias del pensamiento físico para conceptos y procesos matemáticos de la teoría elemental de las funciones analíticas. Tesis doctoral, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN.

Cordero, F. (2001) La incidencia de la socioepistemología en la red de investigadores en Matemática Educativa. Una experiencia. En Serie: Antologías. Programa Editorial. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Red de CIMATES. Número 1.

Cordero, F. (1998) El entendimiento de algunas categorías del conocimiento del Cálculo y Análisis: el caso del comportamiento tendencial de las funciones. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Vol. 1, Núm. 1, 57-74.*

Cordero, F. (1994) Cognición de la integral y la construcción de sus significados. Un estudio del discurso matemático escolar. Tesis doctoral, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN.

Ferrari, M. (2003). Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Martínez, G. (2003). Caracterización de la convención matemática como un mecanismo de construcción de conocimiento. El caso de su funcionamiento en los exponentes. Tesis de doctorado. Programa de Matemática Educativa CICATA-IPN, México.

Martínez, G. (2002) Explicación sistémica de fenómenos didácticos. El caso de las convenciones en el tratamiento de los exponentes no naturales. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 5 (1), 45-78.*

Muñoz, G. (2000) Elementos de enlace entre lo conceptual y lo algorítmico en el Cálculo Integral. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Vol. 3, Núm.2, 131-170.*

Suárez, L. (2001) Las actividades de simulación y modelación en el salón de clases para la construcción de significados del Cálculo. *Serie Antologías*. Programa Editorial Red Nacional de CIMATES, *Núm. 1, 335-345.*

MODELOS MATEMÁTICOS

Víctor Martínez Luaces, Patricia Camarena Gallardo y María Salett Biembengut
U. de la República Oriental de Uruguay, IPN de México, U. Regional de Blumenau
Uruguay, México y Brasil
victorml@fing.edu.uy, patypoli@prodigy.net.mx

Resumen
Este reporte corresponde a la contribución colectiva que surgió del debate del Grupo de Discusión y trabajo titulado: *Modelos Matemáticos*. En éste se abordan las siguientes preguntas: a) ¿Por qué los modelos matemáticos en los diferentes niveles educativos?. b) ¿Qué relación existe entre los modelos matemáticos, la resolución de problemas y la matemática en el contexto de las ciencias?. Al mismo tiempo que se da información acerca de las investigaciones que se han enfocado a los modelos matemáticos: Caracterización de lo que son los modelos matemáticos; clasificación de los modelos matemáticos; ejemplos de modelos matemáticos; etc.
Concluyendo con las opiniones de los asistentes para enriquecer este trabajo.

Introducción
El Grupo de Trabajo titulado: "Modelos Matemáticos" pretende que se discuta y reflexione acerca del tema de modelos matemáticos. Esto significa que se aborden las interrogantes que indagan acerca de ¿por qué los modelos matemáticos en los diferentes niveles educativos?, ¿qué relación existe entre los modelos matemáticos, la resolución de problemas y la matemática en el contexto de las ciencias?, ¿cómo incorporar los modelos matemáticos a las aulas de clases?
Es menester mencionar que los participantes de este grupo de trabajo fueron: José Ortiz de Venezuela; de Chile participaron cinco colegas: Renate Laudien, Gladys González, Francisco Navia, Patricia López y Hernán Muñoz; los asistentes de México fueron: Julieta Verdugo, Claudia Muro y Luis Briceño; la décima persona fue Verónica Molfino de Uruguay; más los responsables del grupo de trabajo.
Para el desarrollo de las sesiones del Grupo de Trabajo las actividades se dividieron en dos grandes rubros.
La primera sesión se concibió en dos etapas, la que estuvo enfocada a abordar por parte de los conductores del Grupo de Trabajo las siguientes preguntas: a) ¿Por qué los modelos matemáticos en los diferentes niveles educativos?. b) ¿Qué relación existe entre los modelos matemáticos, la resolución de problemas y la matemática en el contexto de las ciencias?. La segunda etapa se dedicó a dar información acerca de las investigaciones que se han enfocado a los modelos matemáticos: Caracterización de lo que son los modelos matemáticos; clasificación de los modelos matemáticos; ejemplos de modelos matemáticos.
La segunda sesión se desarrolló en base al debate sobre los modelos matemáticos.

Desarrollo
Acerca de la interrogante de por qué los modelos matemáticos en los diferentes niveles educativos se presentó la siguiente cita:

> *Uno de los propósitos de que la matemática esté incorporada en los diferentes niveles educativos es que la matemática apoye al individuo a*

> *resolver problemas de su vida cotidiana y laboral. Un elemento que se destaca de la resolución de problemas es la formulación del modelo matemático, razón por la cual deben estar considerados los modelos matemáticos en todos los niveles educativos* (Camarena, 2000).

Respecto a la segunda interrogante se comentó lo siguiente que la resolución de problemas, como su nombre lo indica, se aboca a que el alumno resuelva problemas, que pueden ser dentro de la propia matemática o de aplicación de la matemática. Desde el punto de vista de la investigación se sabe que están presentes diferentes elementos cognitivos y psicológicos al momento de llevar a cabo la resolución de un problema, lo que determina la teoría de la resolución de problemas, denominada en otros ámbitos como "problem solving" o PBL.

Para el logro de la solución del problema planteado se hace necesario construir uno o más modelos matemáticos, lo que muestra que los modelos matemáticos son una parte de la resolución de problemas.

La matemática en el contexto de las ciencias es una teoría que aborda la problemática de la enseñanza y aprendizaje de la matemática en carreras en donde la matemática no es una meta por sí misma. Posee cinco fases: didáctica, cognitiva, epistemológica, curricular y de formación de docentes. La fase curricular incluye una metodología para el diseño de programas de estudio de matemáticas, la cual se denomina DIPCING (Camarena, 1984). La fase cognitiva ofrece resultados de investigaciones en donde la motivación hacia el aprendizaje de la matemática se acrecenta con la matemática en contexto; también se ha determinado que para que el estudiante pueda construir su conocimiento es necesario que transite por diversos registros: numérico, algebraico, analítico, visual y contextual(Camarena, 1999). La fase epistemológica posee diversos resultados entre los más relevantes es el constructo teórico de nominado "transposición contextualizada", en donde se establece que la matemática escolar tiene que sufrir transformaciones para ser una matemática de aplicación (Camarena, 2001). La fase de formación docente contempla una propuesta para los profesores denominada: Especialidad en docencia de la ingeniería matemática en electrónica (Camarena,1990). Finalmente la fase didáctica posee una propuesta didáctica con el auxilio de la resolución de problemas (denominada: Matemáticas en Contexto), sólo que en la matemática en contexto se abordan problemas que están vinculados con las demás asignaturas que cursa el estudiante y con problemas de su vida cotidiana; la intención de la propuesta didáctica es favorecer la construcción del conocimiento y la transferencia del conocimiento en el estudiante y desarrollar las competencias laborales del futuro profesionista (Camarena, 1987, 1993 y 2000).

Como se puede ver la resolución de problemas aborda cualquier tipo de problema, incluyendo los de la misma matemática, y pretende la construcción del conocimiento. Mientras que la matemática en el contexto de las ciencias trabaja la resolución de problemas abordando problemas vinculados con las demás asignaturas del estudiante y problemas de su vida cotidiana.

Las diferencias más sustanciales son lo que persigue cada una de estas dos teorías. La resolución de problemas busca construir el conocimiento y la matemática en el contexto de las ciencias pretende favorecer la transferencia del conocimiento, construir el conocimiento y desarrollar competencias laborales.

Correspondiente a los modelos matemáticos se presentaron ejemplos fundamentalmente vinculados a las Ecuaciones en Derivadas Parciales (E.D.P.), vinculadas principalmente a problemas de difusión. En tal sentido, es conveniente observar que la mayoría de los textos vinculan las E.D.P. parabólicas (que son las que se utilizan en problemas de Difusión), a problemas de Transmisión de Calor. Por este motivo, se optó por presentar ejemplos innovadores, donde se modelan problemas concretos de Transferencia de Masa, vinculados a la Ingeniería Química, la Ingeniería de Alimentos, la Ingeniería Ambiental y otras ramas de la Ingeniería (Martínez Luaces, V., en prensa).

Otro concepto matemático de suma utilidad en la modelación de problemas es la Transformada de Laplace. Esta herramienta es usual en problemas de Teoría de Circuitos, pero su utilidad es menos conocida en otro tipo de problemas, como los vinculados al Diseño de Reactores. Esto si bien a priori puede parecer excesivamente técnico, ha sido presentado (en versiones simplificadas) a Profesores de Matemática de distintos países latinoamericanos, que han podido acceder exitosamente a este tipo de problemas. En efecto, como ya se mencionó en un trabajo anterior basado en un mini-curso de RELME XV, estos problemas en algunos casos tienen muy pocos pre-requisitos y resultan sumamente accesibles tanto para los alumnos como para profesores que no necesariamente tienen formación en Ingeniería (Martínez Luaces, 2001).

En lo que tiene que ver con las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (E.D.O.), también hay aplicaciones menos comunes que las habituales, en áreas tales como la Cinética de las Reacciones Químicas (Martínez Luaces, V. y Guineo Cobs, G., 2002). Algunas de estas aplicaciones tienen mucho interés del punto de vista educativo y presentan la posibilidad de una enseñanza interactiva y multidisciplinaria, no sólo de las E.D.O., sino también de los métodos numéricos asociados a las mismas (Guineo Cobs, G. y Martínez Luaces, V., 2002).

El modelado matemático no sólo se puede ejemplificar a través de las Ecuaciones Diferenciales (E.D.O. y E.D.P.), o de las Transformadas Integrales (en particular, de la Transformada de Laplace). Como ya se mencionó, hay ejemplos interesantes de Cálculo Numérico y también pueden presentarse modelos en los que se recurre al pensamiento probabilístico o estocástico. Ejemplos de esto último han sido ampliamente analizados y discutidos en un trabajo presentado en RELME XII, publicado dos años más tarde en una versión más completa (Martínez Luaces, V. y Cuitiño, E., 2000).

Esto permitiría en principio una primera caracterización de los modelos matemáticos que se aplican en otras disciplinas, atendiendo a si se trata de modelos analíticos, numéricos, o estocásticos. Sin embargo, ese tipo de clasificación no realiza un aporte muy significativo, ya que sólo toma en cuenta la rama de la Matemática que se utiliza en la confección del modelo. Por este motivo, existen otras clasificaciones más profundas de los modelos matemáticos y en particular, se menciona en el grupo de trabajo, un criterio de clasificación que es específico para los modelos utilizados en Ingeniería.

La caracterización y clasificación de los modelos matemáticos en ingeniería es la que emerge del proyecto de investigación cuya referencia es Camarena (2000). En la ingeniería se matematizan problemas, objetos y situaciones. Se caracteriza a un modelo matemático como aquella relación matemática que describe objetos o problemas de la ingeniería. Se clasifican a los modelos según si se trata de un objeto o un problema como se muestra en el cuadro No. 1.

<table>
<tr><th colspan="6">CARACTERIZACIÓN DE LOS MODELOS MATEMÁTICOS</th></tr>
<tr><td colspan="2">Modelaje de objetos de la ingeniería</td><td colspan="4">Modelaje de problemas de la ingeniería</td></tr>
<tr><td colspan="2">La clasificación está en función del uso que le da la ingeniería</td><td colspan="4">La clasificación está en función de las áreas cognitivas de la ingeniería</td></tr>
<tr><td>Modelos Estáticos</td><td>Modelos dinámicos</td><td>Modelos de primera generación</td><td>Modelos de segunda generación</td><td>Modelos de tercera generación</td><td>Modelos de cuarta generación</td></tr>
</table>

Cuadro No. 1. Clasificación de los modelos matemáticos según su caracterización

La discusión del grupo

Con los elementos descritos de investigaciones previas de los conductores del grupo de trabajo se propuso la discusión.

Los participantes mostraron gran preocupación por la falta de preparación de los docentes acerca de la modelación matemática. Por lo que se propuso que para la incorporación del tema de modelación matemática en las aulas de clase se le debería de dar una preparación previa a los docentes incluyendo ejemplos concretos de modelos como los expuestos en las sesiones de trabajo de este grupo, así como la caracterización y clasificación de los modelos matemáticos para graduar su dificultad con propósitos de enseñanza.

Otro punto en el debate fue la incorporación de la tecnología electrónica para la resolución de problemas. Se comentó acerca de los avances que hay en esta dirección como los que se desarrollan en México en el nivel medio superior por parte de profesores de la Universidad Nacional Autónoma de México y el Instituto Politécnico Nacional y en Uruguay en la Universidad de la República Oriental de Uruguay.

Otro punto que salió a la luz de la discusión fue el hecho de distinguir entre modelos matemáticos de problemas de la industria y modelos matemáticos de problemas "simples" con propósitos de enseñanza. Al respecto se comentó que en cada uno de los países de los participantes hay personas con formación de matemáticos que se dedican a la modelación matemática de problemas de la industria.

Para finalizar se mira la necesidad de tratar este tema de forma continua.

Bibliografía

Bassanezi, R.. (2002) *Modelagem Matemática no Ensino-Aprendizagem*. Editora Contexto: San Paulo,.

Beimbergut, (1999) Maria Salett. *Modelagem Matemática & Implicaçoes no Ensino-aprendizagem de Matemática*. Editora da FURB: Blumenau,.

Biembengut, Maria Salett e Hein, Nelson. (2003)*Modelagem Matemática no Encino*. 3ª ed. Editora Contexto: San Paulo,.

Camarena G. Patricia, (1984). *El currículo de las matemáticas en ingeniería*. Mesas redondas sobre definición de líneas de investigación en el IPN, México.

Camarena G. Patricia, (1987). *Diseño de un curso de ecuaciones diferenciales en el contexto de los circuitos* *eléctricos*. Tesis de Maestría en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN ,México.

Camarena G. P. (1990). Especialidad en docencia de la ingeniería matemática en electrónica. Edit. ESIME- IPN.

Camarena G. Patricia, (1993). Curso de análisis de Fourier en el contexto del análisis de señales eléctricas. ESIME-IPN, México.

Camarena G. P., Rocha M. (1997). Modelos matemáticos de la electricidad y magnetismo. XI Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, Morelia.

Camarena G. Patricia, (1999). Reporte del proyecto de investigación titulado: Etapas de la matemática en el contexto de la ingeniería. ESIME-IPN, México.

Camarena G. P. (2000). *Reporte de investigación titulado: Los modelos matemáticos* como etapa de la matemática en el contexto de la ingeniería. ESIME-IPN, México.

Camarena G. Patricia, (2001). Las Funciones Generalizadas en Ingeniería, construcción de una alternativa didáctica. Colección: Biblioteca de la Educación Superior, Serie Investigaciones, ANUIES, México

De Bono Edward (1997). *El pensamiento lateral, manual de creatividad*. Paidós Empresa 5.

Discusión Document-8(2002) ICMI. Aplications and Modeling in Mathematics Education. Study 14. ICMI,.Guineo Cobs, G. y Martínez Luaces, V., 2002, "Electrocatalitic Reactions: an interesting problem of Numerical Calculus" CD: Second Internacional Conference on the Teaching of Mathematics, Editado por Wiley & sons. Co.

Martínez Luaces, V. y Cuitiño E., (2000). Estadística para Químicos: ¿Qué enseñar? Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Vol. 13, 198-204.

Martínez Luaces, V., (2002) El modelado en la enseñanza de Matemática como asignatura de servicio presentado en la VI Reunión de Didáctica de Matemática del Como Sur, Buenos Aires. Argentina. Julio. Martínez L., V. y Guineo C.., (2002). Un problema de Electroquímica y su Modelación Matemática, Anuario Latinoamericano de Educación Química, ISSN 0328 – 087X. Pp. 272 – 276.

Martínez Luaces, V., (1997). Algunas reflexiones sobre la resolución de problemas, Actas de la XI Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME 11), Morelia, México.

Martínez Luaces, V., (2001). Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones, Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Vol. 15-1, 49-54.

Martínez Luaces, V., Guineo Cobs, G. .(2002) Las EDP en problemas industriales de secado de alimentos: su resolución analítica y su transferencia al aula, III Seminario Internacional de Matemática, Física e Informática Educativa. Camagüey, Cuba.

Martínez Luaces, V., en prensa. "Mass Transfer: the other half of parabolic P.D.E." New Zealand Journal of Mathematics, Nueva Zelanda.

Mochón Simón, (1997). *Modelos matemáticos para todos los niveles*. Actas de la undécima Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, Grupo Editorial Iberoamérica, México▪

Nickerson Raymond S., Perkins David N. y Smith Edward E. (1994). *Enseñar a pensar, aspectos de la aptitud intelectual*. Editorial Paidós.

Polya G. (1976). *Cómo plantear y resolver problemas*. Editorial Trillas

Santos Trigo Luz Manuel (1997). *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas*. Grupo Editorial Iberoamérica S. A. de C. V.

LEO PERO NO COMPRENDO. UNA EXPERIENCIA CON INGRESANTES UNIVERSITARIOS

M.Rosa. Berraondo[2], Magdalena Pekolj[3], Nélida, H. Pérez y Raquel Cognigni[4]
Universidad Nacional de San Luis-Argentina
mrberr@unsl.edu.ar -mpekolj@unsl.edu.ar - nperez@unsl.edu.ar

Resumen

En el campo de la resolución de problemas matemáticos es innegable la contribución de G.Polya (1887-1985) en su obra de 1940: ¿Cómo plantear y resolver problemas?, el modelo que propone coincide en sus rasgos generales con otros descriptos más recientemente. Según este ya clásico modelo de Polya, las fases o etapas en la actividad de resolución de problemas son cuatro.

Nosotras nos detendremos en la primera etapa: "*comprender el problema*", que involucra fundamentalmente el análisis y la comprensión del texto del problema.

El análisis del enunciado tiene como función principal la elaboración y representación de las relaciones específicas del problema. Es el paso del lenguaje corriente (estado inicial del texto) al lenguaje matemático.

En general los alumnos que realizan una lectura superficial y fragmentaria del texto del problema dirigen su atención hacia algunas componentes del mismo, es posible que se detengan en los datos numéricos, sin considerar las relaciones que mantienen entre sí, y además dejen de lado condiciones y preguntas no explícitas directamente en el texto.

En este trabajo analizamos el comportamiento de los alumnos al resolver dos problemas tomados en el examen diagnostico para ingresantes a la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas y Naturales – Universidad Nacional de San Luis, República Argentina (2002). Se pone en evidencia la influencia de las componentes semántica y sintáctica y de la estructura lógica del enunciado del problema en la determinación de la solución o de la vía de solución elegida.

Presentamos consideraciones sobre las dificultades encontradas, ejemplificamos dichas situaciones y finalmente emitimos algunas conclusiones.

Introducción:

- Hacer matemática es ante todo resolver problemas.
- "La solución de un problema no surge nunca de la nada, depende siempre de la experiencia precedente del sujeto" (R.M.Gagne en *Las Condiciones del Aprendizaje*).

Estas afirmaciones, a las que adherimos nos han movilizado a realizar la presente investigación con la intención de conocer las capacidades para resolver problemas que traen los alumnos.

La resolución de problemas es de naturaleza sumamente compleja considerada como proceso cognitivo es decir en relación con el esclarecimiento de diferentes facetas, propiedades, características cuantitativas de los objetos, procesos o acontecimientos descriptos en el enunciado del problema, como también si se la considera desde el punto de vista de su estructura interna, es decir, del sistema de pasos o etapas que debe realizar el alumno al solucionar un problema matemático con texto.

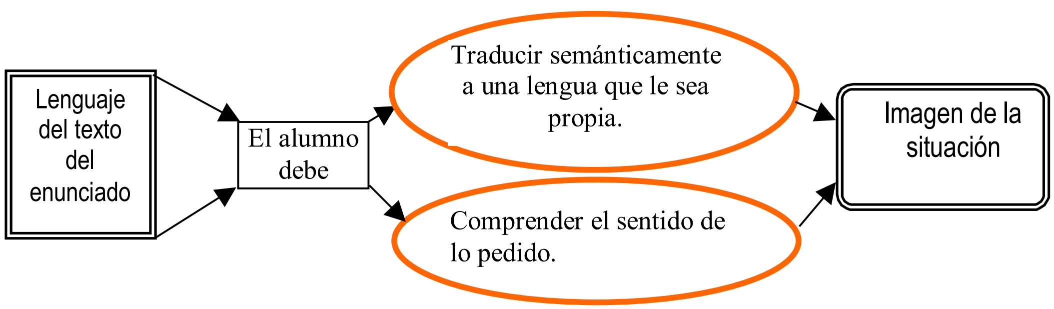
---

[2] Integrante del Proyecto de Investigación "Políticas de evaluación y las prácticas de los docentes universitarios.
[3] Integrante del Proyecto 'El rol del aprendizaje conceptual de la matemática y la física en el rendimiento de los alumnos ingresantes a carreras de ciencias e ingeniería de la UNSL'.
[4] Integrante del Proyecto de Investigación "Teoría de Juegos/Elección social"

Según el ya clásico modelo de Polya, las fases o etapas para la resolución de problemas son:
1:Comprender el problema. 2: Idear un plan para encontrar la solución. 3: Seguir el plan. 4: Examinar la solución obtenida.
El carácter flexible y dinámico de las etapas está en íntima correspondencia con su consideración como actividad cognoscitiva y como proceso.
Nos detendremos en la primera fase **comprender el problema** o sea el análisis del texto o del enunciado, la cual determina en gran medida el destino del resto de las etapas de la solución.
El análisis del texto conduce a que el alumno forme una representación de lo que relata el enunciado, de la situación que se presenta y de las relaciones cuantitativas que se destacan en el texto del problema.
¿Por qué los alumnos no saben, o no pueden resolver problemas?
Estamos convencidas que el conflicto se produce antes de intentar una solución, la mayoría de las veces no tiene que ver con los procedimientos matemáticos a emplear, se da en la primer fase: el alumno lee el texto, pero no lo comprende.
Es decir una de las mayores dificultades reside en los aspectos lingüísticos.
El discurso sobre el lenguaje se presenta en una doble forma:

- Lenguaje del texto del enunciado.
- Lenguaje que el alumno usa para resolver el problema.

La dificultad del primer punto está íntimamente relacionada con la comprensión.
A menudo el texto no viene expresado en la lengua que espera el alumno o en una lengua suya, por lo tanto debe traducirlo a su propio lenguaje, y comprender el sentido de lo pedido para hacerse una imagen de lo que la situación problemática propone.



Es claro que se requiere una educación lingüística especial y considerable, citando a Boero del Grupo de Génova se requiere no sólo *"letras",* sino que ofrezca un *"eficaz instrumento para resolver problemas matemáticos"*
La comprensión del texto llevará a: la representación del problema usando gráficos, esquemas, tablas, etc.; y a la representación interna que recogerá no sólo los datos objetivos, sino también la complicada red de relaciones, hechos, procedimientos que esos datos producen, en realidad se convierte en una representación cognitiva donde intervienen variedad de elementos (definiciones, signos, conceptos, operaciones, relaciones funcionales, lenguaje algebraico, etc.) el que resuelve debe pasar al modelo matemático y lograr la representación simbólica.

El defecto de interpretación del alumno puede ser, puramente lingüístico o en el paso de la lectura a una modelización del contexto, donde estarán presente sus experiencias y concepciones anteriores.
Teniendo en cuenta Nesher P.A. (1980, "The Stereotyped nature de word problems" y estudios más recientes D'Amore B. (1992), consideramos la influencia de tres componentes que entran en acción a la hora de analizar enunciados de problemas.
La componente semántica, es decir el significado de los términos que aparecen en el enunciado.
La componente sintáctica, es decir la organización del texto, las funciones de las palabras (sujeto, verbo, conectivos, etc.) y el modo en que se combinan para producir el mensaje
La estructura lógica del texto del problema, en ella intervienen varias componentes: los datos (exceso, falta); las operaciones matemáticas que involucra; la imagen mental que produce la situación en el lector, el nivel de contenido.
Cuando hablamos del análisis del problema nos estamos refiriendo al complejo proceso a partir del cual, y en el curso del cual se obtiene como producto el conocimiento cada vez más profundo y completo de las relaciones contenidas en el problema.

Experiencia:
Instrumento: Prueba Diagnóstico de Matemática. Se analizan los dos problemas con texto que formaban parte de la prueba que constaba además de 20 ítems de opción múltiple. Los enunciados fueron tomados textualmente de libros de circulación corriente. Se eligieron problemas de geometría dado que ella es la gran ausente de la escuela argentina en las clases de matemática.
Población:
Tres grupos de alumnos ingresantes a la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas 2002:
A: aspirantes a Técnico Universitario en Microprocesadores y Profesorado en Tecnología.
B. aspirantes a Licenciatura y Profesorado en Matemáticas y Física.
C: aspirantes a Licenciatura en Computación.

Alumnos que intentan los problemas		
Cantidad de pruebas Grupo A	136	
Intentan Problema 1	50	36.8 %
Intentan Problema 2	15	11 %
Cantidad de pruebas Grupo B	88	
Intentan Problema 1	38	43.2 %
Intentan Problema 2	14	16 %
Cantidad de pruebas Grupo C	197	
Intentan Problema 1	87	44.2 %
Intentan Problema 2	26	13.2 %

Enunciado Problema 1.- *Un cubo de madera de 4 centímetros de lado está pintado en toda su superficie exterior de color azul. Realizando cortes horizontales y verticales se*

obtienen 64 cubitos de 1 centímetros de lado. Determinar el número de cubitos que tienen 3, 2, 1, 0, caras azules respectivamente.
Explicar el razonamiento que realizó para obtener las respuestas.
Observaciones sobre el enunciado del problema 1:
- El problema contiene datos redundantes, ya que sabiendo que el cubo tiene 4 cm. de arista, se puede obtener los 64 cubitos que se determinan al cortar en cubitos de 1 cm.
- Las consignas no tienen igual disposición. La primera *"Determinar el .....",* figura seguida de la descripción de la situación. La segunda *"Explicar el...."* está aparte.

Pensamos que algunas de las respuestas obtenidas están relacionadas con estas observaciones de texto que encontramos al iniciar el análisis.

ANALISIS DE LAS RESPUESTAS AL PROBLEMA 1.

(1) Van directamente a los datos numéricos, caso típico de una lectura superficial y fragmentaria, , operándolos sin respetar la consigna *"Determinar el número.....",* así aparece:- los que relacionan los datos numéricos por medio de una regla de tres,- los que advierten que los datos son potencias de 2 ($4=2^2$; $64=2^6$) y proponen como solución otras potencias de 2. ($2^3=8$; $2^4=16$; $2^5=32$).- los que efectúan 6x4= 256, y no tienen en cuenta que si hay 64 cubitos, la respuesta no puede ser 256 con caras azules.El 16% de los que intentan la solución se ubican en este caso (1).

(2) Dibujan correctamente un cubo con sus divisiones y cuentan mal. Es otro ejemplo de lectura superficial, ya que no utilizan el dato control 64. Al sumar las respuestas de las caras pintadas de cubitos que tienen 3, 2, 1, 0, caras azules obtienen: 60, 32, 39, etc. Pensamos que estos errores también están asociados a la dificultad con la noción de volumen, ya que al contar tienen en cuenta solo lo visible en su esquema, tres caras, u olvidan el interior. El 30% de los que intentan la solución se ubican en este caso.

(3) Resuelven con errores, pero fuerzan la solución para obtener suma 64. Es decir comprenden el enunciado pero fallan en la obtención de la respuesta. El 7% se ubican en este caso.

(4) Grafican un cubo, y abandonan el problema. No sabe que hacer con los datos. Comprensión muy primitiva.El 15% de los que intentan se ubican en este caso.

(5) Grafican mal, evidentemente desconocen conceptos matemáticos y no manejan nociones espaciales. Por ejemplo dibujan un cuadrado de 8x8 y trazan 64 cuadraditos. Usando este gráfico un alumno da una respuesta inesperada, *dice "hay cero cubos pintados, porque lo que se pintan son cuadraditos"* . Lectura muy fragmentaria, ya que el enunciado indica contar cubitos de 0,1,2,3 caras pintadas de azul. Otros dibujan un tetraedro.Aproximadamente el 5 % se encuadra en este caso.

(6) Resuelven correctamente el 27 % de los 175 alumnos que abordaron el problema.

Con respecto al análisis lingüístico del texto, observamos que dice <u>lado</u> en lugar de arista, pero, no apareció ninguna situación que nos hiciera pensar que fue un distractor, ya que el sujeto de la oración es la palabra cubo.

El hecho de que confunden cuadrado con cubo, no parece estar ligado al término lado.

Evidentemente el problema1, resultó más atractivo que el 2. Generó mayor motivación, lo abordaron más alumnos, estimamos que es debido a que se trata de un texto que induce a la representación de algo concreto: "un dado" , "un cubo mágico", algo conocido por muchos.

Enunciado Problema 2.- *Sobre los lados de un triángulo rectángulo isósceles de cateto **b**, se construyen hacia el exterior, tres cuadrados; se unen los centros de los tres cuadrados con líneas rectas. Calcular el área del triángulo obtenido al unir los centros de los tres cuadrados.*

<u>Observaciones sobre el enunciado del problema 2:</u>

Una interpretación correcta del enunciado conducirá a la representación geométrica de la situación donde se reflejen las condiciones planteadas, llevando a lenguaje algebraico las relaciones que se visualizan, puede obtenerse la solución con relativa facilidad.

Como expresáramos en la introducción, la interpretación del texto está ligada al significado de las palabras, cada significado trae aparejado el conocimiento matemático del concepto que involucra dicho término; así en ese sentido en este problema podemos destacar las siguientes frases y términos:

Triángulo rectángulo isósceles.
Sobre los lados de un triángulo rectángulo.
Cuadrado.
Centro de un cuadrado.
Area del triángulo.
Cateto.

Este problema, a diferencia del primero, presenta:

- ✓ Un lenguaje más técnico (no tan cotidiano).
- ✓ Una situación geométrica pura.
- ✓ Ausencia de datos numéricos.

Estas características hacen que el número de alumnos que lo encara sea menor.

ANALISIS DE LAS RESPUESTAS AL PROBLEMA 2.

Lo interesante del análisis es observar las respuestas de aquellos alumnos que intentaron la solución, aunque sea presentando un gráfico.

(1)

Llama la atención la interpretación que los alumnos han hecho de la palabra *“sobre”* y se refleja en los gráficos.

Para algunos *“sobre”* significa una superposición de figuras como si las recortara y las encimara. Muestra una comprensión muy primitiva de la situación, denotando una lectura superficial y fragmentaria, ya que no perciben la frase completa *"Sobre los lados.......se construyen hacia el exterior, tres cuadrados".* Figuras 1.a y 1.b.

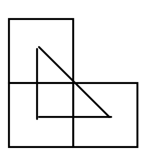


Figura 1.a (12%)

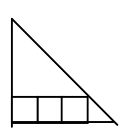


Figura 1.b (4%)

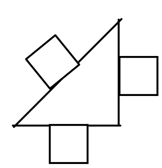


Figura 1.c (8%)

Otros interpretan el *"sobre"* como cuadrados apoyados sobre los lados, pero no hacen coincidir las medidas de los lados del triángulo con las de los cuadrados. Sigue siendo un razonamiento primitivo, ya que si no conoce la relación entre los lados de los cuadrados y los lados del triángulo no hay camino de solución posible. Figura 1.c.

- Encontramos también la interpretación de *"sobre"* como próximo. Figura 1.d

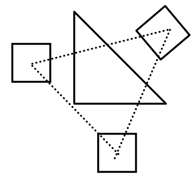
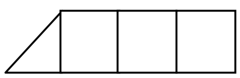
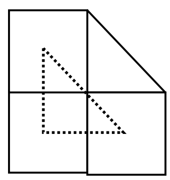
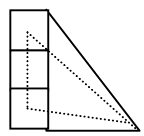


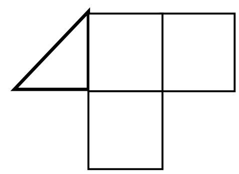
Figura 1.d (4%)

(2)
Otra dificultad que aparece es que no se entiende *"sobre los lados"* como equivalente a decir, "sobre cada lado". Además, algunos de los dibujos nos sugieren que los alumnos piensan que la hipotenusa no es lado, porque no dibujan un cuadrado sobre ella. Caso (2) un 14%.

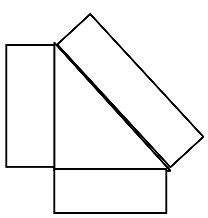


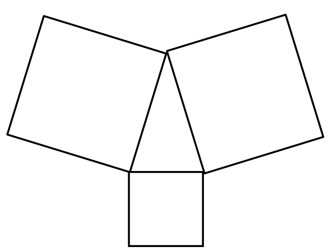






(3)
En muchos casos el obstáculo para la comprensión lo constituye el desconocimiento del significado geométrico de algunos términos
a) Hacer rectángulos en lugar de cuadrados.
b) Dibujar el triángulo isósceles estereotipado olvidar que es rectángulo.
c) Dibuja un triángulo rectángulo ignorando que los catetos son iguales.





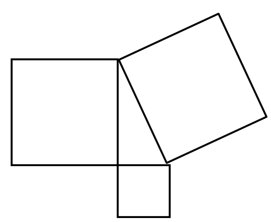


Figura 3.a (8%) Figura 3.b (12%) Figura 3.c (12%)

(4)
El 24% grafica bien pero no expresa ninguna relación algebraica. Pensamos que el hecho de no tener datos numéricos inhibe a operar y utilizar el Teorema de Pitágoras. Teniendo un buen gráfico era posible otra vía de solución más sencilla utilizando propiedades de área de triángulos. Pero ningún alumno intenta este camino.

(5)

El 12% grafica bien y escribe la formula de la superficie del triángulo sin lograr resolver, comprende el enunciado, aunque no visualiza la relación entre los datos del problema y los elementos del triángulo obtenido al unir los centros de los cuadrados. (6)
Resuelve bien el 4%.

Observación: La suma de estos porcentajes es mayor que 100, ya que por ejemplo un alumno que interpreto mal el termino sobre y además dibujó un triángulo isósceles no rectángulo, esta contado dos veces.

Conclusion

Pudimos comprobar como afirma Piaget, que *los errores no son fruto del azar, responden a una organización determinada del pensamiento, no hay detrás de los errores ausencia de conocimiento, sino otro conocimiento que hace que ellos sean sistemáticos, es por eso que las respuestas revelan una actividad auténtica del pensamiento en desarrollo*. El problema 2, fue tomado en 1992 a un grupo de estudiantes de 5to. Año y los errores de interpretación fueron equivalentes.
Por otra parte analizar las producciones de los alumnos puso en evidencia:
La pluralidad de puntos de vista posibles sobre un mismo objeto matemático y las concepciones desarrolladas por los alumnos a propósito de una noción.
El análisis realizado por el equipo, nos permitió iniciar la actividad de resolver problemas en el curso de precálculo (primer cuatrimestre de los alumnos de la Facultad) poniendo especial énfasis en la etapa de comprensión del enunciado, para luego incitarlo a modelar la situación y aplicar las estrategias y conocimientos apropiados.
Para contrastar lo ocurrido en el diagnóstico, trabajamos el problema 2 con el grupo B de alumnos (en una clase práctico). Los estudiantes se organizaron en grupos de discusión de tres o cuatro integrantes. Aparecieron nuevamente algunas de las interpretaciones mencionadas, pero como ya conocían el problema e intercambiaban ideas en el grupo, se obtuvieron mejores resultados. Aparecieron algunas soluciones tomando casos particulares (cateto b=1) que en la situación de examen no había ocurrido.

Bibliografía

Almeída, Alvarez y otros (1995).*Metodología de la Enseñanza de la Matemática,. Cuba*

Guzmán, M. de**.** (1991). *Para Pensar Mejor*". Edit. Labor.

Guzmán, M. de**.** (1992). *Tendencias innovadoras en Educación Matemática*. OMA

Labarrere Sarduy A**.** (1987), *Bases psicopedagógicas de la enseñanza de la solución de problemas matemáticos en la escuela primaria".* Edit. Pueblo y Educación.

Mason-Burton-Stacey**.** (1989), *Pensar Matemáticamente*. Edit. Labor.

Polya G**.** (1989). *¿Cómo Plantear y Resolver Problemas,*. Edit. Trillas. Integrante del Proyecto de Bruno D`Amore. (2000) *PROBLEMAS, Pedagogía y Psicología de la matemática en la actividad de resolución de problemas.* Edit. Sintesis.

PÉREZ N. & CERIZOLA N. (1999) *LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS, SU RELACIÓN CON LAS PRÁCTICAS DOCENTES,*

MATHDEV: SITIO WEB COMO PLATAFORMA PARA LAS MATEMÁTICAS SUPERIORES

Lázaro Dibut Toledo, Ernesto R. Fuentes, Narciso R. De León Rodríguez
Universidad de Cienfuegos "Carlos Rafael Rodríguez", Cuba.
ldibut2001@yahoo.es

Resumen

El presente trabajo colaborativo entre el Instituto de Investigación y Desarrollo Educativo de la Universidad Autónoma de Baja California, México, el CETYS de Ensenada, México, y la Universidad de Cienfuegos "Carlos Rafael Rodríguez", Cuba, en las personas de los autores, consiste en la descripción del Examen de Ubicación de Matemáticas (EXUMAT), en su versión 2.0, para administrar a los estudiantes que recién ingresan a la Universidad Autónoma de Baja California (UABC). El examen está fundamentado en la Teoría de Respuesta al Ítem (TRI) con el modelo de dos parámetros. Los propósitos del trabajo son: 1) describir la metodología seguida para la confección del Examen de Ubicación de Matemáticas (EXUMAT) en su versión 2.0, y 2) analizar e interpretar los resultados del EXUMAT 2.0 administrado como prueba piloto a los estudiantes de la preparatoria del CETYS de Ensenada en la primavera de 2002.

Introducción

La idea sobre la utilización de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) con fines educativos ha tenido un desarrollo vertiginoso entre los profesionales de la Educación, muy particularmente entre los especialistas en Informática Educativa. Es un término que no surge por pura idealización de necesidades, la necesidad de mejorar en este sentido siempre ha existido. Pero en la actualidad es donde toman más fuerza las TIC y más esfuerzos se destinan con este fin. Podríamos preguntarnos entonces: ¿qué ha llevado a esta idea tan definitiva y generalizada en el mundo de hoy, y qué ha hecho que se tome con tanta seriedad?. Existen dos cosas de las cuales se habla mucho: el nivel alcanzado en el desarrollo tecnológico y la idea de repensar la enseñanza. ¿Qué aparece primero: el desarrollo tecnológico obligando a acelerar y mejorar el proceso de enseñanza en el hombre, o acaso el nivel adquirido por el hombre ha hecho que el desarrollo tecnológico suceda tan aceleradamente? Estas dos cuestiones no pueden separarse, una ha llevado a la otra y a la vez ambas se interrelacionan. Sin el nivel de conocimientos adquiridos tal vez no se hubiera llegado a la computadora, y sin la computadora es muy probable que no se pueda acelerar, de la forma en que necesita la humanidad, el aprendizaje de los conocimientos que son base del desarrollo futuro. Es decir, la computadora puede verse como una causa y efecto del desarrollo tecnológico.

En esta dirección de utilización de las TIC en la enseñanza y como parte del Proyecto de Investigación "Desarrollo de recursos informáticos de apoyo a la enseñanza de las Matemáticas en las carreras de Ciencias Técnicas y Económicas soportados en las Nuevas Tecnologías de la Información y la Comunicación", que ejecuta el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Cienfuegos "Carlos Rafael Rodríguez" (Ucf), se desarrolló e implementó en la red de la Ucf el sitio web MATHDEV como plataforma donde están incluidos los principales temas de las matemáticas superiores: límite y continuidad de funciones, derivación de funciones, integración de funciones, ecuaciones diferenciales, métodos numéricos y álgebra lineal. Entre otros fueron consultados los trabajos de Artigue (1996) y Brosseau (1986). El objetivo del presente trabajo es caracterizar el sitio web MATHDEV como plataforma para el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas superiores. El autor principal del presente trabajo desarrolló su trabajo de tesis doctoral utilizando como plataforma el sitio web MATHDEV en el tema "límite y continuidad de funciones".

Caracterización del espacio web MathDev.

La caracterización del espacio web MathDev está basada en los siguientes aspectos: ***Clasificación, modelo psicopedagógico y los módulos o partes funcionales del mismo***. Para la ***clasificación*** del espacio web MathDev tuvimos en cuenta las valoraciones hechas al respecto por Khan (1998). Atendiendo a estos planteamientos, el espacio web MathDev lo clasificamos en una WBI de tipo tutorial. Por un lado, MathDev es una WBI puesto que contiene varios medios (textos, gráficos, animaciones, etc.) y utiliza los recursos y atributos de Internet para lograr determinados objetivos de aprendizaje Está orientado a temas específicos donde el objetivo de su utilización está bien definido: "herramienta en el proceso de enseñanza-aprendizaje de los contenidos que se explicitan". Los usuarios tienen la posibilidad de validar los conocimientos que van adquiriendo o consolidando. Esta validación consiste en evaluaciones que diseña el profesor y que aplica a los estudiantes, o bien a través del módulo de evaluación que contiene MathDev o en el examen final de la asignatura. El ***modelo psicopedagógico*** que sustenta a MathDev refleja las concepciones de los autores sobre la enseñanza y el aprendizaje en general y de las matemáticas en particular, considerando tres factores: el diseño del mismo, el papel del sujeto ante el aprendizaje, y el contexto de aprendizaje. Basado en estos factores y tomando en consideración las diferentes teorías y enfoques analizados (Dibut, 2000, pp. 164-174), la WBI MathDev la enmarcamos en un modelo constructivista mediacional. Este modelo se nutre del constructivismo de Piaget, del aprendizaje significativo de Ausubel, de las aportaciones de Papert en el uso de ordenadores en situaciones de aprendizaje, y a las aportaciones de Vygotsky y su escuela histórico-cultural, muy en particular los conceptos de acción mediada, internalización y zona de desarrollo próximo.

Módulos o partes funcionales de MathDev:

El Módulo de Autentificación. Es la puerta de entrada al sitio web MATHDEV. En este módulo es donde se definen, de acuerdo al usuario y al tipo que visita el Sitio, los permisos a los demás módulos y por tanto las operaciones y actividades a las que tendrá acceso. El tipo de visitante al que se hace referencia puede ser "ALUMNO" o "PROFESOR". El primero tendrá acceso al Módulo de Contenidos, a los sub-módulos de Aplicación de Exámenes y Buzón de Calificaciones del Módulo Evaluativo, también podrá visitar el Módulo de Búsquedas. Los usuarios de tipo "PROFESOR" tienen acceso a los mismos módulos que el primero, además de acceder al Módulo de Gestión y a los sub-módulos para la Creación o Edición de Exámenes y al de Calificación, todos del Módulo Evaluativo. El sitio posee un usuario del tipo "PROFESOR" con características especiales denominado "Administrador". En cuanto a seguridad se refiere, continuamente se chequea en cada entrada a los módulos o nodos del sitio, si previamente se ha autentificado en el Módulo de Autentificación, y por tanto, si están definidos y asignados los derechos y accesos en el sitio; de lo contrario, se recibirá un mensaje informándole que no posee permiso para la operación que intentó realizar.

Módulo de Búsquedas. Está constituido por una página, la cual contiene un formulario. En dicho formulario aparece un cuadro de texto y dos botones con las etiquetas, "Iniciar *búsqueda" y "Borrar", respectivamente. Se utiliza dicho formulario para buscar en el sitio web documentos que contengan palabras o combinaciones de palabras. El sistema de búsqueda de texto mostrará una lista de documentos que las contengan, con las coincidencias más relevantes en primer lugar. Cada elemento de la lista es un vínculo al documento que contiene el texto buscado; si el documento tiene título lo mostrará primero; si no, sólo mostrará el nombre del archivo. En el cuadro de texto antes mencionado, el usuario pondrá el texto estático que desee encontrar auxiliándose para ello de un sencillo lenguaje de consulta.*

Módulo de Contenidos. En este módulo (ver anexo 1) Ud. encontrará las principales definiciones, teoremas, ejemplos resueltos, orientaciones metodológicas, gráficas de funciones, algunas de ellas con animación, de los contenidos matemáticos incluidos en el sitio. En la pantalla principal del presente módulo están incluidos todos los enlaces generales vinculados con el contenido, los cuales son:

Temas: Relación de los temas que abarcan todo el contenido.
Capítulos: Relación de los capítulos donde están incluidos los temas.
Lecciones: Relación de las lecciones que tiene cada capítulo.
Índice Temático de Contenidos*:* Relación de los índices temáticos por contenidos.
Índice Temático de Figuras: Relación de todas las figuras incluidas en el sitio, que incluye gráficas de funciones y esquemas, estáticos o animados.
Bibliografía: Relación bibliográfica de alguno de los libros más importantes de Matemática donde están incluidos estos contenidos.

El Módulo Evaluativo. Es el lugar donde los profesores diseñan y editan los exámenes, los estudiantes se evalúan o revisan la calificación obtenida en un examen y los profesores califican los exámenes aplicados a los alumnos. Este módulo se compone de tres sub-módulos: ***Sub-módulo para el diseño y edición de exámenes***: está destinado a crear exámenes o editar otros existentes por parte de los visitantes de tipo *"PROFESOR"*. (ver anexo 2). ***Sub-módulo para la aplicación de exámenes***: bajo la orientación del profesor, los alumnos seleccionan un examen basado en su código y contraseña. Con está información brindada al sitio, los alumnos comenzarán a responder las preguntas del examen, guardándose las respuestas en una base de datos. ***Sub-módulo para la calificación de exámenes***: en este sub-módulo el profesor seleccionará un examen aplicado y resuelto por un estudiante, basado en el código y contraseña del mismo. A continuación aparecerá una ventana con las preguntas del examen y las respuestas a las preguntas elaboradas por el profesor y las del estudiante, respectivamente. De esta manera el profesor podrá calificar el examen y salvar en una base de datos la calificación obtenida por el estudiante.

*Módulo de Administración del Sitio**.** A este módulo solamente podrá tener acceso el usuario de tipo "PROFESOR" denominado "Administrador"; en este caso podrían ser el Administrador de la Red de la Institución donde se implemente MATHDEV o el Webmaster. Es aquí donde se agregan o se editan las cuentas de los usuarios que podrán visitar el sitio.*

El Módulo de Gestión. Constituye una herramienta, donde el profesor, según criterios de selección, podrá gestionar y clasificar la información sobre varios indicadores, por ejemplo: el tiempo de conexión al Sitio de un estudiante o grupo de estos, el tiempo invertido en la realización de un examen, frecuencia de visitas a las páginas del contenido teórico, etc. El mismo está compuesto por tres sub-módulos que detallamos a continuación: ***Sub-módulo de estadísticas generales de las visitas al sitio***:este sub-módulo (ver anexo 3) permite obtener información sobre el tiempo que han permanecido los usuarios en el sitio web MATHDEV, agrupándolos y clasificándolos según combinación de diferentes criterios, tales como: usuario, tipo, grupo, institución y fecha. También se realiza una caracterización estadística del indicador: tiempo total de conexión al Sitio. ***Sub-módulo de estadísticas generales de las visitas a las páginas del contenido***: se utiliza para obtener una información detallada sobre la frecuencia de visitas a los diferentes nodos o páginas del contenido teórico, agrupándolos y clasificándolos a través de consultas a las bases de datos asociadas al sitio, según combinación de diferentes criterios, como: usuario, tipo, grupo, institución, página y fecha. ***Sub-módulo de estadísticas de las evaluaciones realizadas a los estudiantes***: se utiliza para obtener una información detallada sobre los resultados de las evaluaciones realizadas por los estudiantes y el tiempo invertido en la realización de éstas, agrupándolos y clasificándolos según combinación de diferentes criterios, como: usuario, tipo, grupo, institución y fecha. Al igual que en el primer sub-módulo, se realiza una caracterización estadística, en este caso de los indicadores: tiempo invertido en el examen y calificación obtenida.

Conclusiones

La etapa actual de desarrollo no puede ignorar el impacto de las Tecnologías de la Información y la Comunicación en los diversos campos de la vida social. La escuela en general y la Universidad en particular, están en la obligación de desarrollar el proceso docente educativo introduciendo racionalmente estas tecnologías. Desde el primer año, cuando el joven se encuentra en el proceso de adaptación a la Educación Superior, las disciplinas del ciclo básico deben educar en ellos una filosofía de uso consciente de la computadora, ya sea como medio, herramienta u objeto. Cada carrera debe actualizar, continuamente, su estrategia para el uso de la computación, en base a las exigencias del tipo de profesional que está formando y los medios materiales de que dispone.

Los resultados más relevantes del trabajo se resumen en :

1. El sitio web MathDev es una WBI de tipo tutorial sustentada en un modelo psicopedagógico constructivista mediacional.
2. Se desarrolló e implementó un sitio web con un esqueleto funcional que permite adaptarlo a cualquier tipo de sitio, ya sea educativo, comercial, etc; el cual se basa en consultas y sentencias SQL a bases de datos.
3. El sitio web MATHDEV permite hacer un tratamiento de los contenidos básicos de las Matemáticas Superiores, caracterizados por una red de nodos o páginas relacionadas entre si a través de hipervínculos. Se introdujeron algunos elementos de animación y sonido.
4. Crea un marco donde involucra a estudiantes y profesores en un nuevo y novedoso ambiente para el intercambio y adquisición de cualquier tipo de información; proporcionando al alumno un medio de aprendizaje autodidacta, interactivo y ameno sobre el contenido en cuestión, y al profesor un auxiliar en el proceso de evaluación del aprendizaje alcanzado por los alumnos del contenido.

5. El sitio web MATHDEV constituye una herramienta de apoyo para la realización de investigaciones pedagógicas enfocadas al uso y explotación de sitios web con fines docentes.

Bibliografía

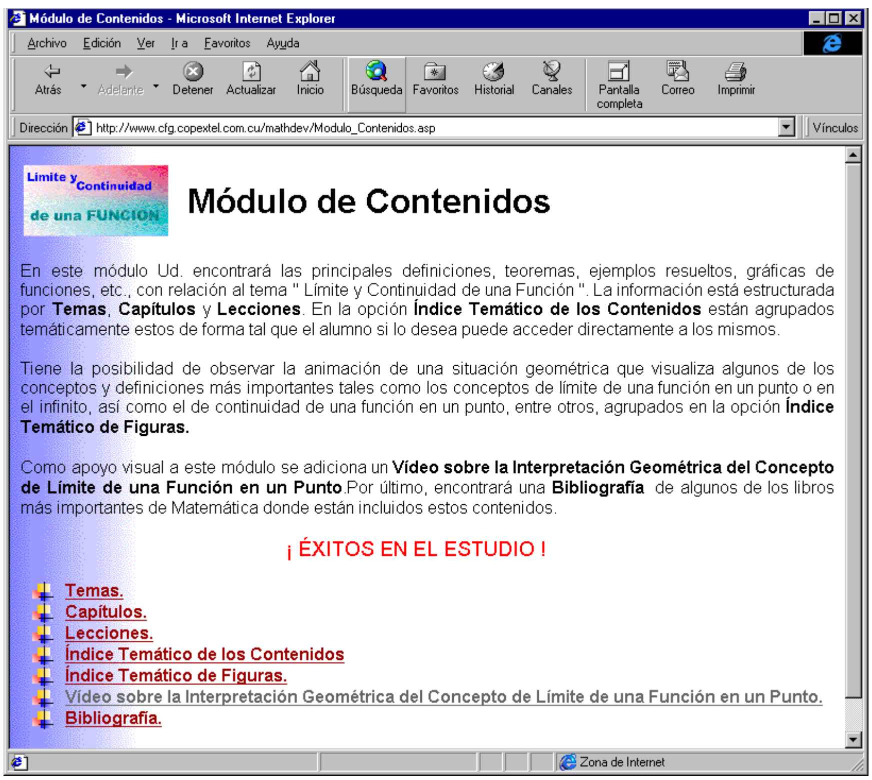
Artigue, M. (1996). Teaching and learning elementary análisis. *8th International Congress on Mathematical Education, Selected Lectures*. Sevilla, (14-21)/july.

Brosseau, G. (1986). Fundements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), pp.33-115)

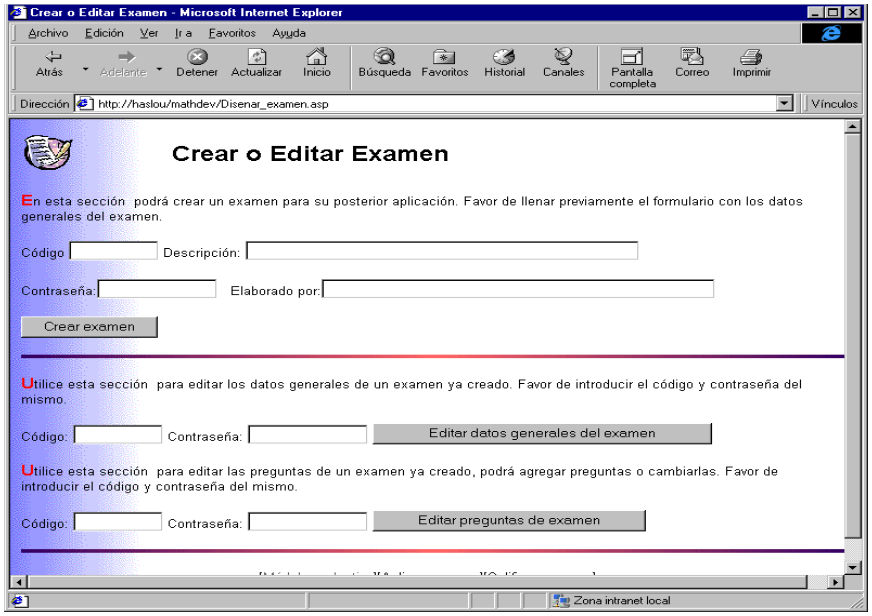
Dibut, Toledo, L.S. (2000). *El espacio web MATHDEV como herramienta en el proceso de enseñanza-aprendizaje del límite y continuidad de funciones.* Tesis Doctoral. Universidad de Oviedo, España.

Khan, B. (1998) (Eds.). *Web-Based Instruction*. Educational Technology Publications, Inc. Englewoods Cliffs, New Jersey

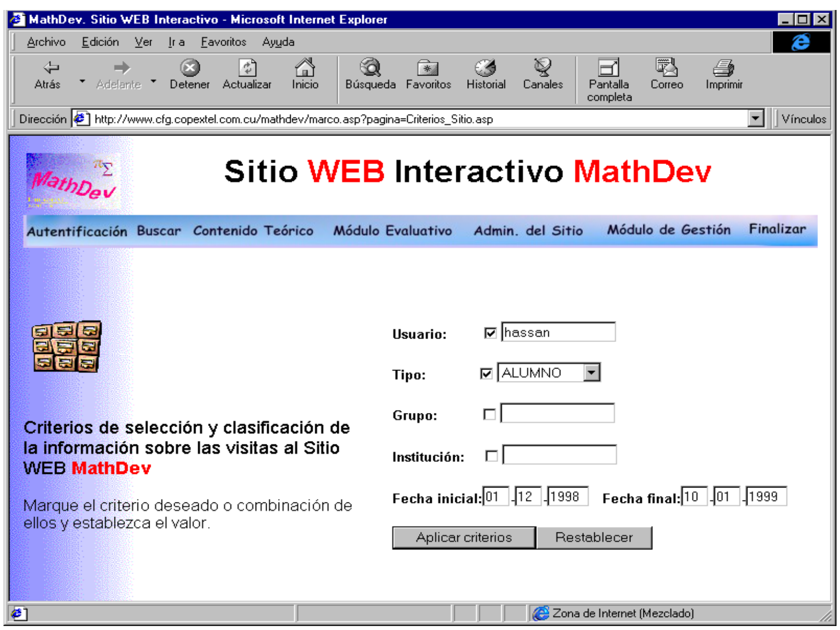
ANEXO 1: MÓDULO DE CONTENIDOS



ANEXO 2: SUB-MÓDULO DE CREACIÓN Y EDICIÓN DE EXÁMENES



ANEXO 3: SUB-MÓDULO DE ESTADÍSTICAS DE LAS VISITAS AL SITIO



ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS DE UNA EXPERIENCIA DIDÁCTICA INTERDISCIPLINARIA

Lidia Esper, Ma. del Carmen Pérez, Julio F. Zagarese
Fac. de Cs. Naturales e I. M. Lillo- U. N.T.; Liceo Militar G.A. de la Madrid- Argentina.
liesper@yahoo.com.ar, marype@csnat.unt.edu.ar

Resumen

En este trabajo, nos hemos abocado a investigar si mediante una propuesta didáctica en el tema de Funciones y Gráficas, los alumnos presentaban un cambio de actitudes hacia las ciencias. En base a resultados obtenidos, en trabajos anteriores, se realizó esta experiencia con alumnos de Educación General Básica (EGB) donde tenían que resolver problemas, utilizando la metodología científica, a fin de contribuir a la articulación vertical y horizontal entre las diferentes asignaturas, y estimular el desarrollo de capacidades para el trabajo grupal. Se hizo un seguimiento de los estudiantes que cursaron la asignatura de manera tradicional y los involucrados en la experiencia, para analizar si de algún modo habían mejorado sus concepciones sobre la ciencia. La metodología aplicada se ha mostrado adecuada a nuestro objetivo, porque nos ha permitido analizar estrategias a través de estudio de las respuestas de los alumnos. Los resultados muestran las diversas facetas para las que se han producido cambios en el sentido deseado en dos grupos (G1 y G2), pero ponen de manifiesto también la existencia de algunos núcleos de dificultad que todavía no han podido superar.

Introducción

En las tareas docentes resulta habitual planificar un curso observando el programa y distribuyendo los temas teóricos, casi siempre en forma lineal, y de acuerdo a estos, los ejercicios prácticos correspondientes. Estos ejercicios, calificados o no, no tienen para el estudiante otra motivación que la de adquirir destrezas que le permitan aprobar la asignatura. A su vez para el docente, estos ejercicios son simples aproximaciones, de nivel cada vez más exigentes, que culminan en los ejercicios de examen. Finalmente, el docente da por cumplida su labor con la clasificación del alumnado en aprobados y no aprobados.

Parecería que, al menos en las experiencias tradicionales, el objetivo de lograr la motivación, la creatividad, la experimentación, y el placer de descubrir uno mismo, nada tiene que ver con el otro objetivo que consiste simplemente en saber quienes están en condiciones de aprobar el curso, al haber logrado el adiestramiento necesario (Pérez Carmona y Esper, 2002).

En las últimas décadas surge la idea de que las personas seleccionan, asimilan, procesan y confieren significados a los estímulos dejándose atrás la idea de seres humanos fáciles de moldear y dirigir desde el exterior. Desde el punto de vista educativo, la adopción de esta perspectiva, cuyo origen está en la explicación psicológica de los nuevos enfoques cognitivos, supone un cambio radical en la manera de entender el proceso de enseñanza – aprendizaje. Frente a la concepción tradicional de que el aprendizaje del alumno depende casi exclusivamente del comportamiento del profesor y de la metodología de enseñanza utilizada, se pone de relieve la importancia de lo que aporta el propio alumno al proceso de aprendizaje (Wittrock, 1986): conocimientos, capacidades y destrezas previas; percepción de la escuela, del profesor y de sus actuaciones; expectativas y actitudes ante la enseñanza, la escuela y el profesor; motivaciones , intereses, creencias y atribuciones; etc. La actividad constructiva del alumno aparece de este modo como un elemento mediador de primera importancia entre la influencia educativa que ejerce el profesor, por una parte, y los resultados de aprendizaje, por otra.

En las currículas de ciencias, las estrategias de reforma de la educación científica consisten en llevar a cabo un enfoque práctico tendiente a perfeccionar las habilidades de los estudiantes para la indagación. Pero se olvidan del razonamiento contextualizado y las habilidades de comunicación necesarias para entrelazar conjunta y coherentemente las pretensiones de conocimientos de la ciencia (Kunt, 1993).

Estas curriculas deberían tener en cuenta que la educación general media ha de suministrar al estudiante los conocimientos que en la Universidad le van a exigir. En consecuencia, los programas han de adaptarse a las necesidades actuales para el ingreso y la permanencia en estudios de grado y para que los jóvenes puedan insertarse en la sociedad con un discurso coherente. Es necesario tener en cuenta, además, que sus actuaciones futuras estarán impregnadas de sus esquemas conceptuales que, sin duda, pautarán su actuación en diferentes contextos.

Las estrategias que se proponen a los estudiantes para aprender, no logran despertar su interés y entusiasmo en forma suficiente. Existe un desbastador problema educativo de la falta de motivación y de la falta de habilidad para aplicar la matemática como una herramienta de interiorización personal y de resolución de problemas. Si se desea formar jóvenes capaces de asumir el compromiso de desarrollar tareas creativas e innovadoras, es preciso no tan solo instrumentar mecanismos de enseñanza que garanticen algo más que la sola transmisión de conceptos y métodos, sino también actitudes de cooperación, dedicación, voluntad de trabajo, buena disposición para responder a estímulos, afán de superación, etc.

En trabajos anteriores (Esper y otros, 2002; Pérez Carmona y Esper, 2002) se diseñaron actividades con situaciones problemáticas en donde los alumnos tenían que utilizar los conocimientos adquiridos en Matemática y Física entre las distintas áreas del currículo, para lograr una aproximación mucho más adecuada al trabajo científico. Siguiendo esta línea de trabajo se decidió realizar la experiencia con alumnos de nivel medio ya que, de la misma manera que los universitarios de los primeros cursos de carreras para no matemáticos, los alumnos manifiestan su inquietud acerca de la utilidad de esta disciplina. En el afán de los docentes por explicarle su aplicabilidad surgió en el aula el desafío de contrastar lo planteado por los profesores.

Marco teórico

En este estudio se intenta mostrar la relación y/o integración de dos significados actuales:

a) la construcción del significado y el papel del contenido; que parte de la idea que el conocimiento es un conjunto de experiencias cognitivas y psicomotoras que contribuyen a engrandecer al individuo en la cual, la Teoría del Aprendizaje Significativo es parte integrante (Ausubel, 1978; Moreira, 1990) y b) la integración de lo individual y social que propone la integración del individuo como ser racional dentro de un contexto social. Si se considera la ciencia como una construcción humana, el aprendizaje es considerado como un proceso de elaboración colectiva en el que se confrontan ideas, se intercambian argumentaciones, se negocian y consensuan significados (Vygotsky, 1989).

Como Vygotsky, Ausubel señala que la reestructuración que se produce debido a la interacción entre la organización del conocimiento y la nueva información no se da espontáneamente sino que se necesita de una instrucción formalmente establecida. Resalta el rol de guía del profesor como facilitador del aprendizaje, en contraposición a las adquisiciones dispersas del trabajo autónomo.

Enmarcados en este enfoque, es innegable entonces que considerar al estudiante como protagonista de su propio aprendizaje en un proceso de elaboración colectiva en donde tenga la oportunidad de participar, colaborar, discutir y defender sus propias ideas, como darles la oportunidad de producir en correspondencia con sus posibilidades; permitiéndoles identificar, formular y resolver sus propios problemas, constituye una parte muy importante del aprendizaje.

Metodología

Con el objeto de investigar si mediante la aplicación de una estrategia didáctica, los alumnos tienen un cambio de actitudes hacia las ciencias, se trabajó con un grupo de 30 estudiantes del tercer ciclo de la Enseñanza General Básica durante 4 meses del ciclo lectivo de 2002.

Los resultados del análisis de esta experiencia se obtuvieron en base a un estudio donde participaron tres docentes. Los días que se reunían, profesores y alumnos, se grababan las encuestas, lo cual permitió realizar una categorización de la problemática y los logros de los estudiantes.

Se trabajó dividiendo al grupo en dos subgrupos, que en adelante se denominarán grupo 1 (G1), y grupo 2 (G2) respectivamente. El G1 trabajó tan solo de manera tradicional, resolviendo los problemas planteados por los profesores donde se incluían aquellos motivo de estudio, el G2 también resolvió los mismos problemas y otros, seleccionados por los profesores para la experiencia, que fueron propuestos en horarios extraclase. El tema estudiado fue Funciones y sus Aplicaciones.

Se presentan los resultados obtenidos de la aplicación y análisis de algunas situaciones problemáticas, mediante las cuales se pretendían investigar los intereses e inquietudes que existían en los dos grupos de trabajo.

Presentación de la información

Se desarrolló un análisis del tipo interpretativo (Ericson, 1989) sobre los datos textuales, recogidos en las entrevistas realizadas a los alumnos en los dos grupos. El proceso de análisis se desarrolló en las siguientes etapas:

1ª) Planteo de las situaciones problemáticas (por falta de espacio no se incluye el Anexo); 2º) Lectura de las interpretaciones completas; 3º) Segmentación y codificación de los planteos; 4º) Formulación de conclusiones preliminares; 5º) Reducción de datos, identificación de categorías comparables en el discurso de ambos grupos.

Las categorías, en la Resolución de Problemas, son las siguientes: i) Contenidos Conceptuales, ii) Contenidos Procedimentales, iii) Contenidos Actitudinales, iv) Modelización, v) Estrategias.

Análisis y discusión de los resultados

Las categorías se establecieron a partir de un análisis global de los resultados de las entrevistas y se basó en la exploración de las respuestas dadas en las entrevistas por los dos grupos. Para cada una de las categorías se transcriben expresiones vertidas por los entrevistados donde las mismas fueron identificadas como:

Conceptual : G1 "...esto es física, no matemáticas, no entendemos nada"; "...están todos los temas mezclados, si me dan las fórmulas, yo los resuelvo" ; "...es imposible, faltan datos, la profesora de física nos enseña de otra manera". **G2** "... en realidad estamos

aplicando lo que hemos visto en matemáticas"; "... relacionamos los gráficos, los vemos de diferente manera"; "... razonamos más".
Procedimental: G1 ¿"...como se resuelve, no entiendo?" ; "... no tenemos las fórmulas para resolver esto" ; ".. esto no vimos en matemáticas, ¿por qué resolvemos problemas de otras materias? ".
G2: "...recién ahora entendemos como se comienza a resolver un problema" ; "... ya no importa tanto las fórmulas, primero trato de entender y después veo que formulas puedo aplicar" ; ".. lo podemos resolver de varias maneras".
Actitudinal: G1 ¿"...así van ha ser los problemas de la prueba?" ; ¿"... es obligación que "hagamos" esta parte ...?" ; "...para que nos sirve" ; "...no sé.. no lo entiendo, me da vergüenza preguntar". **G2**: "... se trabaja cómodo sin presiones" ; "... nos estamos conociendo más, discutimos y podemos decir lo que no entendemos con más confianza" ; "... nos relacionamos con docentes de los ciclos superiores... son rebuenos".
Modelización: G1 "¿...nos puede resolver algún ejercicio parecido? No modelizan. **G2:** "...en un problema podemos ver varios temas distintos, hay que interpretar la situación" . Utilizan distintos modelos para resolver una situación.
Estrategias: G1 "...nos faltan datos, imposible, no entendemos.." ; "... ya lo leí un montón de veces y sigo sin entender nada". Utilizan fórmulas, pero cuando algo no les sale ya no entienden nada, presentan grandes falencias con las habilidades de trasposición (del lenguaje aritmético al lenguaje algebraico o gráfico, etc.)". **G2** "...del gráfico podemos sacar todos los datos" ; "...sí, los tres autos tienen velocidad constante" ; "...como el espacio esta en función del tiempo, y son directamente proporcionales...entonces podemos resolverlos de varias maneras"

El grupo piloto (G2) sigue buscando información adicional en el momento de resolver un problema, información que les resulta muy natural por ejemplo, extraer de un libro, no esperan que el profesor le suministre siempre toda la información. Lo que parece más importante en el comportamiento de estos jóvenes es el cambio de actitud, se sienten involucrados en su aprendizaje.
Demandan la atención del profesor permanentemente, pero no para que el docente les resuelva los problemas, sino para evacuar dudas y constatar sus visiones alternativas, sus propios razonamientos.
Si bien se hizo un seguimiento de los dos grupos de trabajo, la muestra (pequeña) puede parecer poco significativa estadísticamente, pero los datos obtenidos durante el mismo dan elementos de juicio prometedores que nos motivan a seguir trabajando, aplicando esta alternativa didáctica.
En el G1 algunos alumnos manifiestan explícitamente que les cuesta "ver" solos el problema, el producir respuestas sin la ayuda del profesor, es una dificultad que aún no pueden superar. Son responsables y estudiosos pero esperan que el docente sea el responsable de su aprendizaje, que les suministre toda la información, no buscan en los libros o en cualquier otro medio la información que sea relevante para entender la situación problemática en cuestión.
Dos de los alumnos de G2, podemos decir que superan el nivel de información, lo cual da cuenta de un aprendizaje significativo.
En G1 hay una notoria ausencia de hipótesis de trabajo y no tienen en cuenta las relaciones entre magnitudes relevantes. En muy pocos casos se acompañan las relaciones propuestas

con una explicación del significado de las mismas. La mayoría de los alumnos hacen una utilización rígida de los conceptos y principios fundamentales, lo que los lleva a desarrollar fijaciones funcionales respecto a las estrategias, a las fórmulas, como consecuencia de asignar carácter general a estructuraciones de validez limitada.

Se observa una fuerte tendencia hacia el aspecto aritmético, esto conlleva la ausencia de reflexiones de tipo conceptual y de algunas habilidades de trasposición entre los distintos lenguajes. Pensamos que algunos procesos no están bien afianzados en la mente de los estudiantes, ya que no se está dando la transición del lenguaje aritmético al algebraico, para lo cual se requiere un alto grado de abstracción. Dicho proceso según la demanda de los sistemas educativos deben ser asimilados en muy corto tiempo, por lo cual los estudiantes se deben enfrentar con un nuevo lenguaje sin haber completado el proceso de asimilación del anterior.

Otras investigaciones recientes, relativas a la enseñanza y aprendizaje del álgebra elemental, comparten de una forma más o menos explícita un modelo que lleva a considerar que los errores que cometen los alumnos en el aprendizaje del álgebra surgen esencialmente, como consecuencias de generalizaciones erróneas de nociones establecidas en aritméticas, y una carencia de formalización adecuada de los métodos aritméticos que posibiliten una generalización en la dirección de las necesidades del álgebra, por otro lado, debemos aceptar que los estudiantes al hacer la transición entre la aritmética y el álgebra se deben enfrentar con un obstáculo de origen epistemológico, consistente en tener que desarrollar una operatividad sobre signos que poco antes se correspondían con referentes y fuentes propios del significado de la aritmética, mientras que el nuevo lenguaje que deben desarrollar presupone un cambio esencial en dichos significados. Si a esto le sumamos la dificultad de insertarlos en otro contexto se observarán errores al resolver problemas.

Desde este punto de vista debemos tratar de que los estudiantes vayan adquiriendo nuevas competencias en la matemática elemental (aritmética) que las puedan considerar como el producto de la modificación de conceptos, acciones y procedimientos. Debemos lograr utilizar nuevos extractos de lenguaje, cada vez más abstractos en el que podamos traducir situaciones más abstractas, esto es familias de problemas, antes irreducibles unos a los otros. Con estos sucesivos acercamientos podemos lograr los procesos cognitivos necesarios para lograr un aprendizaje significativo, por otro lado, estamos convencidos del carácter constructivo del conocimiento; se debe planificar una secuencia de enseñanza para que se produzca este aprendizaje, para lo cual es imprescindible tener en cuenta las estructuras cognitivas de los alumnos y la capacidad de expresión verbal de los mismos, y de este modo, poder acercarnos de una manera menos traumática a los problemas de aprendizaje.

Conclusión

Si miramos la matemática escolar como esquemas de conocimientos que los estudiantes van a construir a través de su experiencia en la escuela y la consideramos como un lenguaje, los estudiantes deberán utilizar dicho lenguaje para resolver problemas en distintos contextos y la enseñanza será el medio que debe propiciar el aprendizaje de dicho lenguaje. De esta manera vemos que, más que la construcción del concepto a concepto tendríamos que hacer reformulaciones importantes acerca de los objetos de estudio y de los fenómenos que debemos observar en el aula.

Los estudiantes no logran integrar los dos dominios de su conocimiento conformados, por un lado por el manejo sintáctico del álgebra y, por otro por la resolución de problemas. Esta integración esta condicionada por la posibilidad de construir una semántica de los símbolos y operaciones algebraicas, ligada a las situaciones que estarán presentes en los enunciados de los problemas que hay que resolver algebraicamente y/o gráficamente.
Otro factor a tener en cuenta son las actitudes o tendencias individuales existentes en los alumnos hacia "preferir" ciertos métodos de resolución, los cuales varían desde los métodos más operativos y algorítmicos, hacia los más semánticos y analíticos.
Esto se debe a que existen fenómenos de atracción de las acciones de los procesos de modelación concreta, que dependen fuertemente de las tendencias individuales y que, por lo tanto, es muy riesgoso hacer generalizaciones acerca de la evolución de ciertas operaciones de un nivel concreto hacia una forma sintáctica.
A pesar de haber trabajado, en diferentes niveles educativos, aún no podemos asegurar si la aplicación de esta experiencia será tan relevante con grupos numerosos. La duda radica en el hecho de que con esta metodología, los estudiantes demandan con sus interrogantes y razonamientos un gran esfuerzo en el profesor que constantemente debe suministrarles información relevante para ellos, sin embargo no toda la clase es así, por experiencias en el aula, sabemos que muchos grupos son apáticos, buscan realizar el menor esfuerzo posible y su único objetivo es aprobar la asignatura. Esta experiencia resultó importante desde el punto de vista didáctico ya que, el docente puede mantener un rol de orientador y guía, mientras que, es el alumno el que construye su conocimiento, que al ser dinámico e integrado, se traduce en aprendizaje significativo; estimula la originalidad, la creatividad y la reflexión sobre los contenidos a aprender.
La experiencia, focalizada desde un plano innovador e interdisciplinario, permite la construcción de escenarios que harán significativas la aplicación de la Matemática y otras disciplinas que demandan curriculas profesionales específicas. Privilegia las competencias endógenas y las aptitudes que habilitan para continuar aprendiendo mucho más que la entrega de contenidos puntuales, además intenta realizar un aporte a la formación del espíritu investigativo y cooperativo. Los estudiantes (G2) fueron capaces de comunicarse entre pares y con profesores, identificar problemas, buscar información pertinente; optar con racionalidad entre alternativas, trabajar en equipo y lograr un cambio de actitud, se sintieron involucrados en su aprendizaje.
Se mejoró algunas habilidades lingüísticas (capacidad de expresar claramente las ideas por escrito, comprender el lenguaje simbólico...) y habilidades de interpretación y traducción entre diferentes formas de expresión (capacidad del lenguaje verbal al gráfico, y del lenguaje gráfico al algebraico, así como la capacidad de realizar análisis crítico de la situación planteada). Se considera que las actividades propuestas resultaron motivadoras para los alumnos y docentes participantes en la experiencia.

Bibliografía

Ausubel, D. (1978): *Sicología Educativa, un punto de vista cognoscitivo*. ED. Trillas, México. 433 p.

Esper, L.; Pérez Carmona, M.C. y otros (2002): "Un modelo integrador entre Matemática, Física y Geología".*Actas XV Congreso Geológico Argentino*. Calafate.

Ericson (1989): Métodos cualitativos de investigación sobre la enseñanza, En Wittrock, M.C. de *La investigación de la enseñanza*. Madrid. Paidos-MEC., pp 125,301.

Kunt, D. (1993): Science as argument: Implications for teaching and learning scientific thinking. *Science Education,* 77, 319-337.

Moreira, M.A.,(1990). *Pesquisa em Encino-Aspectos metodológicos e referenciais teóricos*, De. Ped. Univ., Sao Paulo, Brasil.

Perez Carmona, M.C., Esper, L.B. (2002).”Análisis de los resultados de un modelo integrador entre Matemática, Física y Geología”. Memorias VI SIEF, Arg. En prensa.

Vygotsky, L.S. (1989). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*, Editorial Crítica, Barcelona.

Wittrock,M.C. (1986): “.Student`s thougth process” En M.C Wittrock, (ed.) . Nueva York: Macmillan (Trad. Cast.: *La investigación de la enseñanza III. Profesores y alumnos*. Barcelona: Piados. M.E.C., 1990)

APRENDIENDO MATEMÁTICA DESDE LOS CONCEPTOS

María Eugenia Ángel, Laura Polola, Graciela Fernández y Mónica Bortolotto
Universidad Nacional de La Matanza. Argentina
mangel@unlm.edu.ar, pablo@argentinavip.com.ar, polola@unlm.edu.ar

Resumen

La problemática inductora de este tema fue el deseo de encontrar y desarrollar métodos de trabajo en el aula que permitieran facilitar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática y resulten en una disminución de la dificultad que los alumnos cotidianamente presentan. Las unidades de análisis principales del trabajo fueron los alumnos ingresantes a las carreras del Departamento de Ciencias Económicas de la UNLM. Debería ser natural identificar el aprendizaje real y efectivo de la Matemática con la conceptualización de los contenidos que supera ampliamente el frecuente tratamiento mecanicista de los mismos, dado que el mero uso de habilidades adquiridas en forma mecánica es incompleto como aprendizaje. Abocados a lograr la conceptualización, se trató de estudiar el desarrollo de actividades factibles que tiendan a ello. El aprendizaje conceptual, es uno de los factores principales que permite descubrir conscientemente el por qué, para qué y el significado de un problema en relación a los conceptos presentes en él, para así encontrar el camino para resolverlo efectivamente (el cómo). Al intentar analizar las dificultades que acarrea el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática, surgieron varios interrogantes que motivaron el deseo de alcanzar el siguiente objetivo: Diseñar e implementar actividades que permitan lograr un aprendizaje conceptual acompañado de una evaluación permanente de las mismas. Las actividades diseñadas se basaron en la implementación en el aula de una metodología estratégica. Como este equipo no tuvo a su cargo la coordinación del Curso, se resolvió trabajar sólo con dos comisiones de alumnos que fueron asignadas por la nueva coordinación y en las que estarían como docentes dos integrantes del equipo. El trabajo consistió en:

1- El análisis de los contenidos a trabajar en el aula
2- La selección y aplicación de estrategias.
3- La descripción del grupo piloto –comisiones asignadas a las investigadoras-
4- La determinación de las características de los alumnos ingresantes
5- El análisis y comparación del rendimiento del grupo piloto con respecto al resto.

Antecedentes

La problemática inductora de este tema fue el deseo de encontrar y desarrollar métodos de trabajo en el aula que permitieran facilitar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática y resulten en una disminución de la dificultad que los alumnos cotidianamente presentan. Las unidades de análisis principales del trabajo fueron los alumnos ingresantes a las carreras del Departamento de Ciencias Económicas de la UNLM. Es en la instancia de ingreso, el comienzo de la formación profesional, donde el alumno debe construir las bases o pilares del aprendizaje efectivo, para luego poder abordar temáticas de mayor complejidad. Debería ser natural identificar el aprendizaje real y efectivo de la Matemática con la conceptualización de los contenidos que supera ampliamente el frecuente tratamiento mecanicista de los mismos, dado que el mero uso de habilidades adquiridas en forma mecánica es incompleto como aprendizaje. Abocados a lograr la conceptualización, se trató de estudiar el desarrollo de actividades factibles que tiendan a ello. *El aprendizaje conceptual, es uno de los factores principales que permite descubrir conscientemente el por qué, para qué y el significado de un problema en relación a los conceptos presentes en él, para así encontrar el camino para resolverlo efectivamente (el cómo).* Al intentar analizar las dificultades que acarrea el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática, surgieron varios interrogantes, que derivan de las preguntas frecuentes que se formula todo docente de esta disciplina: ¿por qué le cuesta tanto a los alumnos y es tan alto el índice de reprobados?, ¿es la incorrecta interpretación de texto el determinante fundamental en la falta de entendimiento de enunciados de un problema?, ¿cuáles son los factores que dificultan la simbolización de un problema real? Lo anterior motivó el deseo de alcanzar el siguiente objetivo para la investigación: Diseñar e implementar actividades que permitan lograr un aprendizaje conceptual acompañado de una evaluación permanente de las mismas. Se diseñaron diversas actividades para lograr el objetivo planteado basadas en la implementación en el aula de una metodología estratégica. Para comenzar con el trabajo se debieron realizar ajustes y replanteos estructurales de importancia en base al cambio de dirección y coordinación que sufriera el Curso de Admisión de Ciencias Económicas de la UNLM dado que este equipo ya no tuvo a su cargo esas tareas. Por tal motivo, se resolvió trabajar sólo con dos comisiones de alumnos, en las que estarían como docentes dos integrantes del equipo para poder aplicar en las mismas las diversas estrategias desarrolladas. Las comisiones para trabajar fueron asignadas a las investigadoras por la nueva coordinación y resultaron ser ambas del turno mañana. La tarea se concentró fundamentalmente en las etapas que se presentan a continuación.

El análisis de los contenidos a trabajar en el aula

A partir del análisis efectuado al currículo, se extrajeron los nodos conceptuales a formalizar, que permitieron la organización del trabajo áulico. Lógica - Teoría de conjuntos - Conjuntos numéricos - Números Reales – Módulo - Polinomios – Ecuaciones - Sistemas de ecuaciones – Inecuaciones - Ecuación de la recta - Relaciones y Funciones. La primera tarea a abordar fue la manera de interrelacionar los temas para no presentarlos de manera aislada e inconexa. Dada la estructura de la ejercitación, se elaboraron *vínculos* que permitieran revisar y aplicar los temas vistos desde el comienzo de la cursada. De esta manera se podría ver la utilidad de todos y la proximidad de áreas conceptuales que parecían no relacionadas entre sí. Este carácter revisionista favorecería el hecho de mantener latente y accesible la estructura conceptual para fortalecerla y lograr un aprendizaje de los conceptos y su relación. Para hilvanar la serie de ejercicios que aparecían para cada tema, se estableció un orden para su realización que respetara el grado de dificultad creciente partiendo de los casos más sencillos. Los ejercicios de la guía fueron analizados uno por uno y en base al objetivo intrínseco de cada uno, se detectaron todas las posibilidades de tratamiento teórico que permitieran explicitar su carga conceptual y su entorno. La necesidad de hacer hincapié en el entorno conceptual de todos los temas tratados como modo de trabajo en el aula caracterizaron la metodología de enseñanza empleada. Se establecieron contactos que vincularon los diferentes temas para luego proponer el trabajo sobre ejercicios que los hicieran explícitos, tomándolos de la guía o creándolos con ese fin. De esta manera se formó la red sobre la que se realizó todo el trabajo siempre respetando la estructura original de la guía de ejercicios. Se seleccionaron y diseñaron, cuando fue necesario, ejercicios vinculantes e integradores entre los distintos temas que aparecían ligados conceptualmente.

La selección y aplicación de estrategias

Considerando las siguientes estrategias generales: *(P) - Estrategias previas al proceso de aprendizaje, (M) - Estrategias de motivación, (O) - Estrategias de organización, (E) - Estrategias de elaboración y (R) - Estrategias de recuperación.* Con la intención de presentar la ejecución de ellas se organizaron los contenidos en torno a ejes conceptuales de los que dependen. Se consideraron como ejes principales los siguientes temas: 1- Lógica, 2- Números Reales, 3- Polinomios y 4- Funciones. Si bien aparecen en el orden presentado, al tratarlos en el aula se recorrió un camino "de ida y vuelta" entre ellos para conceptualizarlos, y para lograr su abstracción fue preciso partir de las nociones de menor dificultad y nivel conceptual. A continuación y a modo de ejemplo se sintetiza la utilización de las estrategias en el eje conceptual referido a Lógica

- Al ser un tema no estudiado previamente se debieron introducir prácticamente todos los conceptos, a tal efecto se trabajó sobre enunciados del tipo (M):

Llueve - No llueve Hoy no es lunes - Hoy es lunes

A fin de relacionar (O) los valores de verdad de una proposición y de su negación, arribando (E) a la noción de opuesto o negación como operación lógica. Análogamente se trabajaron las operaciones binarias partiendo del significado de afirmaciones sencillas y accesibles (M) conectadas lógicamente. Así se comenzaron a construir (O) las tablas de verdad contemplando todas las combinaciones posibles (E). Por otra parte, se agregaron, a los propuestos en la guía, ejercicios de menor complejidad para calcular valores de verdad. Partiendo del resultado de una operación se propuso hallar el valor de verdad de las proposiciones componentes presentes en ella. Por tratarse de las operaciones proposicionales fundamentales ya definidas, el planteo del siguiente tipo de ejercicio representa una estrategia de recuperación.

En cada caso indicar verdadero (V) o falso (F) según corresponda:

a) Si $p \wedge q$ es F entonces p es V y q es V. b) Si $p \vee q$ es V entonces p es V y q es F.

c) Si $p \rightarrow q$ es V entonces p es V y q es F.

- Al arribar a Teoría de Conjuntos, en la guía figuraba en primer lugar el siguiente ejercicio:

Dados los conjuntos: "cuadriláteros", "rectángulos", "rombos" y "cuadrados":

Definir por comprensión.- Establecer todas las relaciones de inclusión posibles entre ellos.

Se consideró que si bien es un ejercicio que se puede trabajar en profundidad, el tiempo disponible no era suficiente para aplicar estrategias previas al aprendizaje, aula-taller. Como los alumnos, en general, no recordaban algunos conceptos de geometría, se planteó un torbellino de ideas (P y M) para hacer aflorar los conocimientos previos y que cada alumno realizara su aporte y extraer así conclusiones valiosas (R). La puesta en común (O) permitió enunciar las definiciones (R y E) de las distintas figuras geométricas para introducir la definición de un conjunto por comprensión, indicando la propiedad que cumplen sus elementos como una función proposicional -noción establecida previamente (R) en Lógica-. De esta manera aparece una de las vinculaciones conceptuales de la red establecida.

1.Lógica $\longleftrightarrow$ 2.Teoría de conjuntos

Para el segundo ejercicio pedido: *Hacer diagramas de Venn para las siguientes expresiones 1) $A \cap (B \cup C)$ 2) $A \cup (B \cap C)$ 3) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ 4) $(A \cup B) \cap (A \cup C)$* se consideró conveniente intercalar situaciones problemáticas concretas entre dos o tres conjuntos tratando de que el crecimiento de la complejidad fuera gradual.

Dados los siguientes conjuntos

i) A = { rojo, amarillo, azul } ; B = { rojo, verde, violeta, azul } y
C = { rosa, amarillo, azul, blanco }

ii) A ={ a, b} ; B = { 2, 3 } y C = { 3, 4 } (datos del ej. 18)

Hallar el resultado de las siguientes operaciones entre los conjuntos dados, definiéndolos por extensión y utilizando diagramas de Venn:

a) $A \cup B =$ b) $B \cup C =$ c) $B \cap C =$ d) $A \cup (B \cap C) =$

Como el tercer ejercicio era de un nivel de complejidad y abstracción bastante superior.

Demostrar: $(A–B)\subset(A \cup B)$, $(A\subset B) \Rightarrow (AU(B - A) = B)$, $(A\cap B = \emptyset) \Rightarrow (AUB'=B')$

Se permutó con el siguiente: *Dibujar sobre la recta real y escribir el resultado en forma de intervalo.*

$\{ x / x \geq -1 \}\cap\{ x / -3 < x < 2 \}$, $\{x / -3 < x \leq 1 \}\cap\{ x / x > 2 \}$, $\{x / -3 \leq x \leq 0\}\cap\{x / -2 < x < 3\}$

con la finalidad de habituar a los alumnos a utilizar los gráficos como herramienta de resolución antes de abordar las demostraciones. (O)

Además se extendió el enunciado pidiendo que expresaran el resultado como conjunto definido por comprensión y verificaran para algunos elementos del conjunto obtenido, la pertenencia a la intersección de los conjuntos dados. (O). Cuando se verificaron los resultados de las intersecciones, en cada ítem, se hizo hincapié en las condiciones que debían cumplirse. Como modelo de resolución se tratará aquí el primer caso: Si el intervalo [-1 , 2) es la solución, entonces cualquier número perteneciente a él debe verificar ambas condiciones simultáneamente; y además ningún número real que esté fuera de dicho intervalo lo debe hacer. Se tomaron valores dentro y fuera del intervalo para verificar que los que pertenecen a él hacen que se cumpla la definición de intersección, expresada como una proposición lógica. La traducción se logró estableciendo las funciones proposicionales que definen a los conjuntos intervinientes en las operaciones: $P(x) : x \geq -1$ $Q(x) : -3 < x < 2$

Seguidamente se ubicó el conectivo lógico que las vincula, en este caso es "$\wedge$" (conjunción) por ser una intersección, obteniéndose una nueva función proposicional: $P(x) \wedge Q(x)$

Se eligieron algunos valores a utilizar en la comprobación para asignárselos a la indeterminada x, recordando que $(p \wedge q)$ es verdadera sólo cuando ambas proposiciones lo son.

Como una función proposicional al aplicarse a un elemento se transforma en una proposición. Las proposiciones que se obtienen son:

Para $x = 0$ $p = P(0)$ y $q = Q(0)$ que se pueden expresar como:

$0 \geq -1 \quad \wedge \quad -3 < 0 < 2$ cuyo valor de verdad es $V \wedge V \Rightarrow V$

p es V y q es V entonces $p \wedge q$ es V

Para $x = 3 \notin [-1 , 2)$ $p = P(3)$ y $q = Q(3)$ que se pueden expresar como:

$3 \geq -1 \quad \wedge \quad -3 < 3 < 2$ el valor de verdad es $V \wedge F \Rightarrow F$

p es V y q es F entonces $p \wedge q$ es F

Para $x= -4 \notin [-1 , 2)$ $-4 \geq -1 \quad \wedge \quad -3 < -4 < 2$ con valor de verdad $F \wedge V \Rightarrow F$

p es F y q es V entonces $(p \wedge q)$ es F

Como corolario de esta forma de trabajo se pudieron reconstruir las definiciones de las operaciones entre conjuntos por comprensión, no sólo en forma coloquial sino también simbólicamente de la siguiente manera: $A U B = \{ x \in A \vee x \in B\}$ $A – B = \{ x \in A \wedge \notin B \}$

De este modo se tuvo un punto de partida para encarar las demostraciones solicitadas.

La descripción del grupo piloto (las dos comisiones asignadas a las investigadoras)

Durante el dictado del curso se comprobó que para el grupo piloto el dictado de la materia se hacía muy lento, no se podía avanzar de acuerdo al cronograma previsto por los coordinadores del curso. Se solicitó entonces, sólo a los alumnos de este grupo, la edad y el año de egreso del secundario. Se encontró que el 25 % de los alumnos habían terminado el secundario hacía 7 años o más y que el 50 % habían hecho al menos hacía 4 años. De los resultados surgió la siguiente hipótesis de trabajo: *El problema de aprendizaje detectado podría radicar en el lapso de tiempo transcurrido desde el egreso del nivel medio y la* *realización del curso de ingreso a la universidad.* La consecuencia podía ser el olvido, de los temas vistos en la escuela, de allí la dificultad para avanzar en el dictado de la materia con los tiempos estipulados.

La determinación de las características de los alumnos ingresantes

Se diseñó una encuesta anónima para realizar un diagnóstico global -no inicial- que permitiera llegar a una descripción básica del grupo de alumnos del curso. Las variables de interés que se incluyeron en el diseño de la encuesta se agruparon en: variables de caracterización (edad, tipo de escuela,…) y de opinión (temas de mayor dificultad....) El grupo de alumnos encuestado fue seleccionado aleatoriamente el día de la segunda evaluación parcial. Abarcó un grupo heterogéneo respecto a la modalidad de trabajo llevada a cabo hasta ese momento. Se encuestó un total 216 alumnos de los 930 inscriptos.

Algunos resultados de la encuesta

Teniendo en cuenta la edad cronológica según los turnos, se obtuvo que a la mañana concurrió un grupo de alumnos de mayor edad que a la tarde. Se creyó conveniente relacionar este hecho con los años transcurridos entre la finalización de los estudios secundarios y la realización del curso y se obtuvo que El tiempo transcurrido entre el año de egreso del nivel medio y el Curso de Admisión era mayor para los alumnos del turno mañana. Dentro de los temas que más costaron, sobresalieron lógica -45,83%-, polinomios –37,04%- y relaciones y funciones -35,65%-. Llamó la atención que muchos alumnos dijeran que nunca antes habían estudiado "relaciones y funciones".

El análisis y comparación del rendimiento del grupo piloto con respecto al resto

El análisis se efectuó en base a los resultados obtenidos en los dos exámenes parciales. De los 930 alumnos que se inscribieron para realizar el curso, 757 rindieron el primer parcial y 637 el segundo, en ambas instancias lo hicieron 636. El 31,61% resultó "ausente". Sólo 74 de 93 alumnos del grupo piloto rindieron ambos parciales. Para poder comparar el rendimiento de estos alumnos se separaron los puntajes obtenidos. A continuación se tabulan los resultados finales del curso.

TOTAL DE ALUMNOS

Puntaje	Cant. de alumnos	F%
1	12	1,89
1,5	19	4,88
2	10	6,45
2,5	11	8,18
3	14	10,38
3,5	17	13,05
4	22	16,51
4,5	30	21,23
5	37	27,08
5,5	52	35,23
6	54	43,72
6,5	45	50,80
7	60	60,23
7,5	64	70,29
8	58	79,41
8,5	51	87,43
9	47	94,82
9,5	17	97,49
10	16	100,00
Total general	636	
MODA	7,5	
PROMEDIO	6,36	
MEDIANA	6,5	

GRUPO TESTIGO

Puntaje	Cant. de alumnos	F%
1	10	1,78
1,5	18	4,99
2	9	6,59
2,5	7	7,84
3	13	10,14
3,5	15	12,81
4	18	16,02
4,5	25	20,47
5	32	26,16
5,5	48	34,71
6	45	42,72
6,5	34	48,71
7	57	58,91
7,5	53	68,34
8	55	78,13
8,5	46	86,30
9	45	94,30
9,5	16	97,15
10	16	100,00
Total general	562	
MODA	7	
MEDIANA	7	
PROMEDIO	6,42	

GRUPO PILOTO

Puntaje	Cant. de alumnos	F%
1	2	2,7
1.5	1	4,05
2	1	5,40
2,5	4	10,81
3	1	12,17
3,5	2	14,87
4	4	20,28
4,5	5	27,04
5	5	33,80
5,5	4	39,21
6	9	51,37
6,5	11	66,23
7	3	70,28
7,5	11	85,14
8	3	89,19
8,5	5	95,95
9	2	98,65
9,5	1	100,00
Total general	74	
MODA	6,5 y 7.5	
MEDIANA	6.5	
PROMEDIO	6	

Con respecto a los grupos testigo y piloto se tuvieron los siguientes resultados:

	grupo testigo %	grupo piloto %
entre 4 y 6,5 puntos	29,90	36,49
7 o más puntos	51,29	33,77
aplazados	12,81	14,87

El nivel de aplazados del grupo piloto fue superior –un 16% más- que el del resto de los alumnos. La distribución de aprobados para el grupo testigo presentó mayor concentración en los puntajes más altos sin embargo para el grupo piloto en los comprendidos entre 4 y 6,5 . A partir del seguimiento realizado, se comprobó que el rendimiento del grupo piloto mejoró al comparar los resultados de los dos parciales rendidos

Resultados del Primer Parcial

TOTAL DE ALUMNOS

1	82	10,83
2	118	26,46
3	23	29,46
4	105	43,33
5	92	55,48
6	102	68,95
7	85	80,19
8	91	92,21
9	31	96,31
10	28	100,00
Total general	757	
MODA	2	
MEDIANA	5	
PROMEDIO	4,97	

GRUPO TESTIGO

1	65	9,79
2	103	25,30
3	20	28,31
4	90	41,86
5	78	53,61
6	87	66,72
7	79	78,62
8	85	91,42
9	31	96,09
10	26	100,00
Total general	664	
MODA	2	
MEDIANA	5	
PROMEDIO	5,08	

Grupo piloto

1	17	18,28
2	15	34,40
3	3	37,63
4	15	53,76
5	14	68,81
6	15	84,94
7	6	91,39
8	6	97,84
10	2	100,00
Total general	93	
MODA	1	
MEDIANA	4	
PROMEDIO	4,15	

La proporción de alumnos ausentes es similar en ambos grupos. El 37,63 % del grupo piloto no aprobó mientras que para el resto sólo el 12,17% no aprobó. Obtuvieron entre 4 y 6 puntos el 47,31 % de los alumnos seleccionados y del resto el 38,41%. Con 7 o más puntos aprobó el 15,06% del grupo piloto en contraposición al 33,28% del resto. Las diferencias entre ambos grupos se lograron disminuir para la segunda evaluación.

RESULTADOS DEL SEGUNDO PARCIAL

TOTAL DE ALUMNOS

1	34	5,34
2	36	10,99
3	6	11,93
4	29	16,48
5	27	20,72
6	56	29,51
7	90	43,64
8	105	60,12
9	96	75,19
0	158	100,00
Total general	637	
PROMEDIO	7,26	
MEDIANA	8	
MODA	10	

GRUPO TESTIGO

1	29	5,15
2	35	11,37
3	4	12,08
4	26	16,70
5	24	20,96
6	49	29,66
7	75	42,98
8	95	59,85
9	84	74,77
10	142	100,00
Total general	563	
PROMEDIO	7,26	
MEDIANA	8	
MODA	10	

Grupo piloto

1	5	6,76
2	1	8,11
3	2	10,81
4	3	14,87
5	3	18,92
6	7	28,38
7	15	48,65
8	10	62,16
9	12	78,38
10	16	100,00
Total general	74	
PROMEDIO	7,23	
MEDIANA	8	
MODA	10	

Los puntajes obtenidos por los alumnos de ambos grupos fueron muy parejos. El 10,81% del grupo piloto no aprobó mientras que en el resto el 12,08% no lo hizo. Prácticamente el mismo porcentaje de alumnos obtuvo entre 4 y 6 puntos. Con 7 o más puntos aprobó el 71,62% del grupo piloto y el 70,34% de los alumnos de las otras comisiones. Si bien los alumnos de las comisiones asignadas para utilizar la metodología propuesta por las investigadoras alcanzaron y superaron ligeramente el rendimiento final de los demás alumnos, las notas del primer examen influyeron en los puntajes finales.

Bibliografía

Ángel, M. E. **(**2000) *Matemática. ¿Leo, traduzco, resuelvo*". Ed. C&C. Bs. As. Argentina

Bortolotto, Fernández, Polola (2000),*Análisis y Resolución de Situaciones problemáticas.* Ed. C&C. Bs.As.

Lakatos, I. (1986) *Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático.* Alianza Editorial. 3ªEd.

Polea, G (1995) *Como plantear y resolver problemas*. Ed. Trilla. México. 19na impresión.

Pozo, J. (2000) Entrevista realizada por las Lic. Anahí Mastache y Constanza Necuzzi en el marco del II Congreso Internacional de *Educación Debates y Utopías*. Julio.

Skemp, 1993 *Psicología del aprendizaje de las matemáticas*. Ed. Morata.

CONSTRUCCIÓN DE LA EXPRESIÓN ALGEBRAICA DE UNA GRÁFICA, CONSIDERANDO LA INTERPRETACIÓN GLOBAL DE LAS REPRESENTACIONES GRÁFICA, NUMÉRICA Y ALGEBRAICA

Alma Alicia Benítez Pérez
C.E.C.y T. 11, "Wilfrido Massieu" IPN, México D.F.
abenitez@ipn.mx

Resumen

La Interpretación Global (Duval, 1988) fomenta y fortalece la exploración de las representaciones gráficas y numéricas para identificar la organización de las relaciones al interior de las representaciones, así como sus relaciones exteriores, permitiendo establecer conexiones entre las representaciones gráfica, numérica y algebraica. La identificación de la información contribuye a interpretar el contenido de las representaciones, beneficiando la tarea de construir la expresión algebraica a partir de su gráfica.
Se implementó la Interpretación Global a un grupo de 40 alumnos, los cuales cursaban la asignatura de álgebra (primer semestre de bachillerato), siendo el propósito del estudio, analizar las estrategias que el alumno emplea cuando la tarea solicita la construcción de la expresión algebraica de una gráfica (recta, parábola y la introducción al trazo cúbico). Durante la experiencia los alumnos contaron con el apoyo del software Cabri Geometry para realizar las tareas diseñadas.

Marco Teórico

Duval (1999), menciona que la visualización "*Es producir una representación que, en ausencia de toda percepción visual de los objetos representados, permita observarlos como si estuviera realmente delante de los ojos*" (Pág. 10) [5], se considera entonces que la visualización se basa sobre la producción de una representación semiótica, donde se identifique de manera directa lo que está representado.
La visualización matemática no es un acto de aprehensión simultánea en el campo de la percepción, es una actividad cognitiva intencional que produce una representación en una superficie de dos dimensiones (pantalla y papel), la cual muestra las relaciones entre las unidades que componen a las figuras, eso quiere decir que la visualización matemática expone únicamente objetos, los cuales se hacen "ver" a través de las organizaciones de las relaciones que tienen las unidades de las figuras. Estas unidades se conectan, bi-dimensionalmente, porque se requiere la organización de al menos dos dimensiones para establecerlas.
Las representaciones gráfica y numérica es un de tipo visualización en matemática, particularmente necesarias en la investigación a realizar. Ambas representaciones poseen organizaciones visuales bi-dimensional; el cuadriculado del plano en líneas para la gráfica y la distribución en columnas para la tabla.
La representación gráfica posee sus propias leyes de organización (Bertin,1968), y cuyo funcionamiento se basa en la relación de dos figuras; figura fondo referida al plano cartesiano y figura-forma al trazo. Duval (1994) menciona tres tratamientos relacionados con las figuras:

"*1.- Un señalamiento de posiciones por selección de los puntos donde la figura forma coincide con los puntos de intersección del campo cuadriculado. Ello permite una lectura de números.*

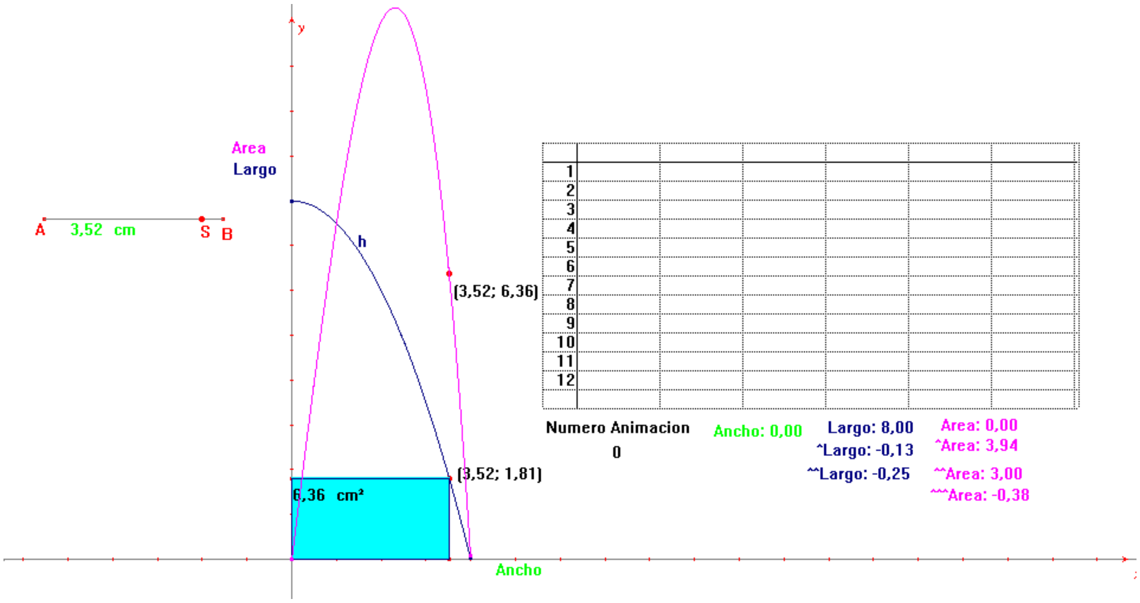
2.- Una aprehensión global de los valores visuales de la figura forma (trazo de rectas, trazo de curvas, inflexión,...) Es esta aprehensión perceptiva global que da a la representación gráfica un poder intuitivo o heurístico. Este tipo de tratamiento es esencialmente cualitativo.
3.- Una modificación de la figura forma cambia la aprehensión global de los valores visuales en juego, con los grados de libertad que da la figura-fondo. Podemos modificar la figura forma no tomando por ejemplo, la misma unidad de graduación para los dos ejes. Podemos también modificar la figura forma, efectuando un "zoom" en una de sus partes, es el equivalente de dividir localmente la unidad de graduación y hacerse la cuadrícula más fina" Pág. 7, [4]

El primer tratamiento señala el puntaje como instrumento principal para explorar el contenido de la gráfica, el cual consiste en la lectura de las coordenadas de un punto en la gráfica, o bien para situar una posición a partir de un par de números dados.
El tercer tratamiento consiste en recobrar la ecuación correspondiente a la forma de la figura, basado en procedimientos de cálculo, de los números leídos de la gráfica. Particularmente Duval menciona el hecho de estas conversiones son efectuadas cognitivamente a ciegas, pues es un trabajo incierto y difícil, si únicamente su enfoque está en ciertas parejas de números ubicados en la figura forma. Ambos tratamientos 1 y 3 respectivamente, basan su análisis exclusivamente en la figura-fondo de la representación gráfica, dejando de lado la figura-forma.
El segundo tratamiento, consiste en identificar los distintos valores visuales de la forma y la orientación de la gráfica, para establecer relaciones con los valores categóricos de la expresión algebraica (Duval, 1988). Este tratamiento es esencialmente cualitativo, para fortalecer la aprehensión global del contenido de la representación gráfica.
La interpretación global concentra su atención en la figura-forma, y descuida la figura-fondo, el cual se considera un marco estable, sin embargo, la figura-fondo es un aspecto relevante para explorar el contenido de la representación, ya que la modificación de la figura-fondo, al dividir localmente la unidad de graduación origina un cambio en la figura-forma. Actividad que altera el comportamiento del trazo, y por tanto la identificación de los valores visuales.
Al respecto, Duval menciona que el punto central y decisivo en el aprendizaje de las representaciones gráficas es la discriminación de los valores visuales y su coordinación con los valores categóricos de la expresión algebraica, atendiendo la discriminación de los valores visuales con relación a la figura-fondo. Para ello las actividades diseñadas deben permitir explorar las variaciones de una sola variable y mantener constantes los valores de las otras variables, con la finalidad de que los valores de las distintas variables visuales se unifiquen para ser exploradas como única figura forma/fondo.

Metodología
El propósito de la experiencia educativa fue proporcionar al estudiante diversas situaciones para explorar el contenido de las representaciones gráfica, numérica y algebraica, empleando tratamientos que permitan evidenciar su riqueza, dicha actividad beneficia la tarea de construir su expresión algebraica. Para ello se diseñó una dinámica que apoyara el desarrollo con este tipo de actividad.

La actividad se realizó en el contexto de un curso de álgebra. Los estudiantes no habían participado anteriormente en esta forma de trabajo, modificando la práctica en el salón de clase, es decir, se impulsó la comunicación de ideas y la continua participación en clase. A continuación se presenta el desarrollo de la Experiencia Educativa:

1. Fase de introducción. Los alumnos participantes provenían de diversas centros escolares (secundarias), por tal circunstancia se asumió que no se contaba con un ambiente adecuado para llevar a cabo la dinámica en el aula, considerando que los alumnos estaban habituados a la exposición de conceptos por parte del profesor. Ante esta situación, la primera semana de trabajo, se introdujo a los estudiantes a través de conversaciones por parte del maestro, a la dinámica a desarrollar en el aula, es decir, trabajo en equipo y discusión en el grupo, teniendo el profesor el papel de coordinador del proceso.
2. Dinámica de trabajo en el aula. La clase se organizó en equipos de 4 a 5 integrantes, formando un total de 6 equipos por grupo. Se entregó al inicio de la sesión una actividad diseñada por el profesor, para trabajarla de manera colectiva, mencionado que un integrante del equipo sería el encargado de recolectar toda la información que se obtuviera durante el proceso de solución, mientras el profesor participaba con los equipos como espectador y para proporcionar información. Una vez terminada la tarea, los equipos presentaban un reporte escrito. El profesor, de acuerdo con las observaciones realizadas a los equipos, seleccionaba un equipo para exponer su trabajo al grupo. El criterio de selección consideraba los diferentes puntos de vista, favoreciendo la discusión en el grupo, para aclarar dudas y superar posibles dificultades. Los reportes de los equipos se entregaban a la siguiente sesión, presentando diferentes anotaciones, para que el alumno de manera individual revisara el trabajo y lo corrigiera (si era el caso), en una carpeta para ser evaluada al final del departamental. En determinados momentos, durante la experiencia educativa, el maestro expuso al grupo algunos tópicos que ocasionaban dificultad, por ejemplo, identificar las diferentes variables visuales que componen a la recta y a la parábola, para ser vinculadas con las representaciones algebraica y numérica. Cuando el profesor realizó esta experiencia, los alumnos presentaron mayor interés para explorar los trazos. Esta situación, se debe posiblemente a la necesidad del estudiante para que el profesor intervenga en determinados momentos del proceso. Durante las sesiones que se realizaron en la sala microsoft, se continuó con la misma dinámica que en el salón de clase.
3. Después de concluir la experiencia educativa, se solicitó la participación de 6 alumnos para formar 3 equipos. La actividad se llevó a cabo en la sala de Cómputo (Microsoft), y cuyas sesiones se realizaron extraclases, teniendo la duración de 2 horas. Se proporcionó la Tarea, en cuyo texto se menciona brevemente la situación, y se exponen las indicaciones básicas para explorar el archivo (Cabri-Geometry), el cual muestra las gráficas que generan los anchos, largos y áreas de diferentes rectángulos, así mismo se presenta la tabla numérica vacía, para que los equipos desarrollen el tratamiento que consideren pertinente. A continuación se muestra una de las actividades realizadas por los equipos:



En el primer cuadrante aparece la gráfica "h". Esta gráfica y los ejes cartesianos forman una región, dentro de esta se construyen varios rectángulos, a través de mover el punto S que pertenece al segmento $\overline{AB}$

¿ Determina la expresión algebraica que permite generar el ancho y largo para estos rectángulos?

Una de las siguientes expresiones algebraica representa el comportamiento de las áreas.

¿Elige la que consideres cumpla con las condiciones de los rectángulos?

$A = \frac{1}{2}x^3 + d$ $\qquad A = -\frac{1}{2}x^3 + cx$ $\qquad A = ax^3 + 3x$

$A = ax^3 + 8x$ $\qquad A = 8x$ $\qquad A = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + cx$

Resultados

Los equipos realizaron interpretaciones de tipo global y puntual a la información que se identificó en las representaciones gráfica, numérica y algebraica.

La interpretación global se utilizó en la **representación gráfica**, para explorar el contenido del trazo a través de tratamientos cualitativos, concediendo la identificación de variables y características visuales. La interpretación global de las variables visuales otorgó establecer conexiones con las variables categóricas de la representación algebraica, de las cuales se mencionan las siguientes:

- Término independiente para los polinomios de grado dos, tres y cuatro
- Coeficientes lineal y cuadrático para el polinomio de grado dos y
- Los coeficientes cúbico y cuadrático para el polinomio cúbico.

Dicha interpretación permitió: considerar estrategias, establecer conjeturas, argumentar afirmaciones y validar resultados.
Por otra parte, la interpretación puntual se aplicó a la representación gráfica, a través de tratamientos cuantitativos, cuya información se basó en la elección de parejas ordenadas para verificar el tipo de trazo que se exploraba. Los equipos no establecieron conexiones con las representaciones numérica y algebraica, sino con la misma representación gráfica para determinar el tipo de trazo (Cúbico y Cuarto grado).
Respecto a la **representación numérica**, la interpretación global se realizó con la información identificada a través de tratamientos cuantitativos, específicamente para reconocer la segunda y tercera diferencia, lo cual permitió determinar el tipo de trazo y el valor numérico de los coeficientes cuadrático y cúbico para los polinomios de grado dos y tres respectivamente, estableciendo conexiones con la representación algebraica.
La interpretación puntual se aplicó a las parejas ordenadas que fueron elegidas para identificar el valor numérico del término lineal de los polinomios cuadrático y cúbico.
Las interpretaciones que se aplicaron a la información identificada en la representación numérica contribuyó a establecer conexiones con otras representaciones, permitiendo la aplicación de estrategias para continuar explorando la situación.
El contenido de la **representación algebraica** se exploró por tratamientos cualitativos y cuantitativos, cuya información se interpretó global y puntualmente.
La interpretación global se realizó con la identificación de las variables categórica en la expresión algebraica, para establecer las conexiones con las variables y características visuales del trazo.
La interpretación puntual en la representación algebraica, se llevó a cabo por procedimientos algebraicos, es decir, los equipos eligieron parejas ordenadas de la representación numérica, para sustituirlos en las expresiones algebraicas que consideraban las indicadas, posteriormente llevaron a cabo procedimientos algebraicos para determinar el valor numérico del coeficiente que se exploraba. Estableciendo la conexión con la representación numérica.
Las interpretaciones que los equipos formularon a la información identificada en las representaciones algebraica, numérica o gráfica, permitió establecer conexiones entre las representaciones, concediendo a los equipos tener un panorama global y específico de la situación.
Durante el desarrollo de las tareas los equipos emplearon la interpretación global en las 3 representaciones, mientras que la interpretación puntual se aplicó con mayor frecuencia en la representación numérica, siendo mínimo el desempeño en la representación gráfica.
En este sentido, Duval ha mencionado, que la identificación de parejas ordenadas consiste en recobrar la ecuación correspondiente a la forma de la figura, basado en procedimientos de cálculo, de los números leídos de la gráfica (para el caso en la representación numérica). Exponiendo el hecho de que estas conversiones son efectuadas cognitivamente a ciegas, pues es un trabajo incierto y difícil, si únicamente su enfoque está en ciertas parejas de números ubicados en la figura forma. Sin embargo, los equipos desarrollaron de manera simultánea tanto la aprehensión global como la puntual, obteniendo información para establecer conexiones con otras representaciones, permitiendo realizar conjeturas, misma que fueron aceptadas o rechazadas de acuerdo con los argumentos que los equipos emplearon, los cuales se justificaron con la información identificada.

Bibliografía

Bertin, J. (1968). *Gráfica (Representación)*. Volumen 7 de la Encyclopoedia Universalis. Pp. 955-964. Editada en París, Francia.

Dugdale, S. (1993). *Functions and Graphs Perspectives on Student Thinking.* In T.A. Romberg, E. Fennema & T.P. Carpenter (Eds.) Integrating Research on the Graphical Representation of Functions. Pp. 101-130. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Duval, R. (1988). *Gráficas y ecuaciones: la articulación de dos registros.* Annales de Didactique et de Sciences Cognitives 1(1988)235-253. Versión en español de Blanca M. Parra. Antología en Educación Matemática. DME.CINVESTAV. 1993.

Duval, R. (1994). *Les Représentations Graphiques: Fonctionnement et Conditions de leur Apprentissages*. C.I.E.A.E.M., Toulouse, France. Pp. 3-14.

Duval, R. (1999). *Representation, Vision and Visualization : Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning*. Proceedings of the Twenty-first Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. México, Vol. I, Pp. 3-26

Duval, R. (2003). "Ver" *En Matemáticas.* En Eugenio Filloy (Ed.), Matemática Educativa, Aspectos de Investigación Educativa. Fondo de Cultura Económica. En prensa.

Goldin, G. & Kaput, J. (1996). *A Joint Perspective on the Idea of Representation in Learning and Doing Mathematics*. Theories of Mathematical Learning. Paul Cobb, Gerald A. Goldin & Brian Greer. Pp. 397-430. Lawrence Erlbaum Associates. Publishers Nahwah, New Jersey.

Roth W-M (1999). *Professionals Read Graphs: A Semiotic Analysis.* Journal for Research in Mathematics Education. En prensa.

Yerushalmy, M. & Schwartz, J. (1993). *Seizing the Oportunity to Make Algebra Mathematically and Pedagogically Interesting.* In T.A. Romberg, E. Fennema & T. P. Carpenter (Eds.). Integraing Research on the Graphical Representation fo Functions. Pp. 57-68. Hillsdale, Nj: Erlbaum.

ENSEÑANZA DE MATEMÁTICA CON SOFTWARE DERIVE

Nydia Dal Bianco; Rosana Botta Gioda; Nora Castro; Silvia Martínez;
Mariela Pérez Broneske; Rubén Pizarro y Fabio Prieto
Universidad Nacional de La Pampa, Argentina
dalbianco@exactas.unlpam.edu.ar, rbotta@cpnet.com.ar,
smartinez@exactas.unlpam.edu.ar

Resumen

Nuestra propuesta forma parte de un proyecto de investigación que estamos llevando a cabo docentes de la cátedra de Matemática perteneciente al primer año del plan de estudio de las carreras de Ciencias Naturales y Química de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de La Pampa. El marco teórico que sustenta este trabajo de investigación sigue los lineamientos de la Ingeniería Didáctica propuestos por Michèle Artigue. Actualmente desarrollamos la fase de experimentación. Los primeros avances realizados en este sentido se llevaron a cabo durante el ciclo lectivo 2001 en el cual se utilizó el material de las clases teóricas, prácticas y un apunte del software DERIVE, preparado por la cátedra, con varios ejemplos de aplicación cuyo objetivo era facilitar la primera aproximación de los alumnos al software. Durante el ciclo lectivo 2002 se realizaron más experiencias en el desarrollo del tema aplicaciones de las derivadas. El software mencionado tiene como finalidad brindar apoyo didáctico al alumno en las etapas de la resolución de problemas: ejecución del plan y verificación de la solución obtenida, para eventualmente corregir errores y resolver cálculos que presentaran algún grado de dificultad importante. En esta propuesta relatamos una experiencia llevada a cabo en el estudio de los temas de la currícula de Matemática: Cónicas, funciones y derivadas. Aunque los resultados son todavía parciales, reflejan la importancia y necesidad del uso de la Informática en el proceso de enseñanza - aprendizaje de la Matemática.

Introducción

Esta experiencia se llevó a cabo en la cátedra de Matemática a la cual asisten alumnos de diversas carreras de Ciencias Naturales y Química. La materia es de régimen anual y corresponde al primer año del plan de estudios. La currícula de esta asignatura involucra gran variedad de temas relacionados con el Álgebra y el Cálculo. Las dificultades que manifiestan los alumnos, en cuanto al manejo de conocimientos previos relacionados con la Matemática, la falta de motivación, los altos índices de desaprobación han hecho que los integrantes de esta Cátedra nos esforcemos para revertir esta situación. En este sentido hemos trabajado hace ya algunos años en diferentes proyectos de investigación que tienen a la enseñanza de la matemática como eje principal. La aparición de las nuevas herramientas tecnológicas, acompañadas del desarrollo de softwares específicos como Derive imponen la necesidad de reformular nuestra forma de enseñar, dándole al alumno la posibilidad de que gradualmente se familiarice con estas herramientas. El marco teórico que sustenta nuestro trabajo sigue los lineamientos que sugiere Michèle Artigue en la metodología de una ingeniería didáctica.

Utilizando de forma apropiada las computadoras pueden introducirse sin mayores dificultades, situaciones problemáticas que vinculen el campo de estudio de los alumnos y donde sea necesario realizar excesivos cálculos.

El cambio propuesto en la asignatura se esta haciendo de a poco, por lo tanto se continúa con las clases teóricas, que actualmente, se dictan en forma tradicional, pero se está planificando incorporar la utilización del asistente para auxiliar al profesor en la comunicación con los estudiantes, visualizando algunos conceptos de mayor complejidad o de mayor nivel de abstracción y las clases prácticas, se realizan algunas en sala de computación, y otras en el aula asumiendo que no existe conocimiento sin problema, es decir para conocer debe haber siempre algo para resolver, para elaborar por parte del estudiante.

Nos parece interesante compartir una reflexión de Claudi Alsina[•]:

> *"De nada sirve refugiarse en la validez de lo tradicional (y por tanto seguro) cuando el mundo va por otros senderos, cuando las necesidades formativas hace tiempo que cambiaron, cuando los empleos perennes desaparecieron, cuando el ocio ha cambiado radicalmente, cuando las relaciones familiares han evolucionado…Si algo nos obliga a remeditar el rol de la tecnología en nuestra labor matemática no es la curiosidad intelectual del "a ver que va a pasar" sino el intento de renovar una formación que ya, para muchos, es obsoleta."*

Desarrollo

Para esta experiencia y como lo venimos haciendo desde hace dos años hemos aplicado técnicas de una ingeniería didáctica, caracterizada por un esquema experimental basado en las "realizaciones didácticas" en clase, según Michèle Artigue, es decir, siguiendo las cuatro fases en que se halla dividida, siendo estas las fases de Experimentación y Evaluación.

Para concretar las mismas elegimos el programa *Derive for Windows 4.0* por las siguientes razones:

- ser sencillo y potente,
- utilizar las notaciones propias de la Matemática,
- poseer un entorno fácil de manejar,
- demandar al alumno poco tiempo conocerlo.
- trabajar con entorno gráfico
- disponer del software en la Facultad.

Para organizar el trabajo de los alumnos se formaron comisiones en las cuales los estudiantes se inscribieron en forma voluntaria, pero debían ser alumnos que habían realizado el diagnóstico inicial (Análisis preliminar) en el comienzo de clases, haber estado presentes en los exámenes parciales (Análisis a priori) y cumplir con cierto régimen de asistencia. Para incentivarlos a participar los alumnos inscriptos en esta modalidad debieron presentar un trabajo desarrollado con Derive (Experimentación), referido a algunos temas puntuales que nosotros especificamos, temas que luego no eran evaluados en el examen final de la asignatura (Evaluación).

Metodología

1) Los alumnos asistieron a las clases teóricas donde se desarrollaron los temas de la currícula con ejemplos prácticos.

2) En la clase práctica se trabajó con un cuadernillo de actividades, que contiene ejercitación diversa sobre los temas desarrollados, incluyendo una amplia variedad de situaciones problemáticas relacionadas con sus campos de estudio, que intentan responder al interrogante de los alumnos ¿cuál es la vinculación de la Matemática con su disciplina?, sin duda un cambio gradual en la metodología de enseñanza puede modificar algunas de estas actitudes de rechazo. Este cambio puede apoyarse en la adopción de las nuevas tecnologías, mas específicamente de la computadora.
3) En el laboratorio, con el software DERIVE los alumnos trabajaron en una primera clase introductoria, se dieron algunas pautas generales con el apunte entregado, que contiene información específica sobre el uso del software y ejemplos de aplicación desarrollados paso a paso para que tengan un acercamiento más rápido al software. Este trabajo se realizó destinando parte de la carga horaria de las clases prácticas así como también algunas horas extra-clase, en la que los alumnos concurrieron al gabinete de informática acompañados por algún docente.

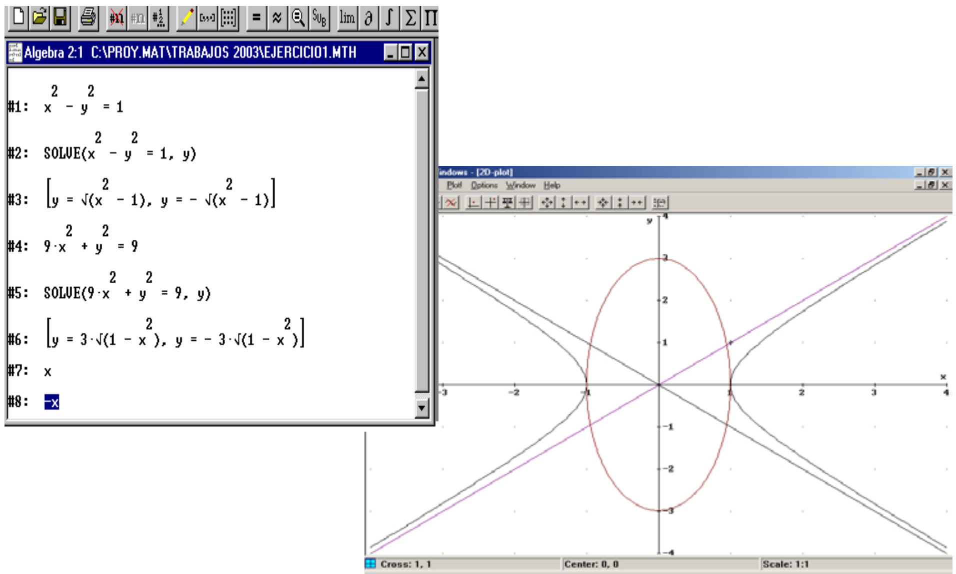
   En primer lugar se plantearon y resolvieron algunos ejercicios en lápiz y papel y luego se verificaron algunos de los resultados con el software especificado, como una primera aproximación.

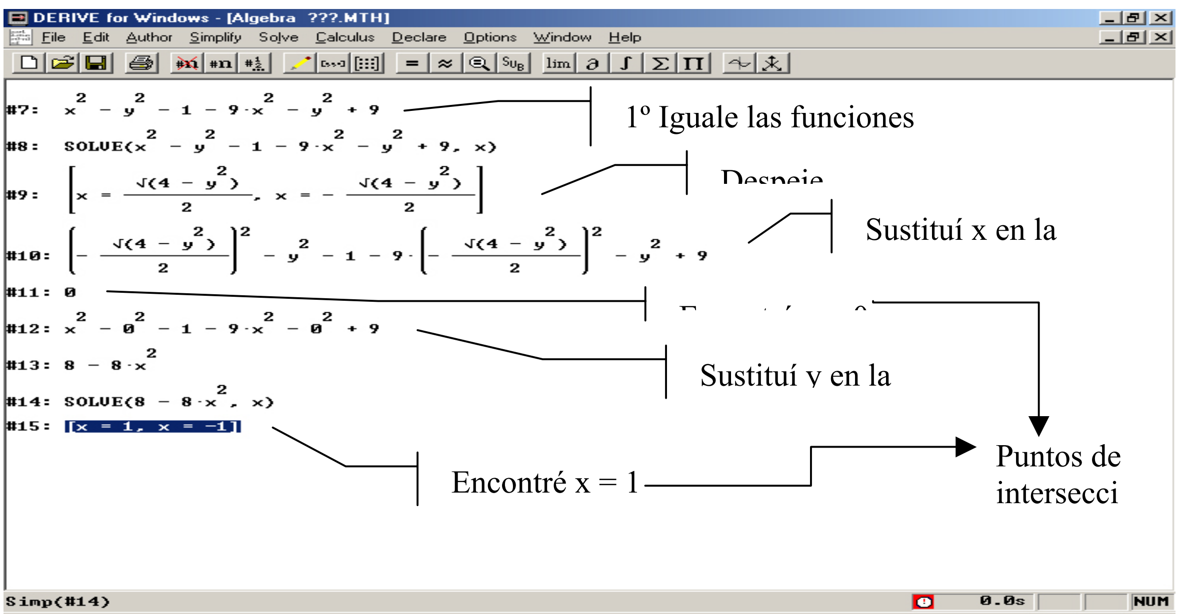
   Para luego pasar a la resolución de problemas seleccionados con aplicaciones específicas a los temas de sus carreras y con mayor dificultad en la utilización de cálculos.
4) Encuesta a los alumnos que participaron de la experiencia.
5)

A continuación mostramos, el trabajo realizado por un alumno con un ejercicio de la práctica de cónicas, como una primera aproximación al uso del software:

Nº 1. Resolver el siguiente sistema: $\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ 9x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$

" Ingresé las dos funciones y a ambas les despejé la "y" para poder graficarlas, e ingresé las asíntotas para graficarlas."





En la transcripción textual del trabajo entregado por el alumno, destacamos la aplicación del software y la secuencia de actividades utilizadas para la solución algebraica y gráfica del ejercicio dado.
Presentamos el enunciado, de una aplicación a la Biología del tema derivadas, mostrando qué tipos de ejercicios deben aprender a resolver nuestros alumnos.

Nº 2. El nivel en la sangre de sulfanilamida en los ratones después de una inyección de 1mg. por cada 4 grs. de peso, está descrito por:
$$\mathbf{y = -1{,}06 + 2{,}59\,x - 0{,}77\,x^2}$$

donde y indica el $\log_{10}$ (concentración en mg./1000 ml) y x es $\log_{10}$ (tiempo en minutos después de la inyección). Resolver analítica y gráficamente: ¿Para qué valor de x el nivel en la sangre, medido en y, tiene un máximo?.
Los alumnos responden y grafican rápida y correctamente utilizando el software DERIVE.
Nuestra intención con este tipo de problemas es crear situaciones activas de aprendizaje, dar sentido a los contenidos matemáticos que estudian y dar una aplicación práctica.

Resultados

Todo este trabajo con los alumnos como dijéramos al principio se lleva a cabo dentro de la metodología que aplicamos en el proyecto, de Ingeniería Didáctica según Michèle Artigue; que consta de cuatro fases, aquí mostramos la de Experimentación y Evaluación de resultados.

En la aplicación de estas etapas se pueden apreciar los siguientes logros:

- Los estudiantes conocen más profundamente los algoritmos que en cursos anteriores.
- Conocen el programa y son capaces de utilizarlo en su práctica.
- A lo largo del curso se sienten más motivados hacia la asignatura que en años anteriores debido a:

    a) Una mayor vinculación a su especialidad.
    b) La posibilidad de resolver problemas más reales e interesantes.
    c) Mayor agilización de los cálculos manuales.
    d) Utilización de las gráficas que brinda el software para resolver y validar resultados.

Las encuestas realizadas a los alumnos arrojaron las siguientes respuestas:

1. La utilización del software no presentó dificultades importantes.
2. Facilita la resolución de problemas que requieren gran cantidad de cálculos.
3. Se descubren estrategias de control de los resultados obtenidos (utilizando distintos caminos de resolución)
4. Agiliza la gráfica de funciones.
5. El proceso de aprendizaje es más dinámico.

Los docentes a cargo de la experiencia observamos en los alumnos mayor interés por la materia, lo que les ha permitido una mejor apropiación de los contenidos. Favoreció la comprensión al poder visualizar la interacción entre los distintos marcos (algebraico y gráfico) y generó un espacio de estudio dentro del cual se logró un mejor aprovechamiento de sus posibilidades cognoscitivas.

Conclusiones

La intención de este trabajo fue dar herramientas a los futuros profesionales de las Ciencias Naturales, utilizando nuevas y variadas estrategias metodológicas para lograr la aprehensión de los estudiantes al concepto matemático.
Combinando los recursos tradicionales y la resolución de problemas con los informáticos se facilitan los procesos de enseñanza – aprendizaje y el desarrollo de capacidades y competencias.
A partir de estas experiencias positivas, se predispone al alumnado a continuar con el desarrollo de actividades similares y contribuye a mejorar su autoestima y la actitud hacia la Matemática (esta deja de ser una asignatura sin sentido) facilitando que se impliquen en su aprendizaje.
A partir de esta propuesta surgieron interesantes opiniones de los que participamos en ella, docentes y estudiantes, acerca del uso de la tecnología, y lleva a reflexionar sobre el interés de continuar este tipo de actividades con la utilización de las herramientas informáticas disponibles.

Bibliografía

Artigue, M. (1993). *Epistemología y Didáctica.* Traducción castellana de Bernardo Capdevielle, Ministerio de Educación de la Nación, Argentina.

Artigue, M. y otros (1995) *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.* Grupo Editorial, Iberoamericano, Bogotá

Carrillo, A.; Llamas, I. (1995). *Derive. Aplicaciones matemáticas para PC.* RA - MA. España.

Chevallard, I y otros (1997) *Estudiar Matemáticas. El eslabón perdido entre la Enseñanza y el aprendizaje* ICE-HORSORI. Universidad de Barcelona.

Larson, R. y otros (1995) *Cálculo y Geometría analítica.* Quinta Edición . Mc Graw-Hill. España. .

Machin, D.(1976) *Introducción a la Biomatemática.* Editorial Acribia. España.

Stewart, J. (1998) *Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas.* Tercera Edición. International. Thomson Editores S.A. Mexico.

Claudi, A.(1998). Multimedia, navegación, virtualidad y clases de matemáticas. *Revista Uno.* Nº15

EVALUACIÓN DE UN CURSO DE CÁLCULO DESDE UNA PERSPECTIVA CONSTRUCTIVISTA

Ofelia Vizcaíno Díaz
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, Campus Ciudad de México
ovizcain@campus.ccm.itesm.mx

Resumen

La evaluación es una actividad compleja que involucra una gran cantidad de aspectos a ser tomados en cuenta tales como metodología de enseñanza, concepciones del profesor y de los estudiantes acerca de cómo se debe enseñar para aprender, actividades planteadas al interior del aula, currículo, objetivos institucionales, etc. Qué tan efectivas fueron éstos en conjunto es el objetivo de la evaluación. La evaluación debe convertirse en un proceso enriquecedor que permita replantear cada uno de los aspectos anteriores. Por otro lado debe permitir a los profesores describir la situación académica de los estudiantes de la manera más fidedigna posible, otorgando tanto a estudiantes como a profesores e institución la oportunidad de reconocer las fortalezas y debilidades con el único fin de mejorar la parte que a cada uno le corresponde. Es importante mencionar que existe poca investigación alrededor de este importante aspecto del proceso de enseñanza y aprendizaje. En la posición de un grupo de investigadores RUMEC se plantea: ¿Qué podemos hacer para mejorar el aprendizaje de los estudiantes? Éste sugiere estrategias para conseguir la mejora del proceso de enseñanza y aprendizaje, las cuales involucran varias innovaciones entre las cuales se incluyen: el ciclo de enseñanza ACE (actividades en la computadora, discusiones en el salón de clase y ejercicios), el aprendizaje colaborativo, discusiones diseñadas para estimular la construcción de conceptos matemáticos. Todas éstas fundamentadas en la teoría APOE (Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas). Pero surgen las interrogantes: ¿cómo evaluar el conocimiento de un estudiante si su trabajo siempre ha sido colaborativo? ¿qué significado puede tener la respuesta a una pregunta específica en un examen cronometrado? ¿cuál debe ser el mejor criterio para decidir su calificación final? Implementan una metodología de evaluación que combina datos cuantitativos y cualitativos para determinar la construcción de estructuras mentales. El acercamiento anterior nos presenta una perspectiva interesante pero aún inconclusa acerca de la evaluación del proceso enseñanza y aprendizaje; sería nuestro deseo una mayor investigación alrededor de ella. La evaluación de los aprendizajes de cualquier clase de contenidos debe poner al descubierto lo más posible todo lo que los alumnos dicen y hacen al construir significados valiosos a partir de los contenidos curriculares. De ahí la importancia de recurrir a la experiencia y habilidad del docente para plantear tareas e instrumentos de evaluación sustantivas que sean sensibles e informativas. Si los profesores no contaran con las presiones administrativas conocidas, seguramente la metodología de evaluación elegida no serían los exámenes.

Este proyecto plantea la hipótesis: ¿La evaluación de los estudiantes a través del tratamiento instruccional ACE genera las mismas notas de evaluación a través de entrevistas personalizadas? Nadie puede negar que la evaluación del proceso de enseñanza y aprendizaje es una actividad compleja para los profesores, sin embargo los métodos simplistas para mejorar ésta pueden generar resultados muy pobres y tal vez contraproducentes, pero al mismo tiempo ese análisis constituye una tarea necesaria y fundamental en la mejora de dicho proceso. Es compleja porque dentro del proceso educativo puede analizarse prácticamente todo, lo cual implica aprendizajes, enseñanzas, acción docente, contexto educativo, programas, currículos y aspectos institucionales. La evaluación del proceso de enseñanza y aprendizaje dentro de una metodología tradicional asigna a cada alumno un valor numérico que parece ser de su exclusiva responsabilidad; así la calificación del alumno para los padres, profesores y los mismos alumnos es el resultado de su capacidad y su falta o derroche de esfuerzos. En el caso de fracasar será él quién deberá pagar las consecuencias. Sólo él deberá cambiar. Lo demás, podrá seguir como estaba. Nadie cuestiona a los profesores acerca de los aspectos que se tomaron en cuenta para generar la evaluación de los estudiantes. La evaluación se convierte en proceso conservador. Sin la información que nos proporciona la evaluación no tendríamos argumentos suficientes para proponer correcciones y mejoras al proceso de enseñanza y aprendizaje. Al desempeñar su función en alguna institución educativa, cualquier docente tiene una cierta concepción implícita del modo en que se aprende y se enseña, así como una cierta concepción coherente con ésta, sobre cómo, cuándo, por qué, y para qué evaluar, con el fin de poder asegurarse que las experiencias educativas que proponga en el acto de enseñanza produzcan datos positivos. El conseguir que los estudiantes se apropien de los conceptos específicos del curso es el único fin de los profesores, pero esto no ocurre por el simple deseo de que así sea, ahí entran en juego varios aspectos: el contenido, las creencias del profesor, la metodología usada para la enseñanza, la teoría cognitiva elegida, las actividades planteadas a los estudiantes, los objetivos institucionales, etc., qué tan efectivos han resultado en conjunto éstos es el objetivo de la evaluación. Aportar a la reflexión en este ámbito es el propósito de este artículo.

Antecedentes

En los últimos años han aparecido distintas aproximaciones y paradigmas sobre el aprendizaje de las matemáticas cuyo objetivo principal es ayudar a los estudiantes a aprender Cálculo. Sin embargo poca ha sido la investigación en torno a la evaluación en éstas aproximaciones. En la posición de un grupo de investigadores RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Community) se plantea entre muchos otros el siguiente cuestionamiento: ¿Qué podemos hacer para mejorar el aprendizaje de los estudiantes? (Ver Dubinsky, E., 1992. [13]). El grupo plantea estrategias para conseguir la mejora del proceso de enseñanza y aprendizaje las cuales involucran varias innovaciones entre las cuales se incluyen: el ciclo de enseñanza ACE (actividades en la computadora, discusiones en el salón de clase y ejercicios), el aprendizaje colaborativo, la construcción por parte de los estudiantes de sus conceptos matemáticos en la computadora, discusiones diseñadas para estimular la construcción de conceptos matemáticos. Todas éstas fundamentadas en la teoría APOE. Pero surgen las interrogantes: ¿cómo evaluar el conocimiento de un estudiante si su trabajo siempre ha sido colaborativo?; si ellos han construido los conceptos matemáticos en la computadora, ¿cómo decidir si esas mismas construcciones se han dado en su mente? ; ¿qué significado puede tener la respuesta a una pregunta específica en un examen cronometrado? ; ¿los estudiantes entendieron en la pregunta lo mismo que el profesor quiso preguntar?, ¿cómo podemos decidir con certeza si un estudiante aprendió matemáticas en su curso?, ¿cuál debe ser el mejor criterio para decidir su nota final?. Implementan una metodología de evaluación que combina datos cuantitativos y cualitativos para determinar la construcción de estructuras mentales en los estudiantes y concluyen que si los estudiantes participan en todas las actividades del curso, cooperan en sus grupos, realizan razonablemente bien sus exámenes, etc., entonces las construcciones mentales fueron hechas. La evaluación aplicada a los estudiantes incluye:
Tareas semanales en la computadora, *tareas semanales*, *discusiones en el salón de clase. tres exámenes parciales y un examen final.*.
La calificación final dada a los estudiantes es obtenida dando un peso igual a cada uno de los rubros anteriormente citados. Los acercamientos anteriores nos presentan una perspectiva interesante pero aún inconclusa acerca de la evaluación del proceso enseñanza y aprendizaje; sería nuestro deseo una mayor investigación alrededor de ella.
Ningún instrumento es por sí mismo suficiente si no se utiliza en forma inteligente y reflexiva.

Planteamiento del problema

El trabajo de un grupo de investigadores (RUMEC) ha mostrado una posición novedosa e interesante con respecto a la evaluación del aprendizaje de las matemáticas. Reclaman una actividad efectiva de los estudiantes para crear su propio conocimiento, para esto diseñan un tratamiento instruccional ACE que se fundamenta en la teoría APOE. El tratamiento instruccional consta de una serie de actividades que ellos realizan en el laboratorio de

computación, discusiones en clase y ejercicios tradicionales. Afirman que el análisis de la consecución de los objetivos matemáticos debe hacerse basándose en la conducta de los alumnos frente a ciertas actividades o tareas matemáticas en el aula y no sólo respecto pruebas cerradas. En este nuevo tipo de análisis de logros cognitivos se afirma que la reflexión epistemológica sobre la construcción del conocimiento proporciona ideas sobre diversos tipos de fenómenos de aprendizaje que sobrepasan lo que un examen puede interpretar; de manera que la evaluación pasa a ser un eje importante del proceso educativo.
Sin embargo aún existen cuestionamientos en torno a esta metodología de evaluación :
Las tareas computacionales semanales realizadas en equipo tienen por objetivo permitir que los estudiantes mediante el trabajo colaborativo construyan las estructuras mentales necesarias para apropiarse de un concepto, pero si el trabajo lo realizaron en equipo..., ¿cómo tener la seguridad de que cada uno de los integrantes construyó las estructuras mentales necesarias para conseguir tal objetivo?, ¿cómo tener la seguridad de que la calificación asignada al equipo, tiene validez para cada integrante?, ¿cómo poder asignar la calificación a un estudiante de la manera más justa posible?.
Por otro lado los ejercicios tradicionales son entregados semanalmente y por equipo, pero, ¿cómo podemos asegurarnos de que éste fue realizado realmente en equipo?, ¿cómo asegurar que cada estudiante entiende y puede resolver cualquiera de los ejercicios entregados?
En el primer examen por equipo en el cual cada integrante recibe la misma calificación, ¿será justa esta medida para todos los integrantes del equipo?, ¿participaron en la misma medida cada uno de los integrantes del equipo?
Segundo examen resuelto individualmente, cada alumno recibe dos calificaciones, la de su examen y el promedio de calificaciones de los integrantes de su equipo, ¿qué tan justo es asignar a cada estudiante el promedio de las calificaciones de su equipo?. Tercer examen igual.
Examen final resuelto individualmente además de contar con un tiempo límite para su realización, cada alumno recibe sólo su calificación. ¿Qué tanto puede reflejar la calificación de éste los conocimientos del alumno posee?, ¿de qué manera influye en la realización de un examen limitar el tiempo para su resolución?.
Participación en clase, cada alumno recibe una calificación por actividad efectiva durante las sesiones de resolución de problemas.
¿De qué manera esta metodología de evaluación contribuye a la aprobación de alumnos que no deben ser aprobados?, ¿de qué manera el trabajo colaborativo contribuye a esta situación?
Por otro lado una metodología de evaluación capaz de generar con mayor certeza la nota de un estudiante es a través de una entrevista personalizada. La cual mediante un adecuado diseño, aplicación y análisis debe permitir al profesor percibir la calidad y cantidad de conocimientos que posee cada uno de los estudiantes, así como el nivel de construcción de estructuras cognitivas que el alumno ha desarrollado. Esta metodología de evaluación que parece ser la solución educativa, ya que proporcionaría la información necesaria acerca de la adquisición de los conocimientos de un alumno al terminar un curso, presenta varias desventajas. Por un lado el diseño de los cuestionamientos aplicados deben poner al descubierto el nivel de desarrollo cognitivo de los estudiantes, es decir, no contener preguntas cerradas; para lo cual requiere práctica en la elaboración de éstos por parte del profesor. Además del diseño de una metodología que permita la recopilación y análisis de

información cuantitativa, que oriente al profesor en la toma de la decisión acerca de la nota que le corresponde a cada estudiante. Además de la gran cantidad de tiempo que requiere la aplicación y análisis de cada una de las entrevistas. Todo lo anterior la vuelve una metodología impráctica para ser usada durante los cursos. Este trabajo desea comparar la metodología de evaluación planteada a través del tratamiento instruccional ACE fundamentada en la teoría APOE, con una metodología de evaluación que da un acercamiento más real a la situación cognitiva de los estudiantes, consistente en entrevistas personalizadas a alumnos seleccionados aleatoriamente. La propuesta de este anteproyecto de Tesis es: ¿La evaluación de los estudiantes a través del tratamiento instruccional ACE genera las mismas notas que la evaluación a través de entrevistas personalizadas? Haciendo uso de métodos cualitativos y cuantitativos generar un panorama de las ventajas y desventajas que esta evaluación conlleva.

Avances de investigación

Evaluación propuesta por RUMEC

Durante el semestre agosto-diciembre de 2001 se implementó en un grupo de Cálculo la metodología planteada por RUMEC, mediante la cual se sugiere el ciclo de enseñanza ACE fundamentado en la teoría APOE. El objetivo de esta implementación fue investigar si la evaluación planteada por RUMEC generaba los mismos resultados que los que vertiera una evaluación realizada a través de entrevistas personalizadas.
Para realizarla se consiguieron las siguientes condiciones:

1. Organización del curso en semanas.
2. Organización de los alumnos en grupos de trabajo permanentes.
3. Actividades colaborativas realizadas en computadora.
4. Organización de discusiones en el salón de clase.
5. Realización de ejercicios tradicionales.
6. Realización del primer examen de manera colaborativa.
7. Realización del segundo examen resuelto de manera individual.
8. Realización del tercer resuelto de manera individual.
9. Realización de un examen final resuelto de manera tradicional.
10. Registro de las participaciones de los estudiantes durante las discusiones y resolución de problemas por equipos.

La distribución del curso en semanas se hizo con el objetivo de aplicar en la medida de lo posible el ciclo de enseñanza ACE fundamentado en la teoría APOE. La organización del grupo en equipos permanentes de trabajo fue hecha con el fin de que las actividades en computadora, tareas y ejercicios fueran realizados y entregados por equipo. Las actividades en computadora fueron realizadas la primera sesión de cada semana. Los estudiantes recibieron la instalación del programa que contenía el lenguaje ISETL en cada una de sus computadoras, además de que se encontraba instalado en un laboratorio de computación al cual ellos tenían acceso durante toda la semana de 7:00 a 19:00 horas. Los primeros acercamientos que tuvieron los estudiantes con ISETL fueron de duda, ¿para qué necesitamos un lenguaje de programación para aprender matemáticas?
Para conseguir una actitud de aceptación hacia las actividades fue necesario explicarles una y otra vez que la filosofía del curso planteaba la necesidad de la formación de estructuras

cognitivas previas al encuentro con los conceptos a estudiar. Las discusiones en el salón de clase se llevaban a cabo la segunda sesión de cada semana, iniciando con el planteamiento de actividades a desarrollar de manera colaborativa y que podían ir desde 5 hasta 15 minutos al término. Finalmente cuando se consideró apropiado, se decidió dar explicaciones, respuestas y notaciones necesarias para los estudiantes, además en esta sesión se daban los teoremas, pruebas, ejemplos y contraejemplos necesarios para el concepto matemático estudiado. La circulación por el salón de clase durante las actividades permitía observar qué estudiantes permanecían al margen de la discusión, hacer anotaciones y durante la discusión del grupo completo se trataba de hacerlos participar. Esta actividad de volvió muy importante ya que permitía detectar qué estudiante necesitaba ayuda.
Al final de cada semana se entregó una serie de ejercicios que los estudiantes resolvieron en equipo, éstos fueron esencialmente tradicionales.
Al principio los estudiantes repartían los ejercicios entre el número de integrantes, ellos no veían la importancia de trabajar colaborativamente para aprender matemáticas, si por alguna razón tenían dudas respecto a la resolución que daban recurrían a la ayuda del profesor, pero se les indicaba que antes de buscarla tenían que discutir y buscar la solución ellos mismos. El primer examen fue realizado en equipo y cada estudiante del equipo recibió la calificación obtenida en éste. A pesar de que podría pensarse que los resultados para los estudiantes sería bueno, no ocurrió así. El problema principal durante el desarrollo de este primer examen fue que los equipos que no habían trabajado colaborativamente entregaron exámenes no muy buenos, al cuestionarlos comentaban que no fue fácil ponerse de acuerdo y además invirtieron mucho tiempo explicar a los estudiantes que no comprendían la solución.
El segundo examen fue realizado individualmente y cada estudiante recibió dos calificaciones la de su examen y el promedio de las calificaciones de los integrantes de su equipo. El tercer examen fue realizado de la misma manera que el segundo. Éste presentó menos discusiones acerca de sus calificaciones. El examen final fue realizado de manera tradicional, es decir individualmente y con tiempo límite para su entrega; cada estudiante recibió solamente su calificación.
Se trató de llevar un registro de las participaciones de cada uno de los estudiantes durante el desarrollo de las actividades colaborativas (en computadora, discusiones y resolución de problemas) de manera que se pudiera tener una más o menos clara idea de la situación en el proceso de aprendizaje de cada uno de ellos. Se recordaba constantemente a los estudiantes que un ingrediente importante para el éxito en el proceso del aprendizaje era su actitud ante tal proceso. Para obtener la evaluación final de cada estudiante se le dio un peso igual a cada una de las actividades contenidas en los números del 3-10. Con esta metodología se realizó la evaluación del grupo.

Evaluación generada a través de una entrevista personalizada

Uno de los objetivos de la evaluación es describir la situación cognitiva y de habilidades del estudiante al terminar un curso, pero cuál es la mejor manera de conseguir que ocurra. Si pudiéramos elegir libremente y sin presiones administrativas los exámenes no se verían muy favorecidos, quizá optaríamos por una entrevista personalizada a cada uno de los estudiantes. Pero esta opción se vuelve impráctica por el tiempo que debemos invertir en la aplicación y análisis de éstas a fin de conseguir una evaluación que realmente describa la situación cognitiva del alumno.

Este proyecto trata de verificar mediante una entrevista personalizada la evaluación planteada por RUMEC, es decir pretende mostrar que el uso indistinto de la metodología de evaluación (la propuesta de RUMEC y una entrevista personalizada) generan la misma nota final del curso.
Para tal efecto se hizo una selección aleatoria de 10 estudiantes que habían cursado la materia de Cálculo con el ciclo de enseñanza ACE fundamentado en la teoría APOE.
La entrevista consistía de 7 preguntas seleccionadas aleatoriamente de un total de 11.
Después de haber seleccionado al azar las preguntas que contestarían en su entrevista se les pedía que al mirarlas con un poco de atención, decidieran por cuál empezarían, se le proporcionó el papel necesario para hacer operaciones, analizar y resolver los problemas.
La pregunta que se hizo a todos los estudiantes antes de iniciar la resolución de cada problema fue: ¿Entiendes qué se te pide que hagas en el problema?
El profesor permanecía como observador y en caso de notar titubeo en la respuesta procedía a cuestionar al estudiante acerca de lo que hacía y por qué lo hacia, siempre con el objetivo de que el estudiante reflexionara acerca de su respuesta; y que por otro lado se pudiera percibir realmente cuál era la situación cognitiva del estudiante al dar la respuesta al problema. Se le pedía al estudiante que escribiera todo lo que pensara que lo ayudaría a resolver el problema.
Se registraba lo que el estudiante contestaba a los cuestionamientos planteados de la manera más fidedigna posible, se evitaba dar opiniones y no manifestar aprobación o desaprobación en el tono de voz usado. Se sugería al estudiante estar lo más tranquilo posible de manera que el estrés no fuera un factor que sesgara la información que vertiera tal entrevista.
La entrevista a los 10 estudiantes se llevó a cabo en 7 días y el análisis de cada de éstas realizó en diez días.
Al final de cada entrevista se les preguntaba a los estudiantes; ¿qué evaluación te pareció mejor, la realizada durante el curso o la entrevista y por qué?
La mayoría de los estudiantes expresaron que la entrevista es mejor porque permite que el profesor conozca lo que el estudiante tiene en su mente y quiere explicar pero, a veces no puede.
A pesar del tiempo invertido en las calificaciones de los estudiantes mediante una entrevista personalizada sus calificaciones no cambiaron sustancialmente son respecto a la obtenida en el curso.

Bibliografía

Asiala M., Brown A., DeVries D., Dubinsky E., Mathews D., Thomas K. (2000). A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education, *Research in Collegiate Mathematics Education II, CBMS Issues in Mathematics Education, 6,* 1996.

Baquero, R. (1997), *Vigotsky y el Aprendizaje Escolar*, 2ª. Edición. Aique. Argentina.

Dubinsky, E. (1991). *Reflective Abstraction in advanced mathematical Thinking*. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 231- 243). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Dubinsky, E. (1995). Assessment in one Learning Theory Based Approach to Teaching. In *Gold B. Mathematical Association of America*.

Dubinsky, E. (with D. Tall) (1991). Advanced *Mathematical Thinking and the Computer in Advanced Mathematical Thinking* (D. Tall, ed.), Kluwer (1991), 231-250.

EVALUACION DE UNA EXPERIENCIA DIDACTICA

Mónica Caserio, Martha Guzmán y Ana Vozzi
UTN, UNR, Rosario, Argentina
caserio@fceia.unr.edu.ar, mguzman@fceia.unr.edu.ar, amvozzi@fceia.unr.edu.ar

Resumen
En este trabajo se comenta la "puesta apunto" de una investigación que se viene realizando con alumnos de la carrera de Ingeniería en Sistemas de Información de la UTN en seis cursos de la asignatura Algebra y Geometría. Se trata de evaluar la aplicación de una estrategia didáctica – la que tiene como eje fundamental el autoaprendizaje y su importancia en la incorporación de habilidades investigativas y de producción propia- teniendo en cuenta la opinión de estudiantes involucrados.

Introducción

En el presente trabajo se muestra un aspecto de la evaluación de la investigación cuyo reporte fue: "Una estrategia didactica para el aprendizaje de superficies", presentado en Relme 15. Esa evaluación consiste en el análisis de los resultados obtenidos en la aplicación de la experiencia, con el aporte de la visión de los estudiantes involucrados en ella. La estrategia didáctica aplicada se sostenía en tres ejes fundamentales: la visualización, el autoaprendizaje y la investigación acción y se explayaba respecto de la verificación de las etapas del desarrollo de la percepción espacial señaladas por R. Pallascio y otros: *Visualización – Estructuración – Traducción – Clasificación.*
En la misma se intentaba incentivar en los estudiantes el espíritu de búsqueda, de indagación, favoreciendo su independencia y creatividad, pretendiendo llevar a los alumnos a una forma de pensamiento matemático que supere al mero aprendizaje memorístico, y cuya meta es la comprensión, la retención de la información y el uso activo del conocimiento. El tema elegido para realizar esta experiencia fue el estudio de superficies, apoyado con la herramienta informática, trabajando en grupos con la orientación del docente. En el marco de la investigación acción y dentro de la indagación autorreflexiva que la misma conlleva, focalizamos, nuestro interés en la evaluación del proceso de autoaprendizaje considerando fundamentalmente su impacto en los estudiantes.

El proceso de aprender

Entendemos que la Universidad no solo tiene una finalidad "profesionalizante", sino que debe asumir su papel *educativo*, cual es colocar al alumno en condiciones de aprender por sí mismo, posibilitar que pueda vincular lo que aprende con lo que puede llegar a aprender. De ahí que el método de enseñanza deba acercarse lo más posible al método de investigación. Porque "....ocurre que la Universidad, hoy, es una institución diferente, abierta al medio, orientadora, indagadora del saber y reconstructora del mismo; profesionalizante y básicamente transformadora de la realidad, que le permite realizarse como una institución contemporánea formadora de profesionales creadores, realistas, críticos..."[5] Uno de los elementos que aparece reiteradamente en los diagnósticos de los ingresantes, además de las falencias en los conocimientos matemáticos, es su falta de curiosidad respecto de los por qué y el casi inexistente hábito de buscar y/o investigar sobre

[5] Ovide Menim – Pedagogía y Universidad – Homo Sapiens Ediciones- 1998

los contenidos curriculares. Pretendemos, por lo tanto, propiciar un saber crítico y problematizante donde lo prioritario es la búsqueda, el cuestionamiento antes que las conclusiones definitivas. Dado que este trabajo se realiza en una facultad formadora de ingenieros, es imprescindible que esta orientación se impulse desde los primeros años. En esta propuesta seleccionamos temas que “quedan” para que el alumno estudie solo, lo que nos da la oportunidad de implementar una estrategia de aprendizaje que favorezca el “autoaprendizaje”. Entendemos por estrategia de autoaprendizaje toda aquella acción que incluye pensamiento o comportamiento que ayude a adquirir información de modo que ésta se integre a la ya existente.

El proceso educacional es una tarea realizada por estudiantes y profesores. Cada estudiante debe aprender cómo convertirse en su propio instructor para toda la vida. Una de sus finalidades debe ser hallar el modo de aprender aquello que no sabe o no conoce. Debe desarrollar habilidad para adquirir nuevos conocimientos matemáticos y aplicarlo con criterio ante situaciones nuevas. La enseñanza, en su más alto nivel, implica cooperación con el estudiante de modo de ayudarle en ese desarrollo a “pensar”. Es necesario despertar entusiasmo, buenos hábitos para aprender, buenas características de juicio crítico, un cabal razonamiento lógico-formal y anhelo por aceptar el desafío que se plantean en diferentes contextos y los nuevos problemas en la vida profesional. Aprender y enseñar son partes de un mismo proceso. La enseñanza en el nivel superior se basa, en cierta forma, en una clara apreciación del proceso de aprender. Un conocimiento del desarrollo de este proceso ayuda a ambas partes: estudiantes y profesores a realizar su tarea en común.

En esta experiencia tomamos de distintas teorías del aprendizaje, aquellas concepciones que a nuestro juicio aportan al crecimiento de las habilidades intelectuales, al aprendizaje significativo de los conceptos matemáticos y a su correcta manipulación en pos de facilitar la incorporación de futuras complejidades matemáticas. Consideramos a Robert Gagne quien, entre otros, ha combinado los enfoques conductista y cognitivista en la dinámica del aprendizaje, dando así lugar a una visión más integradora en la que el aprendizaje es concebido como proceso de asociación y de reestructuración. Este modelo explica como, de manera intencional se puede orientar el aprendizaje hacia metas específicas y por lo tanto planificarlo, incluyendo la adquisición de aptitudes. El principio básico es la planificación del aprendizaje con base en el análisis de la tarea. También destacamos algunos de los principios de Carl Rogers en donde la mayor parte del aprendizaje significativo se logra mediante la práctica y se facilita cuando el estudiante participa de manera responsable en este proceso. Para este autor, el aprendizaje socializante más útil en el mundo moderno es el aprendizaje del proceso de aprender, una apertura continua para la experiencia y la incorporación, en nosotros mismos, del proceso de cambio. Por otra parte, Vigotsky adhiere al modelo constructivista que tiene su estructura en el desequilibrio-reordenación-equilibrio, lo que le permite a la persona superarse constantemente, pero para él la actividad constructiva no es una actividad exclusivamente individual. Considera al ser humano un ser cultural donde el medio ambiente (zona de desarrollo próximo) tiene gran influencia., ya que las funciones mentales superiores se adquieren en la interacción social (deberá formar grupos de trabajo y esparcimiento).

La intervención educativa debe tener como objetivo prioritario el posibilitar que los alumnos realicen aprendizajes significativos por sí solos, es decir, que sean capaces de aprender a aprender. Aprender significativamente supone modificar los esquemas de conocimiento que el alumno posee. Esta forma de aprendizaje implica una intensa actividad por parte del alumno que consiste en establecer relaciones ricas entre el nuevo contenido y los esquemas de conocimiento ya existentes. Extrayendo algunos conceptos de las teorías del aprendizaje ya referidas, consideramos las siguientes fases:

° Motivación: Es la fase inicial, que consiste en crear una expectativa que mueve al aprendizaje y que puede tener un origen externo o interno.

° Para que se desarrolle el proceso de autoaprendizaje, un alumno debe tener una "meta", tal como comprender o completar una tarea y estar activamente comprometido a tratar de llegar a ella [6]

° Comprensión: Se refiere a la atención del aprendiz sobre lo que es importante, y consiste en el proceso de percepción de aquellos aspectos que ha seleccionado y que le interesa aprender.

° Apropiación y retención: Este es el momento crucial del proceso de aprendizaje. Lo denomina Gagne "incidente esencial" porque marca la transición del no-aprendizaje al aprendizaje. Este incidente se produce cuando la información ya transformada en conocimiento pasa del registro sensorial a la memoria y se acrecienta, de esta manera, la estructura del pensamiento.

° Recuerdo, transferencia y retroalimentación: Son fases que corresponden al perfeccionamiento del aprendizaje. El recuerdo hace posible que el conocimiento se pueda recuperar mientras que la transferencia permite que se pueda generalizar lo aprendido, que se traslade la información aprendida a variados contextos e intereses. La retroalimentacion consiste en el proceso de confrontación entre las expectativas y lo alcanzado en el aprendizaje. De esta manera el aprendizaje se verifica y se afirma, se corrige y avanza.

Diseño de la experiencia

Apoyados entre otros en los criterios enunciados, el diseño de la experiencia que realizamos y continuamos con el mismo espíritu, propone la elaboración de un trabajo grupal sobre el tema seleccionado -el estudio de las superficies- con el siguiente esquema:

❖ El trabajo consiste en el estudio de un tema específico "Ecuaciones de 2do grado en tres variables (Superficies)" que derivará en una serie de ejercicios de aplicación con la consiguiente presentación escrita y defensa oral del trabajo. Como ejemplo tomamos esta serie de ejercicios.

1) Estudio completo de una superficie
2) Identificación de distintas superficies a partir de sus ecuaciones
3) Reconocimiento de superficies a partir de sus representaciones gráficas.
4) Análisis de los coeficientes de la ecuación de 2do. grado

❖ Para potenciar en los alumnos la autonomía, la autoformación, el autoaprendizaje, la autorregulación y la autoevaluación es necesario desarrollar una metodología acorde con esto. Que propicie la participación activa, nuevos enfoques formativos, procedimientos y estrategias de búsqueda, procesamiento, utilización de la información, que potencien las posibilidades de estas tecnologías y tengan en cuenta sus limitaciones o peligros.

❖ En la experiencia se incluyó la posibilidad de utilizar elementos que motivaran al estudiante y le permitieran entusiasmarse y comprometerse con la tarea en pos de alcanzar su "meta".

[6] (Shuell – 1986)

El alumno debe aprender mediante su propia acción. La labor del docente consiste en crear un contexto favorable para el aprendizaje. Sugerimos entonces, la utilización de un soft y de diversos medios para reunir información sobre contenidos específicos y aplicaciones, teniendo en cuenta el aporte de la herramienta informática en cuanto a lo que a “visualización” se refiere. La curiosidad que suscita el uso de la PC, el impacto visual que provocan las imágenes del programa actúan, en principio, como fuente de motivación para los alumnos, quienes comienzan, mediante la manipulación y exploración de las funciones del ordenador, a familiarizarse tanto con los contenidos procedimentales necesarios para el correcto uso del programa como con los contenidos conceptuales de los temas a estudiar.

❖ En el diseño de la experiencia, se propone que el trabajo grupal se desarrolle según el siguiente esquema:

Lectura comprensiva del material bibliográfico seleccionado por los docentes.
Utilización del soft elegido en las aplicaciones propuestas (ejemplos, ejercicios)
1ra. Entrevista. Búsqueda de información adicional a la bibliografía propuesta. Planteo de los problemas propuestos
2da. Entrevista. Resolución de los problemas y elaboración de la presentación
3ra. Entrevista. Presentación y defensa presencial y oral del trabajo
4ta. Entrevista. Evaluación final

Evaluación de la experiencia.

Las observaciones realizadas pueden resumirse en: 1ra. entrevista: Se manifiestan las dificultades en la comprensión del material bibliográfico, en particular la decodificación del lenguaje simbólico y las secuencias lógicas que se derivan de las expresiones algebraicas, como así también en la manipulación del soft. 2da entrevista: En esta instancia las dificultades se observan respecto del reconocimiento de las trazas (ejercicio del tipo 1) lo que involucra el conocimiento previo de las secciones cónicas. Los ejercicios del tipo 2 y 3 les presentan pocos inconvenientes ya que apelan, en general, a las analogías y similitudes para la identificación o reconocimiento. En el ejercicio tipo 4 expresan sus interrogantes sobre el significado y consecuencias de la variación de los coeficientes intervinientes en cada ecuación. 3ra. entrevista: Los problemas refieren fundamentalmente a las especificidades del soft y los ajustes últimos de los ejercicios, como también a las conclusiones que arriban.

La aparición de un nuevo conocimiento, o de alguna respuesta “inesperada” por parte de la PC, provoca un conflicto cognitivo en los alumnos, conflicto que no puede ser resuelto mediante estrategias del tipo “ensayo-error” debido a la función conceptualizadora del diálogo, que obliga a los alumnos a analizar y reflexionar sobre sus acciones, para poder argumentar con racionalidad la pertinencia de sus decisiones en la búsqueda de soluciones.

En este momento predominan las situaciones de acción, donde los alumnos interactúan con la computadora e intentan la resolución del problema a partir del diálogo, la discusión y el intercambio de información entre los integrantes del grupo, con intervenciones ocasionales de las docentes y de compañeros de otros grupos. Predominan las situaciones que dan cuenta del grado de apropiación de los contenidos conceptuales por parte de cada alumno. Aquí tienen lugar los primeros intentos por explicitar y analizar el uso de las estrategias que emplean mientras buscan la solución, así como también comienzan a interpretar, identificar y definir lo que observan en la pantalla, es decir, las respuestas que les devuelve la PC.

Se manifiesta claramente, el cambio de vocabulario en el estudiante, evidenciando un aprendizaje significativo respecto a los temas involucrados.
Observamos cómo los alumnos fueron sorteando las dificultades atinentes a la selección del material sugerido, así como a la valorización de los contenidos (separación entre lo importante y lo accesorio), con la consecuente solicitud de apoyo docente. Este entorno resalta la importancia de conocer o ser consciente de cómo se aprende, de que forma se buscan soluciones a los problemas, cuales son las estrategias que se utilizan para resolver o enfrentar las dificultades... de *aprender a aprender* y de ser conscientes de su *estilo de aprendizaje.* Cuando el estudiante aborda la resolución de los problemas planteados desde una posición diferente, pudiendo interpretarlos más eficazmente, interactuando entre los contextos de teoría y práctica o aplicación, es aquí donde transfiere sus conocimientos teóricos a una situación de aplicación primaria. Pone de manifiesto que ante las dificultades para resolverlos, retorna a la lectura comprensiva de los temas, seleccionando en esta oportunidad aquellos tópicos directamente relacionados con el tema de su interés.
En este entorno, la metacognición toma un significado especial, por tratarse de un entorno con un carácter autodidáctico que la hace imprescindible. Se requiere que el alumno sepa *qué* desea conseguir y *cómo* conseguirlo (dos características propias de la metacognición), ya que esto tendrá una influencia directa sobre la capacidad de aprender por uno mismo, la autonomía, la motivación haciendo al alumno consciente de su propio proceso de aprendizaje y condicionando en gran medida el éxito de su proceso formativo.
Unida a la instancia de presentación y defensa de sus producciones y a las opiniones recabadas en las entrevistas, se administró una encuesta con la finalidad de recabar las opiniones respecto a la estrategia didáctica implementada.
En la cátedra Algebra y Geometría de primer año de Ingeniería en Sistemas de la Universidad Tecnológica Nacional (Facultad Regional Rosario) en un número de aproximadamente 800 alumnos, la población sobre la que se realiza esta investigación es de 300, la muestra sobre la que podemos informar datos concretos se refiere a 120 de ellos.
Las entrevistas (parcialmente estructuradas) se realizaron con cada grupo de alumnos y muchas de sus respuestas fueron enriquecidas por todos los miembros del grupo.
En el cuadro que sigue se resumen los resultados de la encuesta y entrevistas que dieron elementos fundamentales para avalar la experiencia que se viene realizando y de algún modo fueron significativos para la transferencia de la misma al resto de los cursos de Algebra y Geometría.

Bibliografía Utilizada	Sugerida 85%	Otras 15%	Ninguna 0%
Dificultades en la comprensión del tema	Pocas 23%	Medianas 47%	Muchas 30%
Dificultades en el desarrollo de la tarea	Pocas 32%	Medianas 40%	Muchas 28%
Tiempo extra clase requerido	Poco 15%	Mediano 33%	Mucho 52%
Aprendizaje	**Regular 10%**	Bueno 20%	Muy Bueno 70%

Conclusión

Entre los docentes de matemática se encuentran instalados algunos “mitos” por ejemplo la identificación del profesor como “dueño” de los conocimientos y al alumno como el receptor de sus “enseñanzas”, descartando la posibilidad del autoaprendizaje, lo que se fundamenta en la dificultad de la apropiación de conceptos matemáticos en forma autónoma. El enfoque planteado, en la investigación, constituye un verdadero desafío para la enseñanza de la matemática, ya que el alumno abandona su actitud de pasividad propia de otros entornos, adoptando una actitud más activa, centrada en el proceso y no tanto en el producto. Es participe y responsable de su proceso de aprendizaje y de sus logros en el transcurso de la actividad, ya que el carácter autodidáctico que conserva este entorno requiere de un buen conocimiento de los propios recursos del alumno (metacognición).

La experiencia fue considerada, por los alumnos como productiva, no obstante aclarar que les requirió mucho esfuerzo, a lo que no están acostumbrados. Refieren también que esta fue la primera oportunidad en la que realizan este tipo de tarea y opinan que les ocupó mucho tiempo extra clase. Una constante en sus reflexiones es que les resulta casi indispensable el apoyo del docente en las primeras etapas del trabajo, pero reconocen que mucho de lo que realizaron fue producto de su propio esfuerzo y este hecho los hace sentir más seguros respecto de los conocimientos matemáticos incorporados a lo largo de este proceso. Sostienen asimismo haber incorporado hábitos de estudio, de búsqueda de información y de intercambio entre pares que consideran de mucha utilidad para la prosecución de su carrera, lo que da la pauta de una integración grupal, indicando el esperado proceso de sociabilización.

Es evidente que el componente de autoaprendizaje adquiere un nuevo valor, al igual que la autonomía y la autorregulación. El proceso de aprendizaje esta autogestionado por el propio alumno, su iniciativa y motivación le hacen responsable de sus propios logros en el transcurso de las diferentes actividades de aprendizaje. Él marca los tiempos y ritmos al igual que diagnostica sus propias necesidades y su requerimiento de apoyo docente

Otro rasgo a destacar en el proceso de aprendizaje es que la modalidad de trabajo adoptada (donde el énfasis está puesto en la exploración, la experimentación, la investigación, antes que en la “respuesta correcta”) permite a los alumnos utilizar el error no ya como sinónimo de “fracaso” sino como otro punto de partida para nuevas problematizaciones y reflexiones, donde las posibilidades y consecuencias muchas veces son desconocidas hasta para los propios docentes.

Bibliografía

Elliot, J. (1994) *La investigación acción en la educación.* Ed. Morata.

Gagné, M. R. (1976). *Principios para la planificación de la enseñanza*. Diana. México.

Gagné, R. M. (1987). *Las condiciones del aprendizaje*. México: Interamericana

Lewin, K. (1992). *La investigación acción participativa.* Madrid.

Moll, L.(1990) *Introduction to the Book Vigotsky and Education*. Cambridge University Press, New York.

Ovide M. (1998) *Pedagogía y Universidad.* Homo Sapiens Ediciones.

Pallascio, R. (1986). *Habilidades de la percepción espacial en un contexto infomatizado.* U. De Monreal.

Perez Gomez , A I (1993). *Comprender y transformar la enseñanza.* Ed. Morata- Madrid.
Pozo, J. I. (1997) La crisis de la educación científica ¿Volver a lo básico o volver al constructivismo? *Revista Alambique Didáctica de las Cs. Experimentales,* España.
Roger, C. (1975) *Libertad y creatividad en la Educación*. Edit. Paidos, Bs.As
Schoenfeld , A. (1985) *La enseñanza de la matemática a debate*. Ministerio de Educación y ciencia, Madrid
Schoenfeld, A. H. (1992). *Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics*. En D. A. Grouws
Shuell, T. J. (2001). Teorías el aprender y paradigmas educativos. En N. J. Smelser, y P. B. Baltes (Eds.), E*nciclopedia internacional de las ciencias sociales y del comportamiento* (vol. 13). Amsterdam: Elsevier.
Stenhouse, L. (1987). *La investigación como base de la enseñanza*. España.

GEOMETRÍA DINÁMICA EN UN CURSO REMEDIAL.

Armando López Zamudio.
Centro de Bachillerato Tecnológico Industrial y de Servicios No.94, *México*
larmandozam@hotmail.com

Resumen
El uso de la computadora ha generado cambios sustanciales en la forma cómo los estudiantes aprenden matemáticas, de ahí la necesidad de generar materiales didácticos que garanticen el éxito a los involucrados en el proceso enseñanza aprendizaje. El uso de software de geometría dinámica posibilita a los estudiantes para inspeccionar un rango muy amplio de ejemplos geométricos, de esta manera ellos extienden sus habilidades para formular y explorar conjeturas, así como para juzgar, construir y comunicar argumentos matemáticos apropiadamente. En este trabajo damos a conocer los resultados de una experimentación en el aula, que usó software de geometría dinámica en un curso-taller remedial de Geometría Euclidiana para estudiantes de bachillerato (estudiantes de 16-17 años), comparando con un grupo control que trabajo de manera clásica o tradicional.

Objetivos

Dar a conocer los resultados de un proyecto de investigación que consintió, en una experimentación del diseño de una serie de prácticas didácticas que usan el software Géomètre CABRI (Cahier de Broillon Interactif: Cuaderno de Notas Interactivo) (Baulac, I, et. Al. 1992) para un curso remedial de geometría Euclidiana, impartido a estudiantes irregulares del segundo semestre de bachillerato.

Antecedentes

El National Council of Teachers of Mathematics en los estándares del 2000 señala que las tecnologías electrónicas son herramientas esenciales para enseñar, aprender y hacer matemáticas. Proporcionan imágenes visuales de ideas matemáticas. La existencia, versatilidad y poder de la tecnología exige examinar tanto que matemática deben aprender los estudiantes como de que manera pueden aprenderla mejor. Con las computadoras o calculadoras graficadoras los alumnos pueden examinar más ejemplos o formas de representación que las posibles de hacer a mano. En particular para el estándar de geometría de los grados 9-12, se menciona que uno de los cambios más importantes de la enseñanza de las matemáticas tiene que ver con evidencia y justificación, especialmente con el crecimiento de los ambientes tecnológicos, donde la geometría es un área rica en la cual los estudiantes pueden descubrir patrones y formular conjeturas en una forma visual, eficiente y dinámica. Arcavi y Hadas (2000) afirman que: *Los ambientes dinámicos no sólo permiten a los estudiantes construir figuras con ciertas propiedades y visualizarlas, sino que también les permite transformar esas construcciones en tiempo real. Este dinamismo puede contribuir en la formación de hábitos para transformar, una instancia particular, para estudiar variaciones, invariantes visuales, y posiblemente proveer bases intuitivas para justificaciones formales de conjeturas y proposiciones (pp. 26)*. Para Fritzler (1997) el software Cabri Géomètre II (1992) apoya al estudiante en el proceso de aprender a visualizar. Las figuras geométricas se conceptualizan como resultados de construcciones, cuyas propiedades son definidas por las relaciones establecidas entre sus partes. Esta visión es más difícil de transmitir por medio de construcciones hechas con lápiz y papel, entonces la observación de las propiedades que se mantienen invariables al modificar la forma y el tamaño de las figuras, motiva la explicación por parte de estudiante en un ambiente de la geometría dinámica. Podemos entonces señalar que el uso de software de Geometría dinámica puede funcionar como una herramienta de gran utilidad para que los estudiantes se enganchen en procesos de búsqueda y formulación de conjeturas o relaciones y argumentos o justificaciones matemáticas. Como resultado de este trabajo trataremos la cuestión que Santos Trigo (2001) plantea ¿a qué nivel el uso de software dinámico ofrece o funciona como una herramienta útil para que los estudiantes visualicen, exploren y construyan relaciones matemáticas?

Metodología

De la población. Se formaron dos grupos de 20 alumnos cada uno (los alumnos todos eran irregulares, es decir, ya habían tomado el curso de manera clásica pero no lo aprobaron, fue un buen reto considerar alumnos que ya, permítanme la expresión eran "desahuciados" desde el punto de vista académico), el grupo "A" fue el grupo testigo (tomó clases de manera tradicional) y el grupo "B" el grupo piloto(tomó clase en un laboratorio de computo contando con una computadora por alumno). Se contó con la supervisión de tres docentes en el grupo Piloto, que manipulan perfectamente el CABRI y que además han impartido la materia de geometría Euclidiana.

Del diseño de los materiales. Se diseñó un manual de prácticas o secuencias didácticas de tres tipos:

- Prácticas guiadas: aquí se le indica al alumno paso por paso lo que debe hacer, es decir el docente ayudado por un cañón proyector va realizando cada uno de los trazos seguido del alumno. Y además se le cuestiona cuando es necesario para reafirmar el conocimiento y ejercitar su razonamiento en el tema tratado.
- Prácticas semiguiadas: se le proporciona al alumno un apoyo menor, se le orienta dando las instrucciones o comandos que debe ejecutar para lograr verificar un teorema o la construcción de una figura. Pero debe hacerlo sólo en su computadora, únicamente guiado por su práctica, al mismo tiempo debe ir contestando ciertas preguntas que lo van animando a continuar con la práctica.
- Prácticas abiertas. Se espera en esta etapa que el alumno por si solo construya y aplique su conocimiento a través de la solución de problemas. Y que plantee sus propias conjeturas y argumentos.

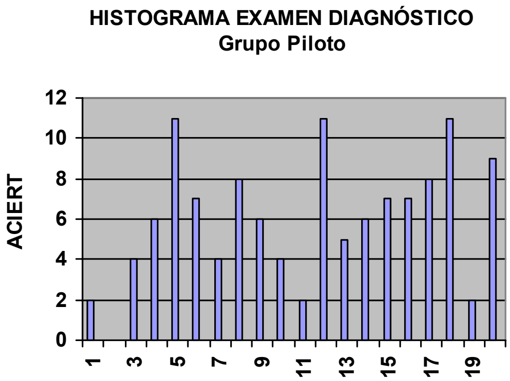
Este material incluye un instructivo básico del manejo del CABRI con una breve explicación de todos los comandos del software en uso. Se reproduce y es repartido entre cada uno de los estudiantes.

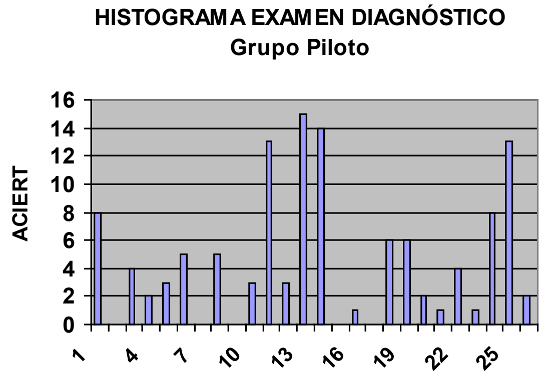
De las sesiones de trabajo. Las prácticas están distribuidas a lo largo de 14 sesiones de 2 horas cada una. En la 1ª sesión se reunieron los grupos A y B y se les aplicó un examen diagnóstico para determinar el nivel de conocimientos previos, en forma individual y por grupo, al grupo piloto se le aplicó también un Test denominado "Canal de percepción dominante" donde los canales podían ser auditivo, cenestésico o visual, con la finalidad de conocer el canal de percepción dominante en el alumno y en el grupo. En la 2ª sesión se inicia con una actividad guiada que introduce al manejo del CABRI. 3ª y 4ª sesiones se continúa con actividades guiadas intercalando cuestionamientos sobre los posibles resultados del siguiente paso, se tocaron los temas de ángulos. 5ª y 6ª sesiones continúan las sesiones guiadas donde los alumnos construyen los diferentes tipos de triángulos, localizan puntos y rectas notables en los triángulos, así como, demostraciones dinámicas de los siguientes teoremas: la suma de las longitudes de dos lados cualesquiera en un triángulo es mayor que la longitud del tercero, todo triángulo equilátero es equiángulo, todo triángulo equiángulo es equilátero, en todo triángulo isósceles los ángulos opuestos a los lados iguales, son iguales. 7ª sesión se continúa con actividad guiada en la cual el alumno realiza la localización de puntos y rectas notables en el triángulo, observando su ubicación de acuerdo al triángulo en cuestión; visualiza los teoremas: las medianas correspondientes a los lados iguales de un triángulo isósceles son iguales, la altura correspondiente a la base de un triángulo isósceles es también mediana y bisectriz, descubrir la recta de Euler. 8ª sesión el alumno comprueba los siguientes teoremas con geometría dinámica: la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo, es igual a 180°, la suma de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo es igual a 90°. 9ª y 10ª sesiones el alumno desarrolla la demostración o comprobación de los siguientes teoremas con CABRI: en todo triángulo, la medida de un ángulo externo es mayor que cualquier ángulo interior no adyacente, la suma de los ángulos exteriores de cualquier triángulo, vale 360°, toda correspondencia LAA entre dos triángulos es una congruencia, si dos lados de un triángulo no son congruentes, entonces los ángulos opuestos a éstos no son congruentes y el ángulo mayores el opuesto al lado mayor, 11ª y 12ª sesiones el alumno desarrollará mediante el uso del software la construcción de los siguientes teoremas: si dos lados de un triángulo son congruentes entonces los ángulos opuestos a estos lados son congruentes, el teorema de Pitágoras, la hipotenusa es el lado mayor en cualquier triángulo rectángulo. 13ª sesión en base a los conocimientos adquiridos los alumnos realizarán la construcción de una circunferencia inscrita y circunscrita a un triángulo cualquiera, conjetura propiedades en los cuadriláteros. 14ª sesión conjeturará propiedades en las circunferencias, resolverá problemas de aplicación en donde utilice los conceptos y habilidades adquiridas en las sesiones anteriores. En cada una de las etapas existió la participación y supervisión de tres profesores que ayudaban en cuestiones de logística así como en cuestiones del manejo del software cuidando siempre los objetivos de cada una de las etapas de las secuencias didácticas. El grupo testigo trabajo de manera clásica: un docente usando gis, pizarrón y borrador.

Análisis de Resultados

Del Test: para determinar el canal de percepción dominante en el alumno, se detecto que el 65% su canal de percepción dominante es el visual, 12.5% es auditivo, 22.5% es cenestésico; lo que influyó para que en el diseño de la evaluación final se le diera una mayor importancia al canal de percepción visual, incluyendo diagramas, dibujos y esquemas.

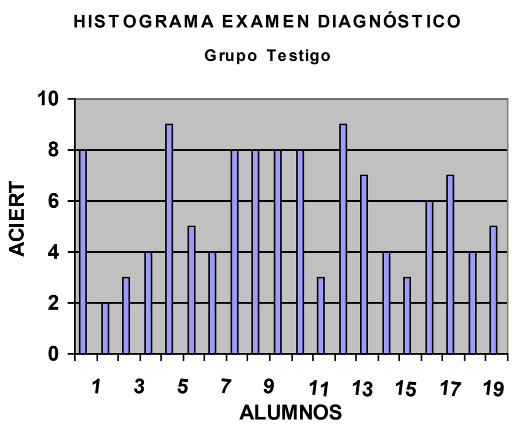
De la evaluación diagnóstica: fue diseñado deliberadamente de manera clásica en estructura (preguntas abiertas, ejemplo: pregunta uno. *Escribe la definición de ángulo*) y en el número de reactivos (26), el grupo piloto como resultado 0% aprobó el examen y la calificación del grupo en promedio es de 2.3, de alumnos que contestó acertadamente cada reactivo en los siguientes histogramas nos muestran los resultados del grupo piloto, la primera gráfica muestra, alumnos contra número de aciertos, la segunda gráfica muestra reactivos contra numero de alumnos que acertaron la respuesta correcta.

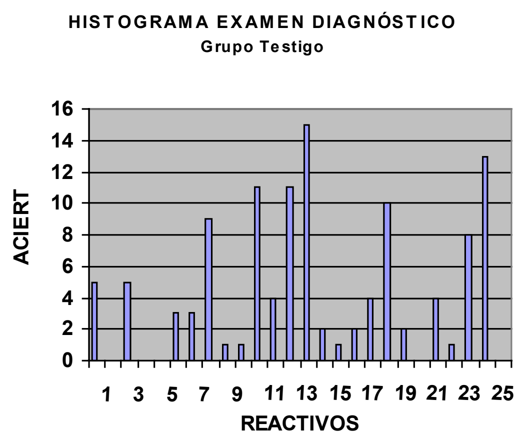




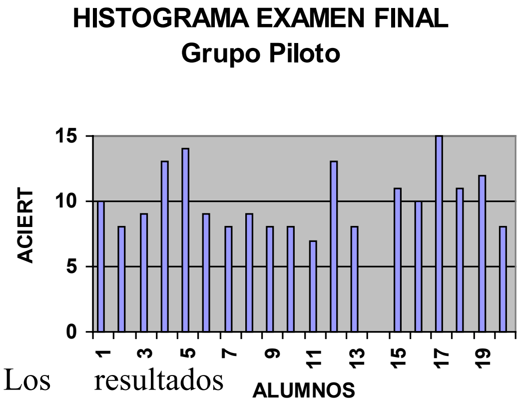
El grupo testigo obtuvo 0% de aprobados en el examen diagnóstico, y su promedio fue de 2.2, en los siguientes histogramas nos muestran los resultados del grupo testigo, la primera gráfica muestra, alumnos contra número de aciertos, la segunda gráfica muestra reactivos contra numero de alumnos que acertaron la respuesta correcta.

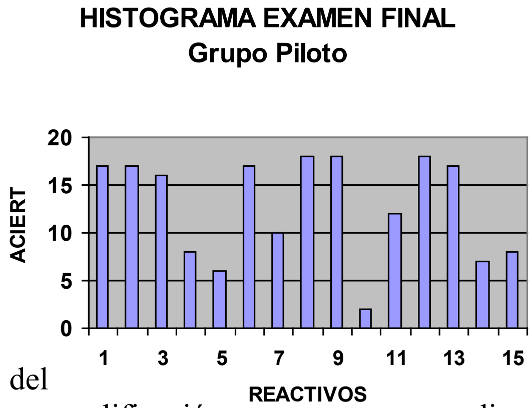
Podemos concluir que los grupos piloto y testigo tienen una cantidad de conocimientos de geometría Euclidiana muy similar, y mínima.



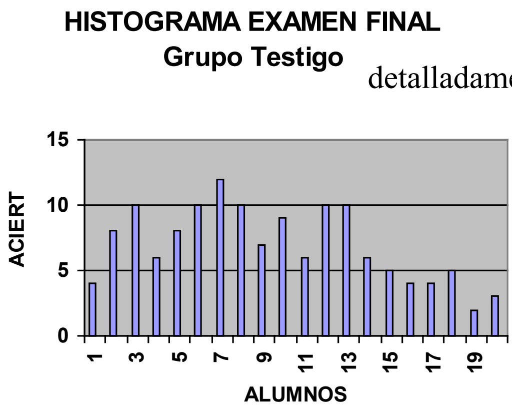


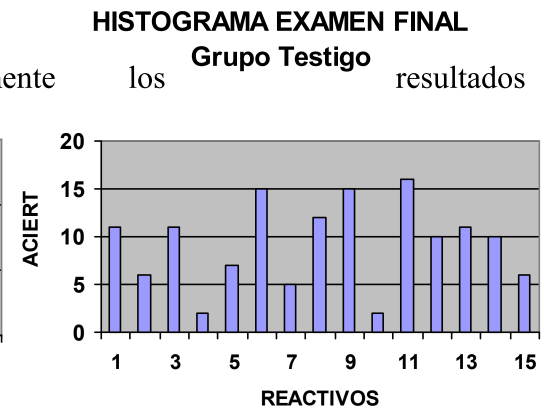
De la evaluación final: este examen se diseñó en base a los resultados obtenidos en el Test de canal de percepción dominante, que como ya mencionamos fue visual, así el instrumento de avaluación contiene 15 reactivos de opción múltiple con esquemas, dibujos, son estos los resultados que se muestran a través de los siguientes histogramas, sin embargo es preciso señalar que también se aplico el mismo examen diagnóstico, al final del curso, los resultados son un 1% menos favorables que los que se obtuvieron con el examen de opción múltiple. Los resultados del examen final en el grupo Piloto fue una calificación promedio de 6.3, aprobando 12 alumnos de los 20, es decir el 60%, es importante destacar que todos los alumnos tuvieron avance ya que incluso los que reprobaron tuvieron un promedio de 4.7 de calificación y que incluso un alumno aprobó el examen con 10.





Los resultados del examen final en el grupo Testigo fue una calificación promedio de 4.6, aprobando 7 alumnos de los 20, es decir el 35%. Los siguientes histogramas muestran detalladamente los resultados :





Podemos resumir que el grupo Piloto tubo un mejor aprovechamiento que el grupo testigo de un 25% más, en la siguiente tabla resumimos los avances de cada uno de los grupos.

	Evaluación diagnóstico Promedio del grupo	Evaluación Final Promedio del grupo	% de alumnos aprobados examen diagnóstico	% de alumnos aprobados examen final
Grupo Testigo	2.3	6.3	0%	60%
Grupo Piloto	2.2	4.6	0%	35%
Diferencia	0.1	1.7	0	25%

Conclusiones

Se puede señalar que el grupo testigo tuvo un avance considerable con respecto al nivel de conocimientos adquiridos al finalizar el curso, mientras que el grupo testigo el avance fue mucho menor. Para el alumno la computadora es una herramienta maravillosa que en el proceso de sus aprendizaje lo motiva profundamente a continuar explorando, pero definitivamente debe contar con un manual guía en donde se especifique las actividades a realizar, en las diferentes etapas que se proponen de las sesiones, por otra parte es importante la presencia de un docente que actúe como guía y que estimule al alumno a terminar sus actividades cuando sea necesario. Es muy importante que las actividades sean evaluadas en forma continua para mejorarlas de manera que los objetivos para la que fueron diseñadas se cumplan lo más óptimo. Por último podemos precisar que el uso de software de geometría dinámica es una buena alternativa que funciona como una herramienta para visualizar y dar certeza al momento de argumentar sus conjeturas. Por lo que se recomienda su uso como actividad complementaria en un curso normal, explorar el funcionamiento en grupos normales y el uso del software únicamente con pizarrón electrónico es una tarea por realizar. El autor agradece la colaboración de los docentes: José Correa B., Miguel Ángel Cruz L. y Dante Razo R.

Bibliografía

Arcavi, Abraham, Hadas Nurit. (2000). *Computer Mediated learning: Anh exaple of an approach.* Internatinal Journal of Computers for Mathematical Learning*, 5 pp. 25-45*

Baulac, I, et. Al. (1992).*Cabri Géomètre: The Interarctive Notebook*., . Laboratoire de Structures Discretes et de Didactique de I'IMAG of I'Université Joseph Fourier in Grenoble.Software

Fritzler H. Wolfgang (1997*) Triángulos y Cuadriláteros Inscritos en un Círculo, Una aplicación del software educativo "Cabri Géomètre"* Educación Matemática Ed. Grupo Editorial Iberoamérica S.A. de C.V. Vol. 9 No. 2 pp.116-136.México.

National Council of Teachers of Mathematics, (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, Va 20191-9988.: The Council. U.S.A.

Santos Trigo L.M. (2001*) El uso de Software Dinámico en el Desarrollo de Significados y Conexiones en el Aprendizaje de las Matemáticas.* Memorias de la Conferencia Internacional Sobre Uso de Tecnología en la Enseñanza de las Matemáticas. Ed. Cortés C., et. Guerero L., pp.59-69. UMSNH, Morelia, México.

MATEMÁTICA, INFORMÁTICA Y LA ´RENEGOCIACIÓN´ DE NORMAS PREEXISTENTES

Bonacina M.; Haidar A.; Quiroga M.; Sorribas E.; Teti C. Paván G.
UNR. Argentina
mbacuario@yahoo.com.ar

Resumen
El deseo de dar respuestas a interrogantes tales como ¿Qué tipo de conocimientos requiere una sociedad en constante transformación?; ¿qué capacidades o estrategias debemos promover para favorecer la formación de individuos social, cultural e intelectualmente plenos, comprometidos con su entorno?. ¿Será posible contemplar en las planificaciones pedagógicas la secuencia evolutiva natural de la vida (ambiente-enseñanzas-memorias-comportamiento individual-comportamiento social-enseñanzas-ambiente), los tiempos biológicos requeridos para consolidar, almacenar y dar funcionalidad a la información adquirida?; ¿ imponerse a la aceleración (o inercia) de los tiempos administrativos? nos lleva a reflexionar sobre la propia práctica, considerar el rediseño de la misma, a proponernos finalmente un plan de trabajo cuya estructuración contemple tanto cuestiones atinentes a la propia disciplina como, y especialmente, a todas aquellas otras que tuvieran que ver con una positiva integración Sociedad, Ciencia y Tecnología, S/C/T. En una primer etapa procedimos a investigar, caracterizar y explicitar una serie de normas ´sociomatemáticas´ que llamamos preexistentes y que a nuestro juicio serían inhibidoras del aprendizaje y relativas al contexto sociocultural en el que nos movemos. Por contraposición establecimos normas a renegociar con nuestros estudiantes, las que llamamos "emergentes". Concretada la primer etapa del plan (sistema de interpretación, diseño de instrumentos para la intervención pedagógica) generamos experiencias participativas con la presencia de estudiantes y docentes a los fines de implementar los instrumentos diseñados*, observar y evaluar* la calidad de los mismos, el sistema de interpretación en sí. El presente trabajo trata de algunos resultados y conclusiones obtenidas en esta segunda etapa del plan.

Introducción
Creemos que la educación tal cual se materializa hoy en el nivel educativo superior no apunta a un ser creativo y pensante, que más bien apunta a hombres y mujeres conformistas, promueve comportamientos masivos a través de instalar en la sociedad ´patrones de respuesta´, propiciar la despersonalización, disminuir el ejercicio de la autocrítica y así, la capacidad de elaborar respuestas propias; que esto es el resultado de políticas educativas que no contemplan en forma integrada la diversidad de factores que inciden sobre el acto educativo; entre ellos, el impacto que sobre el medio y la sociedad toda tiene una Ciencia y Tecnología cada vez menos comprometida con ambos. La historia muestra como el *modelo de sociedad* imperante en cada etapa ha tenido un particular *modelo educativo* asociado. De allí que concluimos que el *éxito* de la transformación pretendida está muy ligado a las concepciones dominantes en el contexto sociocultural que nos rodea; que para cambiar es sobre estas concepciones que debemos actuar. Según los neo-piagetianos Anne-Nelly Perret Clermot y Michel Nicolet, (cit. en D. Laino, 1997) "el contexto social y cultural afecta el desarrollo de las tareas y su resolución"; "los esquemas intelectuales de los sujetos se constituyen en interacciones con personas, objetos y situaciones caracterizados libidinalmente en su mundo cotidiano: en esas vinculaciones intersubjetivas se vehiculizan creencias compartidas, como componentes no racionales, que inciden en los procesos cognoscentes". *¿Cual sería hoy el modelo educativo mayoritariamente imperante*?. A este respecto entendemos que la acepción que una sociedad adopta para sí del término ´inteligencia´ resulta determinante del modelo educativo que finalmente impone y que en tal sentido estaríamos hoy ante una

interpretación absolutamente *pragmática* del mismo: inteligencia como capacidad de adaptación, referida a la capacidad del sujeto de adoptar las conductas impuestas por el sistema, es decir: inteligencia como ´sublimación del ordenador´. Intuimos así que la dimensión del cambio pretendido no puede hacerse desde una sola disciplina y nos planteamos: ¿será posible contemplar en las planificaciones pedagógicas la secuencia evolutiva natural de la vida (ambiente-enseñanzas-memorias-comportamiento individual-comportamiento social-enseñanzas-ambiente), los tiempos biológicos requeridos para consolidar, almacenar y dar funcionalidad a la información adquirida? ¿ imponerse a la aceleración (o inercia) de los tiempos administrativos?. Estas interrogantes nos llevan a reflexionar sobre la propia práctica, considerar el rediseño de la misma, a proponernos finalmente un plan de trabajo cuya estructuración contemplara tanto cuestiones atinentes a la propia disciplina como, y especialmente, todas aquellas otras que tuvieran que ver con una positiva integración S/C/T (Sociedad, Ciencia y Tecnología). Cobb y Yackel (cit. Hershkowitz y Schwarz, 1996) dicen que así como la sociedad responde a normas de conducta que genera como subproducto de las interrelaciones que se dan hacia el seno de la misma; el aula, como una sociedad a escala, también genera y responde a normas sociales en cuya renegociación los estudiantes resultan factores claves. En particular se refieren a la renegociación de las que ellos llaman ´normas sociomatemáticas´; o sea, de normas que caracterizan como propias de la comunidad matemática. Desde esta perspectiva estimamos que es posible ´enseñar´ -si nos proponemos esto- desde un lugar muy distinto del tradicional; que tendremos más y mejores oportunidades a partir de una revisión y redefinición crítica de roles y funciones al interior del sistema educativo; de aceptar que no basta con que el discurso sea comprendido (el saber qué), que el mismo debe contribuir al saber cómo, al conocimiento procedural; que es sobre esta cuestión sobre la que debemos afinar el análisis, prestando atención al valor de los argumentos esgrimidos, particularmente, que estos sean de valor para el estudiante a más de serlo para nosotros. Creemos que el discurso finalmente ejercerá su efecto a condición que sea reconocido.

Propuesta de un marco interpretativo. En un trabajo previo (Bonacina y otros, 2003) procedimos a explicitar una serie de normas (que llamamos preexistentes), a nuestro juicio inhibidoras del aprendizaje y relativas al contexto sociocultural en el que nos movemos. Por contraposición establecimos normas a renegociar con nuestros estudiantes, las que llamamos ´emergentes´. Obtuvimos así el ´sistema de interpretación´, ´las coordenadas de inteligibilidad´ necesarias a los efectos de proceder al rediseño de nuestra práctica, a interpretar los resultados de la confrontación ´teoría-empiria´ en el ámbito de la clase, a la evaluación de las nuevas tecnologías de información y cálculo como herramientas de apoyo para la gestión pedagógica. La incorporación de la herramienta tecnológica no siempre ha estado precedida del análisis y modificación de criterios que tal hecho amerita; que ha quedado instalada la necesidad de estar al día con las nuevas tecnologías, de hacer un análisis crítico de su modo de empleo, de revisar los contenidos curriculares a la luz de las conclusiones obtenidas; o sea, y desde otra óptica, de rediseñar actividades.

A continuación proponemos algunas de las normas detectadas, a modo de ejemplo y a los fines de clarificar ideas. Esta base no es estática sino ´viva´, a medida que comprobemos la inexactitud de alguna de las normas allí propuestas la reformulamos o quitamos, según corresponda. Concretada la primer etapa del plan (sistema de interpretación, diseño de instrumentos para la intervención pedagógica) generamos experiencias participativas con la presencia de estudiantes y docentes a los fines de implementar los instrumentos diseñados, observar y evaluar la calidad de los mismos, el sistema de interpretación en sí. Este trabajo trata de algunos resultados y conclusiones obtenidas en esta segunda etapa del plan.

Normas Preexistentes	**Normas Emergentes**
1.- Registro y apropiación de la información sin el conveniente *procesamiento* de la misma.	**1.-** Asimilación crítica del conocimiento a través de someter al mismo a un necesario proceso de ´acomodación´
2.- Sólo hay dos opciones posibles ante un problema: ´reconocer´ o ´abandonar´.	**2.-** Reconocer la existencia de una multiplicidad de recursos para resolver problemas, la existencia de caminos alternativos, incluso ´no formales´.
3.- La PC: resolutor infalible de cualquier tipo de problema. (lo que informa es evidencia de una verdad oculta e inaccesible para nosotros).	**3.-** La PC: auxiliar importante en la resolución de problemas, facilitadora de manipulaciones algebraicas y gráficas, simulaciones, verificacs...
4.- Evidencia gráfica y argumentación dialéctica no son ´legítimas´, ni siquiera ´atendibles´.	**4.-** Pensar heurísticamente, graficar, son formas válidas de explorar, refutar, inducir resultados.
5.- la vaguedad en el lenguaje no resiente la comunicación ni el crecimiento intelectual.	**5.-** la precisión en el lenguaje es imprescindible no sólo para entendernos sino también para aprender.

Descripción de la propuesta. El eje de la propuesta está soportado en la creencia que las normas ´sociomatemáticas´ detectadas, en el caso de ser inhibitorias del aprendizaje, pueden ser exitosamente renegociadas a través de:

- Actividades convenientemente organizadas en torno a la resolución de problemas, al aprendizaje por descubrimiento (desde el guiado al autónomo).
- Uso de software amigables, que permitan una vinculación dinámica y ágil entre las representaciones (algebraicas, gráficas, numéricas-tablas) así como un simple accionar hacia el interior de las mismas.
- Problemas o ejercicios que necesariamente lleven a reflexionar tanto sobre *las propias acciones como sobre la de los otros*; que requieran de la intuición, la exploración previa, promuevan la interacción alumno-alumno, alumno-docente y alumno-recurso informático; que permitan al docente rescatar para el estudiante la importancia de atender al proceso, detectar ´esquemas de resolución´, cuidar el lenguaje, ejercitarlo, etc.

Al respecto leemos, " *todas las didácticas que apuntan a la construcción de un aprendizaje significativo señalan la importancia del trabajo pedagógico con las concepciones previas de los alumnos; concepciones provenientes generalmente del conocimiento vulgar y que pueden resultar en obstáculos pedagógicos. La tarea de confrontación necesaria para la deconstrucción de hipótesis o teorías (´normas´) erróneas requiere de un trabajo metacognitivo que obliga al sujeto que aprende a confrontar sus conocimientos y habilidades con los nuevos problemas que se le presentan*." (Aebli, Colussi, Sanjurjo, 1995) Así, el ´concepto estructurante´ del plan de trabajo propuesto es el concepto de metacognición, entendiendo por concepto estructurante "un concepto que puede considerarse un instrumento, una nueva clave para la comprensión de los complejos procesos de aprendizaje y enseñanza". (Sanjurjo, en Aebli, Colussi, Sanjurjo, 1995) La experiencia fue llevada a cabo con alumnos de primer año de la UNR, de la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura (Grupo 1) y de la Facultad de Ciencias Bioquímicas y Farmacéuticas (Grupo 2) Se provee a los alumnos de protocolos de trabajo y disquete con archivos con consignas de trabajo. Los protocolos constan de actividades que requieren de un software matemático y están diseñadas de tal modo que el contenido matemático es siempre el aspecto principal de la secuencia. Para cuidar esto las actividades requieren tanto del software como del lápiz y papel. El software elegido fue el Derive por considerarlo amigable por la facilidad de sus comandos; porque la forma de escritura y los símbolos son similares a los usados con lápiz y papel, lo cual facilita la comunicación con el ordenador.

Metodología de trabajo: Las actividades se implementaron en ambas Facultades en paralelo al cursado de la asignatura Matemática. Se proponen en forma *extracurricular* y *optativa*, según una metodología que llamamos de "*Aula Taller*", equiparables a las de los laboratorios de Química y Física. El alumno debe desarrollar las actividades propuestas en el protocolo y, al finalizar las mismas, entregar el reporte correspondiente. Las actividades se planificaron para desarrollar en 12 horas. El plan de trabajo comprende cuatro fases:

Fase 1: Trabajo en el Aula Taller (sesiones de 2 hs. cada una). Los estudiantes trabajan cada uno en una PC, con la supervisión o guía de docentes. Los docentes cumplen el rol de observador-participante: toman notas de clase; preguntan, orientan y originan debates.

Fase 2: Corrección de reportes, evaluación de registros y datos colectados en la fase 1.

Fase 3: Discusión grupal de los reportes, docentes y estudiantes. (Instancia no concretada)

Fase 4: Evaluaciones individuales, entrevistas personales. (Instancia no concretada)

Observaciones generales relativas al diseño y desarrollo de los protocolos. Optamos por la resolución de problemas como metodología conveniente a los objetivos propuestos ya que esta actividad requiere de la capacidad de:

- establecer variables relevantes, interrelación entre ellas (ejercita la ´comprensión´).
- organizar datos y evaluar información para la toma de decisiones con el uso de un método.

Nuestra experiencia indica (norma 2) que los estudiantes entienden como "problema" una estructura canónica es decir, un texto breve en el que no faltan ni sobran datos, cuya secuencia lógica y organización responde a algoritmos y fórmulas conocidas y que tiene *solución única*. Esta concepción no se corresponde con la acepción que nosotros damos a esta palabra (problema = situación a resolver que plantea un obstáculo o desafío que moviliza ideas y pensamientos para su resolución.), está ligada a la norma 1 y constituye por lo tanto una norma a ´renegociar´ con nuestros estudiantes. Una forma de concretar este objetivo es lograr que el estudiante *vivencie* los beneficios de ´resolver un problema´, de descubrir la estructura básica que muchas veces subyace detrás de ellos, que existen *esquemas generales de resolución* cuya *captura* facilita la resolución de problemas ya que muchas veces para llevar a cabo la misma basta con activar uno de estos esquema aprehendidos. El fin en este tipo de metodología no es sólo que los alumnos ´resuelvan problemas´ sino también el desarrollar lo que Flavell llama el ´conocimiento metacognitivo acerca de las estrategias` Por otro lado la resolución de problemas con el auxilio de la PC permite plantear una actividad distinta a la tradicional ya que posibilita una "matemática experimental", un paradigma en que los alumnos interactúan con hechos y conceptos y en el que la teoría ordena; permite proponer trabajos tales como resoluciones basadas en procesos de prueba y error, de simulación, gráficos, en suma procesos heurísticos antes que los algorítmicos a los que estamos acostumbrados. La computadora ofrecía posibilidades que la hacían aparecer como un buen auxiliar didáctico. Estimamos que su uso permitiría alivianar el trabajo de rutina y centrar la atención en las capacidades que queríamos desarrollar. Lamentablemente las expectativas nuestras y la de los estudiantes no tuvieron nada en común. En nuestra experiencia, los alumnos llegaron al taller ´creyendo´ que sus falencias de conocimientos serían ´suplidas´ por la computadora, es decir convencidos que el aprender a manejar un software matemático les iba a permitir resolver cualquier ´cuestión matemática´ que se les presentara; considerando la PC como una caja mágica que, con sólo manipular adecuados comandos proporciona la SOLUCION. "El software matemático nos reemplaza, realiza el trabajo intelectual necesario para la resolución del problema" (norma 3). Aparece así otra norma a renegociar, cuestión que pensamos resolver a través de crear un conflicto entre sus creencias y la realidad. A tal efecto, propusimos un problema cuya resolución estuviera esencialmente basada en un simple análisis gráfico. El problema propuesto fue:

" En un trabajo se ofrece el pago de jornal según las horas trabajadas por semana. Para el
puesto A se ofrece 15 $ / h por las primeras 20 horas y 5 $ / h por adicional; para el B se
ofrece 15 $ / h por las primeras 10 horas y 10 $ / h por adicional. ¿Qué trabajo tratarías de
obtener ? ; ¿pedirías más información acerca de los puestos A y B?, ¿porqué?. "

La forma más simple de resolver este problema es hallar las *dos funciones* que comprende, graficar ambas en un mismo sistema y concluir a partir del gráfico (después de pedir más datos acerca de cada puesto, por ejemplo, si existe un mínimo garantido de horas de trabajo). Las funciones a hallar son funciones ´seccionalmente definidas´; o sea, funciones que en los hechos aparecen cada vez que se necesita describir situaciones sujetas a distintas restricciones en intervalos distintos. Aquí el alumno, a más de reconocer que las incógnitas eran funciones, debía reconocer el tipo particular de funciones de que se trataba. Cabe aclarar que en ejercicios anteriores se habían propuesto leyes y gráficos de funciones de este tipo, de manera que en esta instancia debían tener todavía presente el concepto que el problema requería, la sentencia a usar para graficar la función con la PC: *If (condición, 1er. arg., 2do arg.)* (la cual requiere reconocer y expresar de forma lógica las distintas restricciones que caracterizan la función, el intervalo de validez de c/u). De manera que podría pensarse que tenían todos los elementos para resolver el problema; que, en principio, sólo debían reconocer que las funciones involucradas eran funciones seccionalmente definidas, hallar luego la forma de usar las mismas para concluir.

- *Primer problema*: No reconocen que el concepto que relaciona datos e incógnitas es el concepto de función. (menos el de función seccionalmente definida)
- *Segundo problema:* inducidos por el docente reconocen la conveniencia de proponer una función pero, ¡no pueden encontrar (¿?) la ley de la misma!: "*¡ no existe ningún comando que me de la ley*!" (un alumno). (la PC como caja mágica que *produce* funciones con sólo apretar teclas).
- *Tercer problema:* sugerido directamente por el docente que grafiquen las funciones no encuentran luego la forma de utilizar los gráficos, porque: "l*os gráficos no son precisos*" (varios alumnos)

Fabiola- No se cómo resolver el problema.

Docente- ¿Qué te parece si graficas las funciones encontradas?.

Fabiola- Pero un gráfico no es "preciso" como para leer de él la solución!
Docente- el gráfico realizado con la computadora no es "un bosquejo dudoso" como el realizado en un cuaderno. El recurso informático te permite obtener información más confiable. Además te permite apreciar aspectos globales, comportamientos tendenciales, que es lo que en realidad necesitas aquí.

Otra norma a renegociar, la ´vaguedad en el lenguaje´ (norma 5) se aprecia no solo en la comunicación oral sino, y particularmente, en la escrita, en todas sus instancias: desde la no *formulación* en forma clara y explícita en la hoja de trabajo del ejercicio o problema a resolver, los datos, las incógnitas; seguido por la falta de *organización, coherencia* con que presentan los reportes de actividades, hasta llegar a que rara vez (si un problema lo amerita) *dan la respuesta en forma de oración* (generalmente recuadran o subrayan el resultado numérico allí donde terminan de hacer las cuentas). Este hecho puede obedecer a cuestiones de orden tanto general como propias de la matemática. Así, en los últimos años es evidente la producción de una especie de ´reduccionismo en el lenguaje´, el cual puede caracterizarse como un fenómeno de orden sociocultural; por otro lado, también observamos que entre los estudiantes existe una creencia, la de que *todo lo que se escribe en la clase de matemática* debe estar en *lenguaje matemático* (Gómez, 1995). La primera cuestión, es obvio que escapa de las manos del docente de matemática; pero, ¿qué pasa con la segunda?: a nuestro entender la misma estaría dando cuenta de una ´norma socio matemática´. Creemos que es una norma que puede ser renegociada por el docente, en la clase de matemática, por estar involucrados con ella. Efectivamente, mientras explicamos un tema generalmente escribimos en el pizarrón *sólo las expresiones matemáticas*, lo cual y hasta aquí, no es bueno ni malo. ¿Donde radica el problema?: en que el estudiante, cuando toma apuntes, *escribe solo eso*, lo que encuentra en el pizarrón. Luego, cuando estudia o repasa sus apuntes se encuentra con: un *listado de fórmulas.* Desde esta perspectiva ya no resulta tan sorprendente que ésta sea la forma que él finalmente adopta para informar; o sea, no solo reproduce los conceptos, sino también la *forma textual en que los registra.* En el caso de la matemática esta cuestión no es solo una cuestión de forma, o de ´elegancia de la forma´, sino que es una cuestión atinente al proceso de resolución en sí, hace a la facilidad o dificultad de llevarlo a cabo, tener éxito. Todas estas consideraciones, unidas al hecho de que en la ´hoja electrónica´ la posibilidad de equivocarse, de perder la perspectiva global del trabajo aumenta considerablemente, determinan la necesidad de dedicar tiempo y espacio a esta cuestión, a insistir en ella. La ansiedad por ´avanzar´, en el uso del software, sería determinante también en cuanto a no prestar atención a las consignas, no detenerse a interpretar (analizar, verificar, cuestionar) resultados. Esto también tiene que ver con normas sociales de carácter general: la ´rapidez´ es hoy un factor sobrevaluado por la sociedad. Así, un grupo importante de alumnos, introducen mal una función, la grafican, obtienen otra cosa y continúan con el ejercicio siguiente sin detenerse un instante. La función era $f(x) = 2x- 4$; el software requiere que se introduzca como $f(x) := 4x -2$; ellos no ponen *los dos puntos*, así al dar el enter, en pantalla queda $f . x = 4x -2.$ El software grafica esta expresión como la hipérbola $f =4x -2 / x$; con las asíntotas perfectamente visibles en la pantalla en la que están trabajando en ese momento. Sin embargo muchos alumnos no se percatan siquiera que el gráfico de pantalla no era el que corresponde a la ley dada.

Conclusiones. Todo lo visto nos lleva a pensar que el renegociar las normas preexistentes requiere de una metodología adecuada y ´algo más´, que existen otros ingredientes no considerados en el análisis previo, que estos tendrían mucho que ver con el valor que ellos dan a las ´nuevas´ normas o con cual es el valor que las subsume. A este respecto pensamos que en el caso de la PC tal valor podría ser el de la ´rapidez en el avance en el conocimiento del software´. Si esto fuera así, queda claro porqué las estrategias no funcionan: nosotros queremos enseñar matemática con el auxilio del software, ellos, aprender un software para no tener que aprender matemática. Docentes y alumnos no estamos en sintonía. Otra cuestión pudiera ser que les estuviéramos dando un mensaje oral y otro procedual. Así concluimos que se abre un nuevo camino de investigación: el de reflexionar acerca de los procesos didácticos que generamos o consolidamos (como el listado de fórmulas); es decir "buscar la coherencia entre el saber enseñado y el saber actuado".

Bibliografía

Laino, D.(1995), Creencias y procesos de conocimiento de Piaget a Bourdieu -Leonardo Da Vinci.. *Publicación de divulgación científica de la Facultad de Ciencias Sociales*- UNLZ- Bs. As. (p:4-10)

Hershkowitz R. & Schwarz B., (Julio, 1996) . *The technology and the development of sociomathematical norms in classroom.* WG - ICME 8 , Sevilla , España

Bonacina y otros (Mayo- 2003*)* - Matemática, Informática y el desarrollo de Normas Sociomátemáticas - *V SEM, Simposio de Educación Matemática- Chivilcoy; Bs.As*.

Aebli, H. y otros (1995). *Fundamentos Psicológicos de una Didáctica Operativa* . Rosario, Argentina: Homo sapiens Ediciones.

Flavell, John, (1993) *El desarrollo cognitivo.* Madrid: Visor.

Gómez P. (1995). *Profesor: no entiendo*. México: Grupo Editorial Iberoamericano.

Litwin, E (1993). Las configuraciones didácticas en la enseñanza universitaria*. Revista Nro 3 del IICE-UBA- Miño y Dácila.* Bs. Aires

VARIACIÓN Y VARIABLES CON GEOMETRÍA DINÁMICA

Marco Santillán, Arturo Ávila y Víctor Pérez
CCH-UNAM, México
marcoant50@hotmail.com

Resumen

Este trabajo es parte de un proyecto de investigación sobre la aplicación de tecnología computacional en la enseñanza y aprendizaje de matemáticas con alumnos de nivel medio básico o secundaria (séptimo a noveno grado) y nivel medio superior o bachillerato (décimo a doceavo grado), en particular, trata de entender la función mediadora del efecto de "arrastre" del software de geometría dinámica en la cognición de sujetos que estudian las nociones de variación y variable. Aquí reportamos los resultados de una exploración, usando *Cabri*, en el aprendizaje de esas nociones con estudiantes de nivel medio básico de 13-14 años de edad. Se describen las actividades, las respuestas de los estudiantes y una experiencia que sugiere el potencial de la verbalización de los resultados por los estudiantes en el proceso de simbolización algebraica.

Introducción

Las variables son utilizadas en la simbolización de regularidades o patrones, para expresar generalizaciones y, esencialmente, en la representación de la relación entre dos o más cantidades que están cambiando dentro de ciertos rangos. La enseñanza tradicional del álgebra plantea grandes dificultades de aprendizaje para los estudiantes novatos que, además de tratar con números, se enfrentan con símbolos literales que tienen sentido de incógnitas o números desconocidos, de números generales o parámetros y de variables ligadas por alguna relación funcional. De los diferentes significados para estos símbolos, el de variable es quizá, el más difícil para quienes inician sus contactos con el álgebra. Por otra parte, junto a los problemas asociados a la variable, también hay problemas con la variación. Moreno y Santillán (2002) reportan que estudiantes de bachillerato (15-18 años), a todos los niveles, tienen dificultades en la comprensión de las diferentes formas de representación de la variación. También, encuentran que los estudiantes que tienen problemas para percibir la variación, el concepto de variable les resulta más abstracto y difícil de entender. Ante las dificultades asociadas con el aprendizaje de la variable se han desarrollado y utilizado ambientes computacionales, aun en sujetos que no han iniciado formalmente la enseñanza en álgebra (Tall & Thomas, 1991; Graham & Thomas, 2000) Una aplicación importante de una herramienta computacional en problemas de enseñanza y aprendizaje se ha realizado con *Logo*, un software utilizado con diferentes enfoques para el aprendizaje de la variable (Moreno & Sacristán, 1995; Noss & Hoyles, 1996) Investigaciones apoyadas en *Logo* muestran que niños de 8 años de edad pueden acercarse a la noción de número general apoyándose en *Logo* (Noss, 1986). En ese ambiente de cómputo, algunos niños han sido capaces de considerar a los nombres de las "entradas" de los procedimientos como representantes de un rango específico de valores, esto es, potencialmente una variable. En su propuesta de reducir al mínimo la manipulación simbólica y al mismo tiempo introducir situaciones algebraicas en ambientes menos abstractos, Yerushalmy y Schwartz (1993), plantearon un enfoque visual del álgebra centrado en el concepto de función y basado en el software *Function Analyzer*. Siguiendo a Schoenfeld y Arcavi (1988), nosotros explotamos el "elemento dinámico" del efecto de *arrastre* de *Cabri* para variar la posición y dimensiones de objetos construidos en ese ambiente y generar así, un acercamiento diferente al tradicional que se apoya sólo en lápiz y papel, para presentar las nociones de variación y variables en relación funcional. El efecto de arrastre se utiliza para destacar la percepción de la variación, ver qué cambia, entender por qué cambia y sobre esta base, concebir la relación funcional. La variación y la variable son nociones problemáticas, es común encontrar estudiantes de bachillerato (15-17 años) que aún no han madurado el concepto de variable como una relación funcional, por ejemplo, conciben la tabla de valores numéricos sólo como una situación donde se proporciona un valor para obtener otro ejecutando una serie de operaciones aritméticas, esto es, asocian valores a dos cantidades distintas, las variables, sin entender que existe un nexo entre ellas. Nosotros hemos encontrado alumnos de 17 años que trabajan con las tablas numéricas la correspondencia entre variables pero les resulta totalmente ajena la idea de variación conjunta.

El arrastre, la variación y las variables (elementos conceptuales) La representación funcional de la variación expone la naturaleza cambiante de la variable, esto, sin embargo, no es captado fácilmente por los estudiantes novatos en álgebra aunque construyan tablas de datos y gráficas, el carácter abstracto de la variable no desaparece, aun con el apoyo de calculadoras o computadoras para ejecutar las tablas y gráficas. Pero la variación tiene un formato más cercano a la intuición cuando se presenta dinámicamente, entonces, se puede hacer evidente que algunas cosas están cambiando y, si el aprendiz es quien manipula y controla la variación, se abren nuevas oportunidades para que la perciba y entienda. En este trabajo se asume que el software de geometría dinámica (Cabri, en este caso) puede funcionar como "vía" para transitar desde las cantidades fijas que representan longitudes, áreas y ángulos y las cantidades variables; desde la percepción de la variación hasta el entendimiento de la variable. Con la geometría dinámica se puede construir un triángulo, por ejemplo, y modificar las dimensiones y sus ángulos sucesivamente conforme se arrastra uno de sus vértices en la pantalla de la computadora. Asignando etiquetas (letras) a los valores que cambian, se presentan como versiones más concretas de cantidades variables. Por otra parte, el arrastre, una forma de acción representada[7], genera una percepción "continua" de imágenes del dibujo a través del continuo temporal. La ilusión de continuidad de los cambios de posición del dibujo se manifiestan como movimiento. Las transformaciones sucesivas del dibujo son una premisa de la visualización, de la posibilidad de concebir la variación. Esa ilusión de continuidad (de las transformaciones sucesivas) no son sólo imágenes distintas, como fotografías, son relaciones espacio-temporales que llenan de sentido, de un nuevo sentido al dibujo y al número asignado a una etiqueta que, al estar cambiando conforme se arrastra un punto, por ejemplo, se transforma potencialmente en variable. Así como la variación más que percibirse debe concebirse, la simbolización de las variables no es un proceso de anotar lo que se ve sino de la toma de conciencia de la generalización asociada a ella. Presentar simultáneamente elementos del dibujo en movimiento y los valores numéricos que se actualizan genera un potencial para apoyar la comprensión de la variación y las variables. El software pone las condiciones, el sujeto debe procesarlas, coordinarlas. La coordinación da acceso al entendimiento en la medida en

[7] Con la computadora es posible representar objetos matemáticos (funciones, matrices, vectores) y representar acciones sobre esos objetos como amplificar una región de una gráfica enfocada en un punto. Hacer zoom es una acción representada.

que una representación, el dibujo o los valores numéricos, funciona para darle sentido a la otra. Pero, la coordinación no es ejecutada por la computadora, ésta es una actividad humana que integra la percepción del movimiento, la lectura de los valores y la manipulación del elemento que es arrastrado.

El estudio experimental. Participaron 28 estudiantes que iniciaban el octavo grado de instrucción básica en una escuela pública de una zona proletaria del norte de la ciudad de México. Ningún estudiante conocía el software y la mayoría tuvo su primera experiencia con una computadora en esta investigación por lo que fue necesario un periodo de entrenamiento donde los estudiantes aprendieron a construir figuras, realizar mediciones, usar etiquetas, comentarios y se familiarizaron con el efecto de arrastre. Antes de iniciar el trabajo con la computadora se aplicó un cuestionario que valoraba la capacidad de los participantes para imaginar algunas transformaciones elementales en figuras geométricas sencillas, preguntas sobre variables, funciones y actividades con tablas de valores y gráficas. Algunas preguntas del cuestionario fueron: P1) El precio de cada fotocopia es de 20 centavos. ¿Cuánto se paga por 12 fotocopias? P2) ¿Cuánto se paga por 237 fotocopias? P3) Escribe una relación que exprese, en general, el precio para un número cualquiera de copias. P4) Se sabe que la temperatura en el mes de mayo es tal que aumenta, a partir del día primero, medio grado cada día. Si el último día de abril la temperatura fue de 22º C ¿Qué temperatura hay el día primero? P5) ¿Qué temperatura habrá el día 25? P6) Escribe una relación que exprese, en general, la temperatura de acuerdo al día. G6) El punto *P* se encuentra sobre el segmento *AB*. Si *P* está siempre a la misma distancia de *A* y *B* ¿cuánto mide *AP* si *AB* es igual a 10, 15, 17 y 21 cm?. G9) La "base" de un rectángulo mide inicialmente 6 cm y la "altura" 4 cm de modo que el área es de 24 cm^2 y su perímetro mide 20 cm. Si el perímetro permanece sin cambiar ¿cuánto mide el área del rectángulo si aumentamos la base a 7 cm? G10) Si la base mide 8 cm y el perímetro sigue siendo igual a 20 cm ¿cuánto mide la altura? G15) Dibuja tres rectángulos diferentes con perímetro de 20 cm y anota el valor de su área. G17) La longitud de una cuerda es de 20 cm ¿cuántos rectángulos pueden construirse con ella si la "altura" debe permanecer igual a 5 cm?
Aunque todos respondieron correctamente P1, P2 y P5, nadie respondió P3 ni P6, ningún estudiante pudo escribir una relación general. Solo dos respondieron correctamente G6, tres estudiantes respondieron correctamente G10 y las respuestas a G17 fueron del tipo: "ninguno", "uno", "no sé que pasa", "no entiendo". En esta pregunta los estudiantes no lograron imaginar que una figura puede variar permaneciendo constante su perímetro. Para el estudio experimental se formaron equipos de dos estudiantes, cada pareja trabajó en una computadora, y se diseñaron ocho actividades, de las cuales, dos se utilizaron en el periodo de entrenamiento. Los datos se recogieron en un formato tipo práctica que resolvía y entregaba cada pareja. Finalmente, se realizaron dos entrevistas grabadas en video. En el estudio se trabajaron actividades como las que se muestran abajo (A1, A2 y A3).
A1).- Construye un dibujo semejante al mostrado en la figura 1 de modo que *P* es un punto libre sobre *AB* y *M, A, N,* y *B* son fijos con *MA* y *NB* perpendiculares a *AB*. Mide los segmentos *PA*, *PM* y *PN*, simboliza *PA* por *x* y a la suma de *PM* con *PN* por *z*. Arrastra *P*, observa detenidamente y responde: a) ¿Qué sucede cuando se arrastra el punto *P*? b) ¿Cuándo cambia el valor de *z*? c) ¿De qué depende la suma (*z*) de *MP* y *NP*? d)¿Hay un valor de *z* que sea el mayor?

A2).- Construye un dibujo como el mostrado en la figura 2 en el que *P* sea un punto libre, *PM* es perpendicular al eje horizontal y *MN* perpendicular al eje vertical. Designemos a *OP* como *b*, la base del rectángulo *OPMN*, y a *ON*, la altura, como *a*. Mide los segmentos *OP* y *OM*, arrastra el punto *P*, observa detenidamente y contesta lo siguiente: a) ¿Qué cambia cuando se arrastra el punto *P*? b) ¿cambia el perímetro del rectángulo? c) ¿cambia el área? d) ¿de qué dependen los valores del área y el perímetro? Puedes utilizar las herramientas de *Cabri* que consideres necesarias.
A3).- Construye un dibujo como el mostrado en la figura 3 de modo que P sea un punto libre sobre la circunferencia. Explora la figura y responde lo siguiente: a) Al mover el punto *P* ¿qué cambia? ¿De qué depende?.

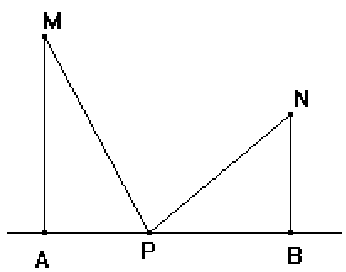


Figura 1

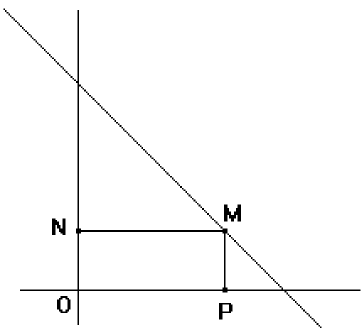


Figura 2

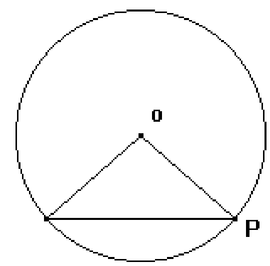


Figura 3

Se formaron 14 parejas para trabajar con la computadora. Después de ponerse de acuerdo, cada pareja entregaba el reporte con sus resultados en hojas impresas que contenía el desarrollo de la actividad. Por los propósitos de este estudio no era importante que los participantes construyeran la figura, si tenían problemas podían copiar el archivo que la contenía y seguían adelante. No fue registrada una diferencia notable en las respuestas si los estudiantes construían o no la figura. Las actividades pretendían establecer, a partir de lo observado en la pantalla, una relación entre dos o más elementos de la figura variando uno de ellos. Durante el desarrollo de las actividades no se planteó que los estudiantes simbolizaran las relaciones que encontraban pero se pedía que después de discutir y ponerse de acuerdo, cada pareja las verbalizara y las anotara. Finalmente, el grupo discutía y seleccionaba la que consideraban la correcta y la anotaba debajo de la suya. Mientras los estudiantes realizaban las actividades el instructor a cargo del estudio era solicitado para aclaraciones limitándose a resolver dudas con los comandos del ambiente o a guiar la discusión sin involucrarse en resolver directamente las preguntas. Su papel sí fue determinante para que las exploraciones de los estudiantes fueran sistemáticas. Además de las dificultades para construir las figuras, en las primeras actividades no fue fácil arrastrar elementos de la figura, percibir qué variaba y conectar esa variación con los valores que se actualizaban. Una vez que los estudiantes lograron coordinar la manipulación del objeto con la percepción del movimiento comenzaron a relacionar la variación con las variables, con sus valores que cambiaban conforme arrastraban el objeto seleccionado. Sin embargo, algunos estudiantes identificaron al arrastre como la variable responsable de variación, esto es, el arrastre fue asociado con la variable independiente. Conforme se desarrollaron las actividades, la mitad de los equipos (7) comenzó a desligar el arrastre como una variable. Los resultados del estudio muestran que, cuando las figuras fueron sencillas, la identificación de las variables no presentaba problemas y los enunciados orales, y las anotaciones respectivas, eran buenas descripciones de la relación funcional. Conforme las figuras tenían más elementos los estudiantes tuvieron dificultad para identificar las variables y grandes problemas para enunciar las relaciones. Al finalizar el estudio la generalidad de los participantes lograban identificar los elementos que variaban y ocho de las catorce parejas no tuvo problemas para reconocer las variables independientes y dependientes. Algunos reportes tienen anotaciones de verbalizaciones como las siguientes: "esta variable ( ) cambia cuando esta otra ( ) cambia". "al variar *a*, cambia *b*". "La suma *z* depende de los valores de *x*". "Los valores del área cambian al cambiar la longitud de la *base*" Un mes después de terminado el estudio se realizaron dos entrevistas videograbadas, la primera con Nadia, una estudiante de 14 años con un desempeño regular en el estudio. En la segunda entrevista participó Javier, también de 14 años, el estudiante con mejor desempeño en el estudio.

Entrevista 1

A Nadia (N) se le plantea la situación mostrada en la figura 4. El entrevistador (E) propone lo siguiente:

5 (E) "Mueve, arrastra el punto P y dime ¿qué cambia?"
6 (N) "*y* y *x*... Esto no se modifica" (señala el segmento AP)
7 (E) "Y ¿quién depende de quién?"
8 (N) "*x* depende del arrastre …del …(guarda silencio), del …"
9 (E) "Si dejamos de lado el arrastre. ¿Qué es lo que varía?"
13 (N) "Las medidas del segmento *x* y las medidas del segmento *y*"
14 (E) " Y, ¿quién depende de quién?"
15 (N) "*y* depende de la medida de *x*"
16 (E) "¿Cuántas variables tenemos?"
17 (N) "Dos, la *x* y la … (señala el segmento *y*)"
18 (E) "¿Puedes escribir la relación que existe allí?"

Después de pensar unos instantes la estudiante escribe en el pizarrón la expresión: $\boldsymbol{y = 3.0 + x}$.

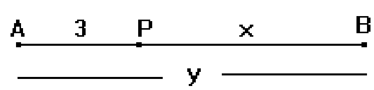


Figura 4

Entrevista 2

A Javier (J), se le plantea una actividad semejante a P1 donde el costo de cada copia es de cincuenta centavos. En esta parte de la entrevista no se utiliza la computadora. El entrevistador (E) cuestiona a J:

1 (E) "¿Qué precio debes pagar por 13 fotocopias?"
2 (J) "Seis pesos y cincuenta centavos"
Se le van planteando al estudiante otras preguntas que contesta correctamente, entonces el entrevistador le formula una nueva situación:
11 (E) "¿Puedes obtener una relación para un número cualquiera de copias?"
Después de pensar brevemente el estudiante anota en el pizarrón la expresión: $\boldsymbol{a\,(0.5) = b}$
12 (E) "¿ Qué significa 0.5?"
13 (J) "El precio por una copia"
14 (E) "Bien, ¿la letra *a* que significa?
15 (J) "El número de copias"
16 (E) "¿Y la letra *b*?"
17 (J) "El costo total de las copias"

Discusión. Los dos estudiantes entrevistados tuvieron un desempeño pobre en el primer cuestionario. Como todos, no respondieron las preguntas relacionadas con la simbolización de la variación, P3 y P6. Durante el desarrollo de las actividades estos estudiantes se convirtieron en lideres de sus respectivas parejas, avanzaron significativamente y en sus reportes escritos señalaron acertadamente las relaciones entre las variables. Pero, ¿cómo se explica la aparición de la capacidad de simbolización que anteriormente no estaba presente en estos estudiantes? Desde luego, el efecto de arrastre juega un papel importante, pero es insuficiente para explicar la simbolización, el arrastre sólo abre la posibilidad de percibir la variación. Las actividades también aportan, su diseño apunta a resaltar la variación y la conexión entre las variables en juego. El aspecto más importante, sin embargo, parece jugarlo la verbalización que hacen los estudiantes de la variación, el ejercicio de expresar oralmente la coordinación de los valores que aparecen en la pantalla, que cambian conforme es arrastrado un elemento de un dibujo, con la variación de ciertos elementos de ese dibujo. La verbalización, las palabras que usan los estudiantes tiene además, la huella de la herramienta utilizada. Es común la referencia al término "arrastrar" por los estudiantes, ellos dicen y escriben: "Si arrastramos el punto *a*, entonces la longitud del segmento va cambiando". "Cuando se arrastra el punto *p* hacia la derecha el área del triángulo disminuye. El área depende de la distancia recorrida por *p*". Los estudiantes aprendieron a medir y etiquetar los objetos que variaban y el instructor enfatizó que se identificara a la etiqueta con la variable. Como fue mencionado, los estudiantes tuvieron problemas para desprenderse de identificar el arrastre como una variable. En la entrevista con Nadia puede observarse que aunque ella tiene ese problema, puede simbolizar correctamente.

Conclusiones

Entender a través de una representación no es fácil. Percibir el cambio en diferentes registros y conectarlos, requiere aprendizaje. Aun percibir la variación apoyada con computadoras enfrenta dificultades, pero el software de geometría dinámica más que apoyar la percepción de la variación y proporcionar diferentes formas de representación, da al usuario la posibilidad de experimentar, de descubrir las relaciones estructurales de un dibujo y conectarlas con las variables. Se requiere entrenamiento con el software pero una vez que el sujeto se ha familiarizado, dispone de una nueva herramienta que le permite nuevos acercamientos a algunos temas problemáticos de la matemática. Esta exploración con el software de geometría dinámica nos lleva a considerar que la percepción de la variación es parte del proceso de aprendizaje del concepto de variable en una relación funcional Percibir y entender la variación parece ayudar a los estudiantes a identificar las variables y la verbalización de las relaciones entre las variables apoya la simbolización de las mismas. Si bien las simbolizaciones que se muestran son muy elementales, creemos que debe seguirse explorando el potencial del arrastre, junto con el diseño de actividades mejor enfocadas, para apoyar los procesos de simbolización que seguirán siendo, aun con tecnología, un problema.

Bibliografía

Graham, A & Thomas, M. (2000) *Building a versatile understanding of algebraic variables with a graphiccalculator*. In Educational Studies in Mathematics. **41**: 265-282.

Moreno, E. & Sacristán, A. (1996) *On visual and symbolic representations* In R. Sutherland & J. Mason (Eds.) Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education. Springer NATO ASI Series F, Vol.138, (pp. 178-189).

Moreno, L. & Santillán, M. (2002) *Visualizing and understanding variation*. In D. Mewborn et. al (Eds.) Proceedings of the twenty-fourth Annual Meeting PME-NA. Vol. 2, pp. 907-914. Athens, Georgia.

Noss, R. (1986) Constructing a conceptual framework of elementary algebra through LOGO programing. In

Educational Studies in Mathematics**17**: 335-357.

Noss, R. & Hoyles, C. (1996) *Windows on Mathematical Meanings*: Learning Cultures and computers. Mathematics Education Library Vol. 17. Kluwer Academic Publishers.

Schoenfeld, A. & Arcavi, A. (1988) *On the meaning of variable*. In Mathematics Teacher 81(6), pp. 420- 427.

Tall, D. & Thomas, M. (1991) *Encouraging versatile thinking in algebra using the computer*. In Educational Studies in Mathematics. **22**: 125-147

Yerushalmy, M. & Schwartz, J. (1993) Seizing the opportunity to make algebra mathematically and pedagogically interesting. In T. Romberg; E. Fenema & T. Carpenter (Eds.) Integrating Research of the Graphical Representation of functions. Lawrence Erlbaum Publishers.

PROPUESTAS DE ENFOQUES Y METODOS DE ENSEÑANZA

Aquí se presentan proposiciones para la enseñanza no necesariamente validadas si bien consideran un soporte reflexivo y/o teórico-conceptual que aportan a las practicas de la matemática educativa

SOBRE LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA: RE- CREANDO EL ARCO CAPAZ

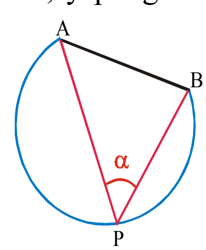
Cristina Ochoviet, Yacir Testa, Mónica Olave, Mario Dalcín.
Consejo de Educación Secundaria, Uruguay
princesa@adinet.com.uy, milefede@adinet.com.uy ,

Resumen

Se reporta una investigación realizada con alumnos de 15- 16 años sobre los algoritmos de construcción de un Arco Capaz de segmento y ángulo dado.
Se propuso a los alumnos un problema cuya solución óptima es un Arco Capaz de segmento y ángulo dado, y se les requirió luego que construyeran dicho arco utilizando regla, compás y semicírculo.
Los alumnos idearon diversas construcciones para el Arco Capaz pero en ningún momento aparece la construcción tradicional de Euclides. Básicamente, la idea que usan los estudiantes para construir el Arco Capaz, es la de obtener un triángulo cualquiera tal que uno de sus ángulos sea el ángulo dado para luego determinar su circuncentro y trazar el Arco.

Introducción

En la práctica tradicional se ha detectado que, a través de generaciones, la construcción de un Arco Capaz de segmento y ángulo dado, se realiza a través de un algoritmo geométrico que el docente transmite a sus alumnos buscando un entendimiento instrumental más que relacional. Como consecuencia de esta acción el algoritmo tradicional, es reproducido por los alumnos en forma mecánica, sin que exista un cuestionamiento profundo sobre las razones, ventajas, desventajas y alcances de su aplicación.
Como todo conjunto de reglas que es aprendido sin la participación activa del sujeto que aprende, el algoritmo pasa a ser olvidado rápidamente y nos cuestionamos si en estas condiciones tiene sentido la enseñanza que tradicionalmente se viene impartiendo. Lo que se ha detectado en la práctica es lo que Skemp (1976) ha descripto como "reglas sin razones", llegando tanto los profesores como los alumnos a reproducir una práctica sistemática de construcción que no alberga un entendimiento relacional.
Nuestra propuesta apunta a brindar un espacio de reflexión donde el alumno ponga en juego sus conocimientos y habilidades para generar sus propias construcciones de un Arco Capaz. El objetivo es generar en el alumno un entendimiento relacional, para que éste no sólo sepa como funciona el método sino también por qué, habilitándolo a relacionar el método con el problema a resolver y posiblemente a adaptar el método a nuevos problemas.
Proponemos una reorganización de este tópico de la geometría métrica, para que el aprendizaje resulte significativo para los alumnos, planificando las situaciones adecuadas para que los estudiantes desarrollen habilidades intelectuales y estratégicas, y pongan en juego sus redes de conocimientos de forma que les permitan conducirse eficazmente en las situaciones que enfrenten.



Antecedentes

Entendemos por Arco Capaz de segmento AB y ángulo α, el lugar geométrico de los puntos de un semiplano de borde AB desde los cuales se ve el segmento AB bajo el ángulo α.
"Desde P se ve el segmento AB bajo el ángulo α, esto significa que $\angle APB = \alpha$ *."*

En 4º año liceal de Enseñanza Secundaria en el Uruguay (nivel 15-16 años) figura en el currículo el estudio del Arco Capaz. Se estudian además temas como: ángulo al centro y ángulo inscrito en una circunferencia, demostración de la relación entre sus medidas, definición de Arco Capaz como Lugar Geométrico, resolución de problemas de aplicación.
En 5º año (nivel 16 – 17 años) en el curso de Geometría Métrica se aborda la misma temática en forma más rigurosa, demostrando en la mayoría de los casos todos los teoremas involucrados y realizando problemas de aplicación, con especial énfasis en el Arco Capaz como Lugar Geométrico. Es habitual en la práctica docente, en cualquiera de los dos niveles liceales mencionados anteriormente, que el profesor exponga el algoritmo de construcción del Arco Capaz que aparece en la proposición Nº 33 del libro III de los *Elementos* de Euclides y que permanece prácticamente incambiado hasta nuestros días. Podemos ver dicha construcción a continuación:

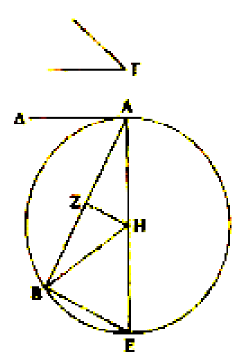
PROPOSICIÓN 33

Sobre una recta dada, describir un segmento de círculo que admita un ángulo igual a un ángulo rectilíneo dado.

Sea AB la recta dada, y el ángulo rectilíneo dado el correspondiente a Γ.

Así pues, hay que describir sobre la recta dada AB un segmento de círculo que admita un ángulo igual al correspondiente a Γ.

El ángulo correspondiente a Γ es entonces o agudo, o recto u obtuso; sea en primer lugar agudo, y como en la primera figura, constrúyase en (la recta) AB y en su punto A el (ángulo) BAΔ igual al ángulo correspondiente a Γ; entonces el (ángulo) BAΔ es también agudo. Trácese AE formando ángulos rectos con ΔA, y divídase en dos partes iguales AB en el (punto) Z, y trácese a partir del punto Z, ZH formando ángulos rectos con AB, y trácese HB.



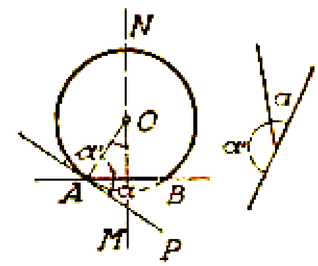
A modo de ejemplo, y con el objetivo de analizar brevemente el estado actual de la enseñanza de este tópico, veamos la construcción que se propone para el Arco Capaz en un libro de texto de uso generalizado en nuestro país, el *Curso de Geometría* de *Pedro Puig Adam*.

Extraído de:. Puig Adam. (1977). Curso de Geometría Métrica. Tomo I. Madrid. Biblioteca Matemática. Página 85. (1ª Edición año 1947).
El algoritmo que se presenta en este texto, que además es el mismo que aparece en otros textos para los alumnos, tiene, como vimos, sus raíces históricas en los *Elementos* de Euclides. Este algoritmo es tradicionalmente impuesto a los alumnos y viene siendo reproducido en forma sistemática por el profesorado sin que medie una reflexión sobre su uso y construcción. Esta imposición lleva a que el alumno crea que es el único algoritmo posible para construir el Arco Capaz.
De todo lo anterior se desprende que en 50 años de Educación Secundaria en nuestro país, no ha cambiado el discurso matemático escolar, no se ha tenido en cuenta el pensamiento matemático del alumno ni la influencia de los diferentes medios socioculturales donde el individuo crece y se desarrolla.

Metodología

Proponemos darle la posibilidad al alumno de que él cree su propio algoritmo de construcción generando así argumentos que le permitan lograr un aprendizaje más significativo. Con este objetivo se propuso a un grupo de 22 alumnos de nivel 15- 16 años

4. Construcción del arco capaz.—Para hallar el centro del arco capaz de un ángulo dado α sobre un segmento AB, bastará hallar en la mediatriz MN de AB un punto O tal que el ángulo AOM sea igual a α. Para ello construiremos en el semiplano opuesto un ángulo $BAP=\alpha$ y trazaremos por A la perpendicular AO al lado AP. Esta recta y la mediatriz se cortan (por cortarse sus perpendiculares) en el centro buscado. En efecto, $AOM=BAP=\alpha$ (por la perpendicularidad de los lados).



Obsérvese que la construcción del arco capaz del ángulo *suplementario* α' en el semiplano opuesto *da el mismo centro*, y que ambos arcos completan una circunferencia.

una secuencia didáctica con el fin de constatar si surgían construcciones alternativas del Arco Capaz (ver ANEXO).

En forma previa a la investigación se realizó en el grupo de estudiantes una revisión de los conceptos previos que se consideraban como necesarios para poder realizar dicha construcción. Estos son: definición de circunferencia, mediatriz, circuncentro, ángulo al centro y ángulo inscrito en una circunferencia, relación entre ellos, circunferencia circunscrita a un triángulo.

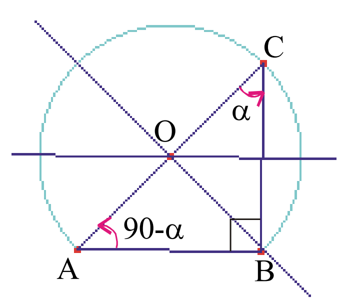
La secuencia se propuso a los alumnos en forma individual, luego confrontaron sus resultados en equipos de a tres elaborando un informe y por último se realizó una puesta en común, comentando los resultados obtenidos.

Resultados de la investigación

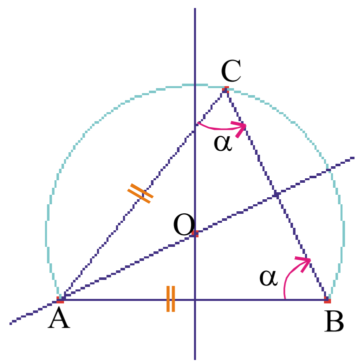
A continuación aparecen algunas construcciones que crearon los estudiantes para construir el Arco Capaz de segmento AB y ángulo α:

1) En este caso se construyó un triángulo ABC de lado AB conocido y ángulos adyacentes de 90º y (90º-α). De esta manera el ángulo en C mide α. Se determinó el circuncentro de dicho triángulo, que es el centro del Arco Capaz buscado.

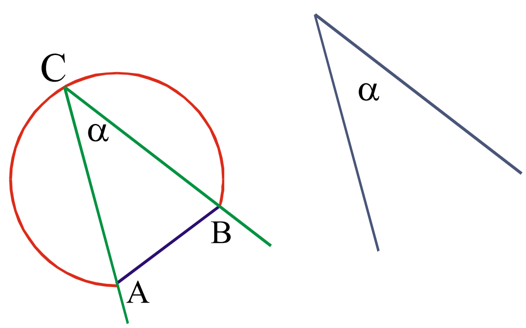
Observemos que el alumno está utilizando la propiedad de que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180º.



2) En este otro caso se construyó un triángulo isósceles ABC con los lados AB y AC de igual medida y el ángulo en B de medida α. De esta manera se asegura que el ángulo en C también mida α. Luego se determinó el circuncentro de ese triángulo, que es el centro del Arco Capaz buscado. En este caso el alumno está usando la idea de que un triángulo isósceles es isoángulo.

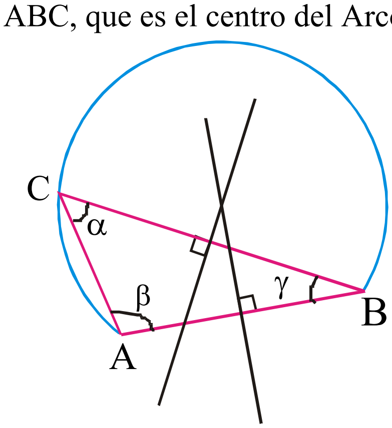


3) Si el ángulo de la derecha es el ángulo de medida α dado, por A y B, respectivamente, se trazan paralelas a los lados de dicho ángulo, que determinan un ángulo de vértice C y medida α. Se determina luego el circuncentro del triángulo ABC y se traza el Arco Capaz buscado.



4) Se construyó un triángulo ABC de forma que la suma de los ángulos adyacentes al segmento AB sea de (180º - α), en consecuencia el ángulo en C mide α. Luego se determinó el circuncentro del triángulo ABC, que es el centro del Arco Capaz buscado.

$\beta + \gamma = 180^o - \alpha$



Como podemos observar, las construcciones generadas por los estudiantes son altamente creativas y demuestran un entendimiento relacional del tema que se está estudiando. Deseamos destacar que en la presente investigación ningún estudiante generó la construcción que presentan tanto Euclides como los libros de texto que fueron analizados.

Conclusiones

En primer lugar señalaremos que en ningún caso los alumnos crearon espontáneamente la construcción de Arco Capaz tradicional ya expuesta.

En general, los alumnos crearon algoritmos de construcción cuya idea base fue la de construir un triángulo cualquiera de modo tal que uno de sus ángulos fuera el ángulo dado y el lado opuesto a éste fuera el segmento dado, para luego determinar su circuncentro y trazar el Arco Capaz buscado.

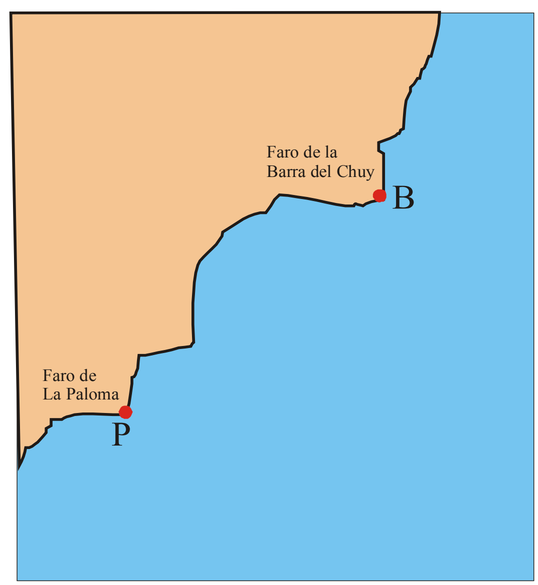
Los estudiantes lograron darle significado al algoritmo que crearon, dando argumentos que les permitieron lograr un entendimiento de carácter relacional en el sentido de Skemp (1976).

> Creemos que resultó altamente positivo haber generado un ámbito de reflexión para que los alumnos pusieran en marcha sus propias ideas, logrando así un aprendizaje rico en significados que pudieron posteriormente aplicar y adaptar a diferentes situaciones problemáticas.

ANEXO

Actividad 1

Un radioaficionado capta cierta información enviada desde un barco en situación de emergencia. Debido a la gran interferencia en la comunicación, generada por una tormenta eléctrica, solo alcanza a recibir el siguiente dato: las visuales desde el barco dirigidas al faro de La Paloma (P) y al faro de la Barra del Chuy (B) forman un ángulo de 50º. Utilizando el mapa que se te proporciona marca la posible ubicación del barco. ¿Es única?



Explica el procedimiento que realizaste.
Discute con tus compañeros de equipo los resultados que obtuviste.
Elabora una conclusión con tu equipo de la solución del ejercicio.
Puesta en común.
Actividad 2
Escribe las instrucciones necesarias para construir el arco que encontraste en la *Actividad 1*, usando regla, compás y semicírculo.

2) ¿Qué datos iniciales necesitas para poder construir el arco?

Bibliografía

Hemmerling, E. (1981). *Geometría Elemental*. México: Limusa.

Euclides. (1991). *Elementos* . Madrid, España: Editorial Gredos S.A.

Hernández Rojas, G. (1998). *El paradigma cognitivo.* En *Paradigmas en psicología de la educación*. Cap. 6 pp.117-167. México: Paidós Educador.

Puig Adam, P. (1977). *Curso de geometría métrica. Tomo 1*. Madrid, España: Biblioteca Matemática.

REDES NEURONALES ARTIFICIALES APLICADAS A LA EVALUACIÓN DOCENTE Y A LA TOMA DE DECISIONES EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

Martínez Luaces, V. Martínez Luaces, F
Universidad de la República. Universidad ORT. Uruguay.
victorml@fing.edu.uy , f.martnez@mailcity.com

Introducción y antecedentes

La evaluación ha sido un tema de constante preocupación en las diferentes áreas educativas, pero particularmente en las Matemáticas. Mucho se ha escrito sobre la evaluación del rendimiento estudiantil con relación a esta área del conocimiento, pero son considerablemente menos frecuentes los trabajos que se ocupan de la evaluación del desempeño de los docentes.

En nuestro caso, ésta ha sido una línea de investigación que tiene ya varios años de desarrollo y en la que aún continuamos. En diversos trabajos sobre el tema, hemos ido modificando la metodología para el tratamiento de los datos obtenidos.

En una primera instancia, en la Facultad de Ingeniería de la Universidad de la República de Uruguay, se utilizó un formulario de 25 preguntas con 5 opciones distintas de respuesta para cada pregunta, tomado de la Universidad de Valencia, España. Con este formulario, hemos recabado datos entre los años 1993 y 1996 inclusive. Con un instrumento esencialmente similar, pero esta vez utilizado en la Facultad de Química de la misma Universidad, se obtuvieron datos entre los años 1995 y 1997 inclusive. En los hechos, el cuestionario fue modificado para atender a la diversidad de situaciones: cursos teóricos, cursos prácticos de ejercicios y cursos prácticos de laboratorio.

En base a los datos obtenidos en la Facultad de Química, se realizó un primer trabajo, con estadísticas elementales, básicamente descriptivo, en esta área de investigación (Martínez Luaces, V., 1998a). Anteriormente se trabajó con un grupo de expertos, obteniéndose conclusiones muy similares a las que resultaron, posteriormente, de la opinión estudiantil (Casella, S. y Martínez Luaces, V., 1996)

De todos estos insumos surgió un trabajo de carácter más general, presentado en el Grupo de Estudio sobre la Enseñanza y el Aprendizaje de la Matemática en el Nivel Universitario, organizado por ICMI en Singapur a fines de 1998 (Martínez Luaces, V., 1998b).

Años más tarde, se volvió a trabajar sobre Evaluación Docente (Gómez, A. y Martínez Luaces, V., 2001) y Evaluación de la Calidad de Enseñanza (Gómez, A., Guineo, G. y Martínez Luaces, V., 2002), en la Facultad de Química, utilizando para el tratamiento de los datos, técnicas de la Estadística No Paramétrica y del Análisis Multivariado.

Metodología

A principios del año 2002, profundizamos en un nuevo aspecto de esta área de investigación, al utilizar una metodología diferente: el análisis de la evaluación docente mediante el uso de Redes Neuronales Artificiales (ANN por sus siglas en inglés). En este trabajo se analizan datos de Facultad de Ingeniería y de Facultad de Química, intentando predecir el juicio global de los estudiantes a partir de los resultados de otras variables.

¿Por qué la idea de utilizar ANN en relación a la Evaluación Docente? Antes de responder a esta pregunta comenzaremos por describir brevemente en qué consisten y cuál fue su origen. Las ANN, como parte de la llamada computación no-lineal, originadas hace algunas décadas, representan un intento de copiar los procesos (con alto grado de paralelismo) que tienen lugar en las neuronas del cerebro, de acuerdo a investigaciones procedentes de la Neurobiología. Esta herramienta ha tenido gran difusión en los últimos años, debido al éxito que se ha obtenido con ésta técnica en diversas áreas, al punto que en muchas de ellas, las ANN ya han abandonado el laboratorio, para implementarse en forma industrial. Son muy diversos los problemas para los cuales no se encontraban algoritmos lineales satisfactorios, y sin embargo, a través de las ANN se ha arribado en muchos de ellos a una solución factible, en particular cuando dichos problemas tienen que ver con el reconocimiento de patrones.

En el estudio de la Evaluación Docente cabría preguntarse si existen patrones que permitan medir la eficacia docente. Al respecto, es común que las encuestas realizadas entre el estudiantado soliciten una evaluación parcial del docente en diversos aspectos de su desempeño. Algunos de estos aspectos son: conocimiento disciplinar, manejo del pizarrón, motivación, relación con los estudiantes; etc.. A todo lo anterior se agrega una evaluación global del docente.

Una situación ideal sería, sin duda, determinar si existe una relación funcional entre dichas variables parciales y el juicio global. En la práctica esto no es viable, no solamente por la complejidad matemática que tendría dicha función, sino porque ésta no es estática en tiempo y espacio, sino que en diferentes dominios (en nuestro caso encuestas en diferentes instituciones) y también en diferentes períodos, dicha relación funcional experimentará cambios.

Minimización del error en Perceptrón Multicapa

El Perceptrón es un tipo de ANN que, como otros, se compone de unidades de procesamiento llamadas "neuronas" o elementos de proceso (PE, en inglés). Cada neurona tiene en general varias entradas y una única salida de datos, aunque esta puede distribuirse entre varias neuronas. A su vez, dichas entradas se ven afectadas por un vector de "pesos" como puede verse en la figura 1.

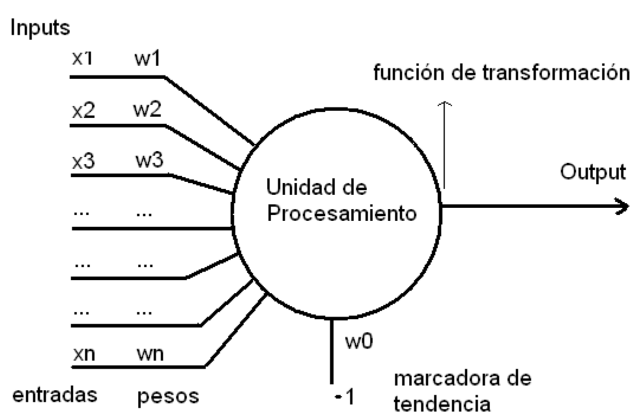


Figura 1.

Las neuronas se organizan en estructuras de datos llamadas "capas". Cada capa recibe información de la capa anterior y la pasa a la siguiente. La capa inicial o Capa de Entrada, es la que toma, en nuestro caso los datos de la encuesta, luego se interconecta con la capa siguiente llamada Capa Oculta, que es donde ocurre la parte fundamental del proceso y finalmente hay una Capa de Salida, donde en nuestro caso, se obtiene el juicio global resultante. Todo lo anterior se encuentra esquematizado en la figura 2.

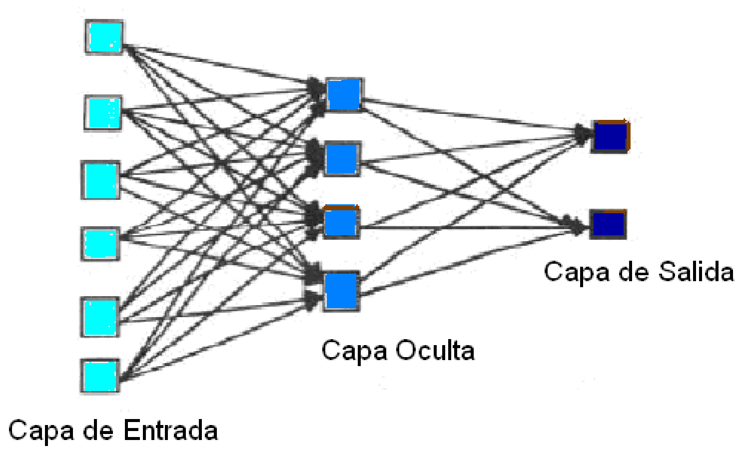


Figura 2.

La clave de la capacidad de las ANN para predecir resultados, radica en los pesos (valores numéricos) que en cada neurona se asignan a las variables que se le introducen. A su vez, dentro de cada neurona, se realiza una suma ponderada de sus entradas con dichos pesos, y luego de transformar el resultado mediante una función específica se pasa a las neuronas siguientes. En nuestra ANN, fijamos estos pesos inicialmente mediante una función randómica en valores pequeños, pero luego, a medida que se "entrena" la red, éstos deben ir variando hasta alcanzar una configuración óptima que minimice el error del resultado final (Picton, Ph, 2001).
El proceso anteriormente descrito, se logra mediante el uso de un algoritmo llamado "BackPropagation" o Propagación hacia atrás, que es el que utilizamos. Dicho algoritmo consiste en entrenar la red, dándole juegos de variables, y luego de obtener un resultado global por parte de la ANN, indicarle cual debió ser el resultado exacto, para que realice correcciones tendientes a minimizar la función de error. En la neurona de salida, esto es inmediato, ya que al calcular la diferencia, pueden ajustarse sus "pesos" para que en una nueva ejecución, el error sea menor. Luego, en las neuronas de capa oculta, el error no es explícito, porque no podemos determinar directamente cual debió ser la salida de cada una para que el resultado final fuese exacto. Aquí es donde se aplica el algoritmo de BackPropagation, tomado de la Teoría de Errores, en particular aplicando el cálculo del error de las variables en conexión con un error funcional dado. En las ANN elementales, se suele utilizar la función "escalón" como función de transformación de la salida, pero en nuestro caso, utilizamos la función "sigmoidal", tangente hiperbólica, ya que tiene un

comportamiento que se aproxima a dicha función pero con la ventaja respecto a aquella de ser derivable, un requisito esencial para implementar la Propagación Hacia Atrás. Así, a medida que se entrena la red, se busca minimizar el error en cada neurona, lo que significa minimizar las derivadas, por lo que también se le ha llamado a esta técnica “algoritmo del gradiente descendente”.

Resultados

En este trabajo, se utilizaron 12 variables parciales y un juicio global obteniéndose promedios de error del 2% y menores. En la figura 3 se puede apreciar la evolución del error relativo con respecto al número de docentes considerados. Dicho error fluctúa al comienzo, luego disminuye y finalmente tiende a permanecer constante.

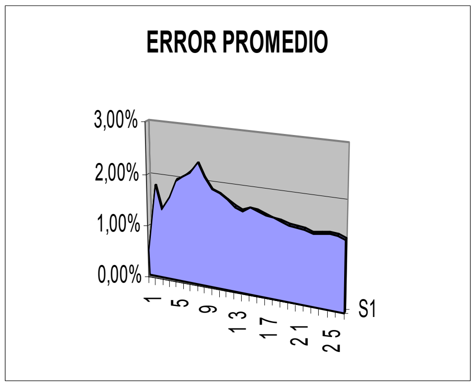


Figura 3. Error promedio vs. Número de docentes.

Además del error promedio, ya analizado, conviene visualizar el error cometido en cada valor predicho, respecto del valor real. En la figura 4 se representan los valores reales de juicio global para los 27 docentes considerados y el error absoluto correspondiente a cada caso.

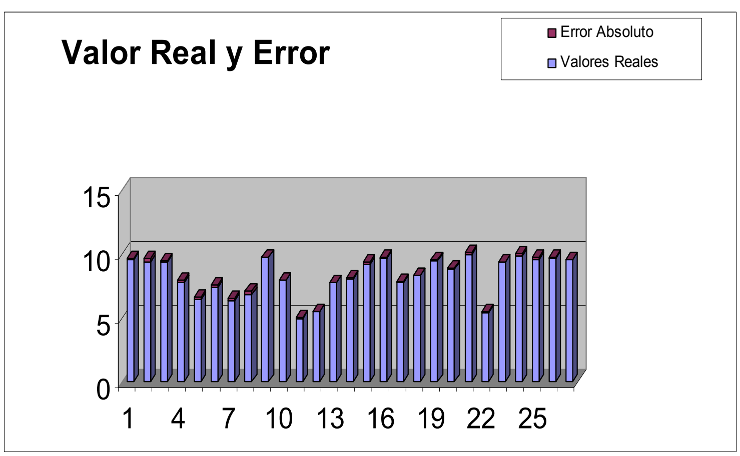


Figura 4. Valores reales de juicio global y error absoluto correspondiente.

Si bien los errores pueden ser considerados aceptables, un análisis estadístico mostró que los resultados predichos por la red y los valores reales no coinciden. En efecto, la aplicación del Test "t" de Muestras Ligadas, permite concluir que se trata de dos poblaciones diferentes cuando se trabaja al nivel de significación del 0.05 (Martínez Luaces, V., 1999). En una red que trabaja con 12 variables, como en este caso, la información introducida al sistema podría ser "excesiva". Concretamente, podría contener información redundante que tiende a sobrevalorar alguna faceta por su repetición en diversas formas en el cuestionario. También, podría estar introduciendo "ruido" en la red debido a la inclusión de información no relevante que tiende a crear confusión, más que permitir definir los elementos que determinan la evaluación global.

Conclusiones

Del tratamiento de datos realizado surgen dos conclusiones inmediatas:

El error relativo tiende a estabilizarse entre 15 y 20 docentes considerados.

Los docentes con pocos alumnos encuestados (menos de diez) generan un mayor error en la aproximación

En el caso en estudio (12 inputs), se encontraron dificultades debido al número considerable de entradas, que paradójicamente, en el caso de ANN (y tal vez en la mente del estudiante que participa en la encuesta) provoca confusión al introducir información redundante o no relevante que puede ocultar los aspectos verdaderamente esenciales del desempeño docente. En el otro extremo, disponer de un número muy pequeño de preguntas no permitiría predecir adecuadamente un juicio global. Cabe entonces plantearse, la posible conveniencia de una solución de compromiso, donde se consideren los diversos aspectos de la práctica docente, pero evitando sobrevaluar alguno de ellos, o bien incluir información no relevante. Una posibilidad sería entonces, trabajar con "variables condensadas", elaboradas en base a una "clusterización" previa (Gómez, A. y Martínez Luaces, V., 2001) y así poder, en principio, tomar como base una cantidad intermedia de variables fundamentales. Esta combinación de técnicas de Análisis Multivariado y ANN, justifica una cierta línea posible de continuación en este tipo de investigaciones.

Bibliografía

Gómez A., Guineo, G. y Martínez Luaces, V., 2002 "Un trabajo de Investigación-Acción en un curso de Ecuaciones Diferenciales para Ingeniería de Alimentos". *Página Web del X EMCI (Enseñanza de Matemática en Carreras de Ingeniería),* Resistencia, Argentina.

Gómez, A. y Martínez Luaces V., 2002. "Evaluación docente utilizando Análisis Multivariado", *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 15.2, pp. 1016-1021. Ed. CLAME, México.

Martínez Luaces, V. 1998a. Matemática como Asignatura de Servicio: algunas conclusiones basadas en una evaluación docente. *Números*. Revista Española de Didáctica de Matemática, España

Martínez Luaces, V. 1998b. Considerations about Teachers for Mathematics as a Service Subject at the University *Pre-proceedings of ICMI Study Conference*, Singapore, Nanyang Technological University

Martínez Luaces, V. y Casella, S., 1996 La educación matemática en las diferentes ramas de la Ingeniería en el Uruguay hoy. *Memorias del II Taller sobre la Enseñanza de la Matemática para Ingeniería y Arquitectura*. La Habana, Cuba.

Martínez Luaces, V., 1999. *Estadística Aplicada a Ingeniería Ambiental*. Ed. IMFIA, Montevideo.

Picton, Ph., 2001. *Neural Networks*, pp. 37-47.

¿QUÉ PINTAN UN MOTOR Y UNA BOTELLA EN EL CÁLCULO INTEGRAL? CURSO CORTO DE DIDÁCTICA

Tomás Ortega
Universidad de Valladolid. Valladolid. España.
ortega@am.uva.es

Resumen
Se pretende crear un marco de resolución de problemas que sea motivador para los alumnos del último año de Bachillerato o del primer año de estudios en la Universidad, y para ello se presentan cuatro problemas reales, cuya solución requiere establecer el concepto de integral definida, y uno histórico, que fue propuesto y resuelto por Arquímedes. Asimismo, en el desarrollo del curso se verá la importancia del uso de herramientas didácticas, tales como el generador de volúmenes de revolución, que se construirá en el propio curso, y el ordenador, cuyo uso será absolutamente necesario para resolver los problemas planteados. En suma, además de promover adaptaciones curriculares adecuadas, se fijan estos tres objetivos fundamentales: Cómo se crea un marco de resolución de problemas y cómo se integran herramientas didácticas apropiadas[1].

Currículo motivación y metodología: Reflexiones desde la psicopedagogía

Desde hace varias décadas psicólogos y pedagogos vienen estudiando el rendimiento académico de los estudiantes en las aulas de matemáticas y han detectado características muy concretas del alumnado que repercuten negativamente en el aprendizaje. Autores como B. Martínez (1980, 30-32), B. Tierno (1989, 100-107) y E. Mira (1979), entre otros, señalan cómo, en general, en los Centros se exige un mínimo cultural muy inferior a las posibilidades de aprendizaje de los alumnos, porque éstos hacen muy poco; se muestran pasivos y son muy desorganizados, y en estas condiciones el rendimiento es bajo. Aparte de problemas de tipo psíquico y a períodos refractarios de aprendizajes, la pasividad lleva consigo una falta de interés por aprender que, en unas ocasiones, puede ser atribuida a que la materia que se trata de enseñar está fuera del entorno de intereses biológicos del alumnos, y, en otras, una falta de confianza en sus posibilidades que les lleva al abandono. En estas circunstancias es importantísimo motivar al alumno y valorar su rendimiento intelectual. Aunque en el aula de matemáticas quizás sea el entusiasmo del profesor el elemento motivador más importante, también se debe buscar en la propia trasmisión del conocimiento, de manera que se produzcan aprendizajes significativos para los alumnos. En este sentido son muy interesantes: los apuntes históricos de la matemáticas, aplicaciones que resuelven problemas de la vida real, crear la necesidad de aprendizaje para resolver un problema determinado, utilizar los recursos didácticos adecuados, aumentar la autoconfianza, etc.

Finalmente, la conducta de los alumnos en el aula es otro aspecto a tener en cuenta, y que está directamente relacionada con la disciplina de aula, pero, sobre todo, con la actividad desarrollada en la misma, ya que la conducta natural de las personas cuando forman grupo y están inactivas es la de comunicarse y esto produce alboroto, y, por tanto, se produce una perturbación. D. Fontana (1989, 19-57) hace un estudio de las diferencias de conducta y de sus problemas, señalando, entre otros, al aburrimiento, al

[1] La presentación de este Curso Corto, ha sido subvencionada, en parte, por el Proyecto BXX2000-0069 de la Dirección General de Enseñanza Superior. España.

propósito deliberado de querer perturbar la clase o de molestar al profesor, a la aptitud, al autoconcepto, a la ausencia de éxitos, participación en actividades ajenas a la docencia, etc.

Propuesta curricular

Aquí sólo se hace un esbozo a título de ejemplo, ya que hay que tener en cuenta el perfil de los alumnos como estudiantes, los estudios posteriores que tienen que realizar (fundamentación y funcionalidad) y el perfil profesional que van a alcanzar.

<table>
<tr>
<td>Objetivos. Es que los alumnos entiendan el concepto de integral definida y sean capaces de aplicarlo para resolver problemas. Distinguir y relacionar la integral definida e indefinida de una función con los conceptos de primitiva y función integrable. Saber integrar numéricamente, ver su generalidad y saber aplicarlo mediante software adecuado. Conocer las técnicas elementales del cálculo de primitivas.</td>
<td>Conceptos. Integral definida. Integración numérica. Teorema fundamental del cálculo. Conceptos elementales. Técnicas elementales para el cálculo de primitivas. Aplicaciones de la integral definida: áreas, volúmenes, centros de masa, etc
Actitudes. Hacia la valoración del trabajo realizado y confianza en las propias posibilidades de superación de las dificultades conceptuales. Apreciación del trabajo personal y colectivo, orden, sistematización, búsqueda y uso de estrategias de resolución. Interés por la precisión numérica y por la resolución analítica.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Procedimientos. El concepto de integral definida deberá establecerse a partir del cálculo de áreas definidas bajo una curva. Se construirán las sumas de Darboux, figura 1, a la vez que se dibujarán para una función positiva. Eligiendo un punto interior de cada subintervalo se construyen las sumas de Riemann, figura 2, lo que de forma natural aporta un método general de integración numérica. Conviene notar que para cada partición sólo hay dos sumas de Darboux, mientras que hay infinitas sumas de Riemann. Las de Darboux son más interesantes para relacionar el concepto con el de área, pero las de Riemann son más apropiadas para efectuar una integración numérica. El siguiente teorema permite utilizar unas sumas u otras indistintamente.
Si f es acotada en [a,b], entonces f es integrable Darboux sií lo es Riemann.
Cuando se haga integración numérica conviene que la partición sea uniforme. En este caso, utilizando una hoja de cálculo los puntos en los que se evalúa la función se generan de forma automática. La regla de trapecios es muy intuitiva y tiene mayor orden de convergencia, ...
El Teorema Fundamental del Cálculo, que debe establecerse inmediatamente después de definir el concepto de primitiva, da un método analítico para determinar integrales definidas y con él se establece la necesidad del cálculo de primitivas.
En la actualidad tiene poco sentido que los currículos se extiendan en calculotes y en desarrollos simbólicos. Por el contrario, en mi opinión sólo se deben desarrollar los métodos generales de cálculo de primitivas (descomposición, sustitución e integración por partes y algún método particular sencillo) y el formalismo necesario para que la Matemática no se distorsione.
Se deben justificar las aplicaciones de la integral definida mediante procesos de sumatorios de Riemann: de áreas de rectángulos, de volúmenes de cilindros, de centros de masas de rectángulos, etc.</td>
</tr>
</table>

Material didáctico

Libros; Generador de volúmenes: Cartulinas de funciones; Calculadoras programables y graficadoras; Ordenador con software Derive, Maple, Funciones, Calcula, Excel, Quattro-Pro.

El generador de volúmenes gira las cartulinas alrededor del eje de abscisas (puede considerarse el de ordenadas) y así se obtiene una imagen del volumen que genera el recinto plano representado en la cartulina. Esta visión “real” del volumen permite que los alumnos distingan las partes huecas de las macizas y en los casos donde haya superposición de volúmenes, si el recinto plano está en ambos lados del eje de giro, hay que elegir el que genera el volumen. En suma, los alumnos podrán entender mejor qué límites de integración son los que debe tener la integral definida en cada zona y qué función genera el borde del volumen.

Metodología

Dada la importancia que tiene la motivación de los alumnos, los contenidos propios deben ir precedidos de un marco de resolución de problemas, problemas que deberán resolverse después. Aquí se presenta uno en el que se formulan 5 problemas interesantes. Habrá presentaciones y exposiciones conceptuales a cargo del profesor, haciendo partícipes a los alumnos de las mismas mediante preguntas y propuestas de pequeñas aplicaciones o situaciones controvertidas. Los alumnos trabajarán en grupos e individualmente ejercicios de aplicación. Manipularán el generador de volúmenes para delimitar los límites de integración de los volúmenes de revolución que generan las "cartulinas" para que distingan partes "huecas" de "macizas" y, en suma, las funciones que generan el volumen. Harán prácticas de ordenador en las que tendrán que hacer cálculo simbólico y aplicar integración numérica, con la hoja de cálculo, y simbólica, con Derive o Maple, para resolver problemas de cálculo de áreas, volúmenes de revolución, centros de masas, etc.

Marco de resolución de problemas

Área de un campo de golf: En un diagrama cartesiano, se representa la delimitación de un terreno en el que se quiere instalar un campo de golf. La parcela en cuestión está determinada por un río y por un camino. El borde del camino coincide con el eje de abscisas, la curva que describe el río es la representación cartesiana de la función $f(x)=x\cdot(sen(3x/4)+1)+3$ y el segmento BC está sobre la perpendicular al camino por el punto C, que es el punto del río más cercano al camino (mínimo de la función) tras el ensanche. ¿Cuál es su área, sabiendo que las unidades del diagrama cartesiano son Hectómetros? ¿Se podría determinar el área si en vez de conocer la función se supieran cuáles son las coordenadas de puntos situados en el borde del río?

El modelo físico de Arquímede: El matemático más importante de la Antigüedad, Arquímedes de Siracusa (287-212 a.C.), describe cómo las investigaciones "mecánicas" le llevaron a los descubrimientos matemáticos más importantes. Es consciente de que sus primeros pasos carecen de rigor y postula que es más fácil demostrar algo cuando de antemano se tiene una idea de lo que se quiere obtener. Arquímedes indica que tiene un método mecánico, "el de la palanca" que le ayuda a preparar el camino de las demostraciones. Uno de los teoremas que descubrió por este método fue el siguiente "*El área de un segmento parabólico, ABC, es un tercio del área del triángulo APC, siendo AP la tangente a la parábola en A y PC "con la misma dirección que el eje de la parábola"*. La figura 4 es una representación gráfica de este problerma que, sin duda, es precursor del Análisis Matemático, que surge con Newton y Leibniz XIX siglos después.

Masa que contiene un volumen de revolución y capacidad del mismo: El alfarero genera los volúmenes haciendo girar el torno y separando el barro con las manos. En este mecanismo ancestral los recipientes se construyen como si alrededor del eje de simetría giraran funciones: una o más (también se puede considerar definida a intervalos) para dar la forma externa a la vasija y otra o más, para construir su capacidad. Se va a construir una copa tal que, a escala 1/2, el perfil de la zona campaniforme se delimita al girar alrededor del eje de ordenadas la superficie comprendida entre las parábolas de ecuaciones $y=5x^2/8$ e $y= 9x^2/16+1$ y el perfil de la base se delimitan al girar alrededor del mismo eje la zona definida por la parábola $y=-x^2/3$, por el eje de ordenadas y por la recta $y=-2x/3+1$, hasta que ésta corta a la parábola $y=2x^2-3$. Se trata de hallar la masa y la capacidad total de la copa con un llenado hasta la altura delimitada por $y=8$. En la figura 5 están representadas las funciones recíprocas de éstas $(y=(8x/5)^{1/2}$, $y=4/3(x-1)^{1/2}$, $y=(-3x)^{1/2}$, $y=-3(x-1)/2$, ya que ambas componen los mismos perfiles de la vasija.

Diseño de recipientes de volumen dado: Algunos estudios de *marketing* para analizar el gusto de los consumidores por la forma de los envases. De los modelos utilizados en el estudio, la figura 6 muestra el perfil lateral de una la botella de vidrio diseñada con FUNCIONES (software libre del MEC) para envasar líquidos. Este perfil es la representación gráfica de la función $f(x)=a\cdot(x-0{'}1)^2\cdot(x-1)^2\cdot((x-2)^4-0{'}04)+0{'}5$, en $[0,2]$ para $a=3/4$. Halla el valor de a para que la capacidad de la botella sea de 3/4 l.

Centro de gravedad de un forjado de hormigón. Equilibrio estático: En una vivienda se pretende construir un tejadito semicircular para cerrar el descansillo de una escalera y con ello construir un mirador. Para ello se construye una "galleta" de forjado como la forma de la figuras 7 y 8, formada por un semicírculo de 110 cm de radio y un rectángulo de 240×36 y 20 cm de espesor. La parte rectangular se incrusta en la pared y la semicircular soportaría el tejadito. ¿Qué altura de pared hay que levantar por encima de la "galleta" para que el centro de gravedad del conjunto pared-galleta esté dentro de la pared? La densidad de la galleta es la misma que la de la pared y ésta tiene 40 cm de espesor.

Conceptos fundamentales
Función integrable, primitiva, integral indefinida, teorema de caracterización y teorema fundamental del cálculo.

Teorema de caracterización. *La función f es integrable Darboux en [a,b] sií para cualquier aproximación positiva de cero*, ε, *existe una partición P de [a,b] tal que la diferencia entre la suma superior de Darboux relativa a P y la correspondiente suma inferior es menor que* ε.
Conviene aplicar este test a algunas funciones integrables, bien a casos particulares o bien a familias (monótonas crecientes, continuas) y a algunas que no lo sean.

Teorema Fundamental del Cálculo. Debe establecerse inmediatamente después de definir el concepto de integral definida, ya que da un método analítico para determinar integrales definidas y con él se establece la necesidad del cálculo de primitivas (del que no se debe abusar). Aquí se reproducen dos formas diferentes de entender el Teorema Fundamental del Cálculo y de ellas yo soy partidario de que se establezca aplicando el Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial (procedimiento de la segunda columna) la que la conexión con la derivada es menos natural en el primero y, además, tiene que ser completado con la regla de Barrow. Un análisis bajo el punto de vista de la funciones de la demostración (verificación, explicación, sistematización, comunicación y descubrimiento, -de Villiers, 1990-) ponen de manifiesto que el segundo ejemplo aventaja al primero en todas las funciones:

Primer teorema fundamental del cálculo integral[2]:	**Teorema fundamental del cálculo integral**[3]
Sea f integrable sobre [a, b] y se define F sobre [a, b] por $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ Si f es continua en c de [a, b], entonces F es derivable en c, y F'(c)=f(c). Demostración: Suponemos que c está en (a, b); para c=a o b, los razonamientos son análogos con las derivadas laterales. Sea h>0. Entonces: F(c+h)-F(c) $=\int_c^{c+h} f(t)\,dt$ Se definen: $m_h=\inf\{f(x): c<x<c+h\}$, $M_h=\sup\{f(x): c<x<c+h\}$. Se deduce: $m_h h \le \int_c^{c+h} f(t)\,dt \le M_h h$ O bien: $m_h \le \frac{F(c+h)-F(c)}{h} \le M_h$ La misma expresión se obtiene cuando h<0. Tomando límites cuando $h \to 0$, y puesto que f es continua en x=c, se obtiene: F'(c)=f(c). Es necesario el segundo teorema fundamental del cálculo, que coincide con la regla de Barrow.	Si f es integrable Riemann en [a,b] y G es una primitiva suya sobre este intervalo, entonces $\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$ Demostración. Sea P={x_0, x_1, x_2, ..., x_n} una partición arbitraria de [a,b]. $\sum_1^n [G(x_i) - G(x_{i-1})] = G(x_1) - G(x_0) + G(x_2) - G(x_1) + ... + G(x_n) - G(x_{n-1}) = G(b) - G(a)$ Por el teorema del valor medio, en cada subintervalo [x_{i-1}, x_i], existe un □$_i$, interior, tal que G(x_i)-G(x_{i-1})= G´(□$_i$)x_i y por ser G una primitiva de f, entonces G(x_i)-G(x_{i-1})=f□$_i$)x_i. Por tanto, $\sum_1^n f(\alpha_i)\Delta x_i = G(b) - G(a)$ Como las sumas de Riemann están acotadas por las de Darboux, entonces, $\underline{S}(P,f) = \sum_1^n m_i \Delta x_i) \le \sum_1^n f(\alpha_i)\Delta x_i) \le \sum_1^n M_i \Delta x_i) = \overline{S}(P,f)$ Por otra parte, como P es una partición arbitraria $Inferior \int_a^b f(x)dx \le G(b) - G(a) \le Superior \int_a^b f(x)d$ Finalmente, el hecho de que *f* es integrable termina la prueba.

Verificación: el resultado del segundo es más fuerte que el del primero.
Explicación: La desigualdad $m_h h \le \int_c^{c+h} f(t)\,dt \le M_h h$ y el paso al límite en el primer caso encierran una gran dificultad .
Sistematización: Se ordenan mejor las ideas en el segundo que en el primero con un flujo continuo sin tener que recurrir a resultados adicionales fuera del concepto de integral definida en el propio flujo.
Comunicación: Es evidente que el segundo transmite mejor el mensaje matemático.

[2] Ver SPIVAK, M. (1970, 358).

[3] Ver FISCHER, E (1993, 649).

Descubrimiento: La expresión $\sum_{1}^{n} f(\alpha_i)\Delta x_i = G(b) - G(a)$ asegura que existen *n* nodos, $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_v$ (n arbitrario) para los que el método de los rectángulos con paso constante es exacto. Esta expresión también es indicativa de que al aumentar el número de nodos el error de integración disminuye y se trata de un teorema de valor medio de n nodos, con n variable (Este resultado es una primicia de este curso).

Función integrable, primitiva e integral indefinida

Son conceptos diferentes aunque, desafortunadamente, en algunos textos aparecen con el mismo significado. Desgraciadamente esta confusión también forma parte de las creencias de buena parte del profesorado. A continuación se exponen unos ejemplos que clarifican esta situación.

Una integral indefinida sí que es una Primitiva, pero este concepto es más general que el de integral indefinida. Así, por ejemplo, la integral indefinida $\int_a^x \cos(t)\,dt = sen(x) - sen(a)$ nunca puede ser sen(x)+2, ..., que es una primitiva.

Hay funciones integrables que no tienen primitiva, y funciones que tienen primitiva y no son integrables. Así, por ejemplo, la función

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \in [-2,0] \\ +1, & x \in [0,2] \end{cases}$$

es integrable en [-2,2] y, sin embargo, no tiene primitiva en dicho intervalo. Por otra parte, la función

$$H(x) = \begin{cases} x^2 sen\left(\dfrac{1}{x^2}\right), & x \in [-1,0) \cup (0,1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

es una primitiva de $h(x) = \begin{cases} -\dfrac{2}{x}\cos\left(\dfrac{1}{x^2}\right) + 2x sen\left(\dfrac{1}{x^2}\right), & x \in [-1,0) \cup (0,1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

y, sin embargo, h(x) no es integrable en [-1,1]

Tema 2. Problemas clásicos. El generador de volúmenes

En este tema se va a abordar la resolución de los problemas clásicos planteados, se va a construir el generador de volúmenes y se va a poner en funcionamiento para ver cómo se puede ayudar a los alumnos a delimitar los límites de integración. También se va a utilizar software de ordenador para hacer los cálculos, de manera que los alumnos vayan resolviendo los problemas paso a paso. El software debe utilizarse para aprender y no para enmascarar los aprendizajes.

Cálculo de Áreas y solución del primer problema

Este apartado no merece ningún desarrollo especial, ya que la construcción de las sumas de Darboux o Riemann es el proceso a seguir para introducir el concepto de integral definida. Para resolver el primer problema, lo primero que debe hacerse es

determinar el intervalo de definición de la integral. El origen, *a*, es el punto de corte de la función *f(x)=x·(sen(3x/4)+1)+3* con el eje de abscisas, y el extremo, *b*, es la abscisa donde la función alcanza el mínimo. Ninguno de estos valores son sencillos de determinar y, por ello, conviene utilizar software adecuado. Con FUNCIONES se hallan automáticamente los valores de *a*, de *b* y del área. Hállalos y transcribe los resultados: ¿?
Una integración por partes permite obtener la primitiva: *F(x)=* ¿? .
Evalúa con EXCEL la función anterior y escribe: *Área=* ¿?
También se puede utilizar EXCEL para hacer una integración numérica. Aplica la regla de los trapecios a 50 trapecios y la regla de los rectángulos a otros 50 rectángulos (con sumas de Riemann evaluadas en el punto medio). Escribe las soluciones numéricas encontradas:
Trapecios: $Área \approx ((f(x_0)+f(x_n))/2+f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_{n-1}))h$ =¿?
Rectángulos: $Área \approx (f(\alpha_1)+f(\alpha_2)+...+f(\alpha_{n-1})+f(\alpha_n))h$ =¿?
En ambos casos, las alturas de los trapecios o rectángulos es el "paso",*h,* de los nodos equiespaciados y para *n=50, h=*. . . . .

Solución del problema de Arquímedes
Para resolver este problema Arquímedes consideró que AH es una palanca con punto de apoyo en K (punto medio de PC y de AH), y demostró que si se suspenden de H todos los segmentos lineales (indivisibles) que corforman el segmento parabólico en la dirección del eje, se equilibra la masa del triángulo APC. La relación entre la distancia del c.d.m. del triángulo a K y la distancia de K a H termina la demostración.
Como es lógico, aquí se utilizarán resultados del Análisis Matemático y un simbolismo apropiado. En primer lugar se considerará una parábola particular de eje vertical, esta situación da lugar a un esquema de prueba pre-formal (van Ash, 1993).
Sea $y=-x^2+2x+8$, y los puntos de la parábola C=(0, 8) y A=(3,5).
¿Con estos puntos la recta AC tiene ecuación =? ; y ¿la recta AP esta otra?.
Ahora sólo hay que calcular las áreas que corresponden al segmento y al triángulo, y comprobar que se verifica el resultado

Área del segmento: $\int_0^3 (Ec.\, parábola - Ec.\, recta\ AC)\,dx =$

Área del triángulo: $\int_0^3 (Ec.\, recta\ AP - Ec.\, recta\ AC)\,dx =$

Luego, se puede abordar el problema de forma general considerando la parábola $y=ax^2+bx+c$, los puntos *A* y *C* de abscisas *x=h* y *x=k*. El procedimiento es el mismo que antes, pero ahora el cálculo simbólico se complica enormemente, razón por la que combiene utilizar DERIVE u otro programa de cálculo simbólico.
Escribe los siguientes resultados parciales en función de *a, b, c, h, k*:
Coordenadas de *A*= . . . . y de *B*= . . . . y Ecuaciones de las rectas *AC* y *AP*

Área del segmento: $\int_h^k (Ec\ .\ parábola \quad - Ec\ .\ recta \quad AC\ )\,dx =$

Área del triángulo: $\int_h^k (Ec\ .\ recta \quad AP - Ec\ .\ recta \quad AC\ )\,dx =$

Cálculo de volúmenes de revolución y solución del tercer problema

El elemento de volumen es el cilindro, y se considera que al girar un rectángulo alrededor de uno de sus lados, *h*, genera un cilindro de radio su otro lado, *R*, y, por tanto, su volumen es $\pi R^2 h$. La cuestión es que si una función, *f*, es integrable, también lo es πf^2 y, por tanto, las sumas de Riemann asociadas a esta función expresan la suma de los volúmenes de los cilindros que se obtienen al girar sobre el eje de abscisas los rectángulos que tienen como bases los subintervalos en que se ha dividido [a,b] y alturas $f(\alpha_i)$. Las sumas de Riemann nos proporcionan un método numérico y la integral definida el volumen del sólido de revolución.

La solución de estos problemas es trivial si se sabe poner los límites de integración de forma adecuada, ya que los cálculos son "sencillos". Sin embargo, muchos alumnos no aciertan a ver cómo se generan los volúmenes de revolución y tienen dificultades para determinar los límites de integración, problemas que se "resuelven" con el generador de volúmenes.

Construcción del generador de volúmenes. Se precisa: motorcito eléctrico a pilas, pilas adecuadas para el motor, dos cables eléctricos de hilos finos para la conexión de las pilas al motor, cinta aislante, 2 varillas delgadas para sujetar las cartulinas, 2 regletas pequeñas (una par sujetar las varillas al eje del motor y otra para el extremo opuesto del eje), una pletina agujereada para albergar al eje, cartulina blanca o material plastificado apto para dibujar las siluetas planas con la impresora y que se recorte con facilidad, cartulina o material plastificado oscuro para el fondo en que resalten los volúmenes, pegamento y tijeras. Las fotografía de la figura 9 muestra el generador y la 14 unas plantillas de los recintos planos.

Con el programa FUNCIONES se dibujan las cartulinas correspondientes a las regiones planas que van a determinar los volúmenes de revolución. Al girar se ven perfectamente los volúmenes que se generan. El mismo programa permite determinar los límites de integración para hallar las correspondientes integrales. Sin embargo, muchas veces estos límites son las abscisas de los puntos de intersección de una de las curvas dadas y de la simétrica de la otra respecto del eje de giro (soluciones del sistema formado por las funciones *f(x)* y *g(x)*, y del sistema *f(x)* y *-g(x)*), límites que pasan desapercibidos para los alumnos (de hecho es una de las mayores dificultades de aprendizaje) y el generador de volúmenes es una herramienta didáctica adecuada y les ayuda a descubrirlos.

Representa las gráficas de las siguientes parejas de funciones:

1. $y=x^2-2$, $y=x$. en el intervalo [-2, 2]
2. $y=-x^3/6+x^2/2-7x/32-11/96, y=x^3/6-^2/2+1/3.$
3. $y=(9-x^2)/3$, $y=(x^2-9)(x^2-1)/8.$
4. $y=|x|+1$, $\quad y=x^2-|2x|$

Las parejas de las funciones anteriores se representan en las figuras 10, 11, 12 y 13. Recorta las gráficas, gíralas, señala las zonas huecas y macizas al girar sobre el eje de abscisas, y, finalmente, escribe en el recuadro las integrales correspondientes para calcular el volumen que se genera la girar cada una de las regiones planas alrededor del eje de abscisas. Una de de los alumnos es ver que los límites de integración vienen determinados por las El generador de volúmenes solventar este.

Solución del problema 3. Hay que ser cuidadosos en su resolución ya que al girar sobre el eje de ordenadas las cosas son algo diferentes. O bien se consideran las funciones

$x=\sqrt{\frac{8y}{5}}$, $x=\frac{4}{3}\sqrt{y-1}$, $x=\sqrt{-3y}$, $x=-\frac{3}{2}(y-1)$

girando sobre OY o bien se consideran las funciones

$y=\sqrt{\frac{8x}{5}}$, $y=\frac{4}{3}\sqrt{x-1}$, $y=\sqrt{-3x}$, $y=-\frac{3}{2}(x-1)$

girando sobre OX. Estas últimas son las que se deben considerar para representar con FUNCIONES las gráficas de estas funciones y así determinar una sección de la vasija.
Representa las funciones y determina las abscisas que constituyen los límites de integración.
Delimita sobre las figuras las zonas huecas y macizas. Utiliza el generador y FUNCIONES para poner los límites de integración y rellena los apartados:
Intervalos de las: zonas huecas .¿? ; zona maciza ¿? ; Integrales de la: 1ª zona hueca ¿?
zona maciza. ¿?; 2ª zona hueca ¿? ;Masa del material utilizado ¿?
Capacidad de la copa hasta x=5 ¿?.

Tema 3. Problemas de diseño
La experimentación matemática es una de las actividades que menor atención reciben en los currículos y, sin embargo, son las que despiertan mayor interés en los alumnos y con las que mejor suelen captar el "funcionamiento matemático". Aquí se va a hacer una actividad de este tipo utilizando el programa FUNCIONES

Determinación de funciones conociendo el volumen. Solución del problema 4. La propuesta de este problema persigue dos objetivos perfectamente diferenciados: por una parte, se trata de que los alumnos experimenten con el programa FUNCIONES (o con otro similar) y determinen funciones, cuyas gráficas puedan dar lugar a envases atractivos y que cumplan las condiciones del enunciado, lo que supone hacer un análisis de los efectos de los coeficientes, de factores, potencias, sumandos, etc., y, por otra, una vez considerada una función adecuada se trata de aplicar el "Teorema Fundamental del Cálculo" y hacer los cálculos y ajustes finales. El problema es totalmente abierto y una vez que se ha encontrado una función, que puede depender de un parámetro para ajustar la capacidad del tarro, se puede utilizar el generador de volúmenes para visualizarlo.
Aquí se ha considerado una función polinómica, $f(x)=a\cdot(x-0'1)^2\cdot(x-1)^2\cdot((x-2)^4-0'04)+0'31$, pero el grado del polinomio indica que un tratamiento manual de la

misma es poco recomendable. Nuevamente se puede aplicar software elemental para resolver el problema. Ensayando de forma directa con el programa FUNCIONES, enseguida se obtiene un valor para el parámetro *a* con el que la capacidad del volumen de revolución de la botella en el intervalo [0,2] está muy próximo a los 0,75 l. Haz los ensayos correspondientes y escribe los resultados encontrados: Parámetro *a*= ¿? . .Volumen que corresponde a este parámetro V=. ¿?
También con EXCEL se resuelve este problema, ya que se puede hacer la suma de Riemann sin el factor *a* y después hallarlo. Denotando por $H(x)=(x-0'1)^2\cdot(x-1)^2\cdot((x-2)^4-0'04)$ y por $K=0'31$, es claro que $f(x)=aH(x)+K$ y, para $h=0.025$, las sumas de Riemann dan la siguiente fórmula para calcular el volumen:

$$V \approx \pi\sum_{1}^{n}(a^2H^2(\alpha_i)+2aH(\alpha_i)K+K^2)h\cdot$$

En la práctica se calculan α_i, $H^2(\alpha_i)$, $H(\alpha_i)$, y se halla el valor de *a* resolviendo la correspondiente ecuación de segundo grado. La tabla esboza este procedimiento (se deben llenar 2/0.025 celdas con los puntos medios α_i de los intervalos de la partición) y se presentan los resultados. Para evitar cálculos innecesarios se divide por $h\pi$ el volumen de la botella. En la ultima columna se muestra la ecuación de segundo grado, cuya solución resuelve el problema. Utiliza EXCEL y rellena las correspondientes celdas de la tabla siguiente.

<table>
<tr><td>i</td><td>α_i</td><td>$H^2(\alpha_i)$</td><td>$H(\alpha_i)$</td><td rowspan="8">h=
$P=\Sigma H^2(\alpha_i)$
P=
$Q=2K\Sigma H(\alpha_i)$
Q=
$R=K^2-0'75/h\pi$
R=
$a^2P+aQ+R=0$
a=</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0´0125</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td></td><td>0,00286585</td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td></td><td></td><td>0,01076785</td></tr>
<tr><td></td><td>...</td><td>...</td><td>...</td></tr>
<tr><td>79</td><td>1´9625</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>80</td><td></td><td>0,01931148</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Sumas</td><td>$\Sigma H^2(\alpha_i)$=</td><td>$\Sigma H(\alpha_i)$=</td></tr>
</table>

Centros de masas. Solución del problema 5. Los alumnos estudian el concepto de centro de masas (cdm) en Física, y si cuando llega la aplicación a problemas reales los matemáticos no lo hacemos en el aula, entonces estamos cercenando las posibilidades curriculares y devaluamos el carácter instrumental de la matemática, que es uno de los fines del Currículo Español de Matemáticas y uno de los pilares de la Matemática Aplicada. Aunque en España no se suelen resolver problemas como éste en las aulas de matemáticas, yo creo que no pueden obviarse, ya que es otro claro exponente de la importancia de esta disciplina como ciencia resolutora de problemas de la vida ordinaria. Sin embargo, para que los alumnos puedan comprenderlos y hacerlos suyos hay que enlazarlos con los conceptos físicos que han estudiado, y justificar los resultados que se van a aplicar. Se comienza determinando las coordenadas de los centros de equilibrio de sistemas discretos sencillos y generalizarlo a la integral.
1. El formado por 3 masas puntuales sobre una barra recta de masa despreciable.
El momento de las tres masas sobre el origen (que coincide con el punto de apoyo) es: $M_0=m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3$. Si $M_0=0$, el sistema está en equilibrio estático.

El centro de masas es el punto $\overline{x}$, donde se colocaría el punto de apoyo para obtener el equilibrio estático. Es como si se colocara toda la masa en él, y si el punto de apoyo se desplazara a $\overline{x}$, entonces $M_0=m_1(x_1-\overline{x})+m_2(x_2-\overline{x})+m_3(x_3-\overline{x})=0$ y, por tanto,

$$\overline{x} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

2. El formado por 3 masas puntuales unidas por 3 barras coplanarias de masas despreciables.

La deducción es similar a la anterior, figura 16, pero ahora hay que contemplar las dos coordenadas:

$$\overline{x} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3}, \qquad \overline{y} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

3. El formado por *n* masas puntuales situadas en un plano es análogo al anterior.

$$\overline{x} = \frac{\Sigma m_i x_i}{\Sigma m_i} \qquad \overline{y} = \frac{\Sigma m_i y_i}{\Sigma m_i}$$

4. El formado por una lámina plana de densidad uniforme, δ, simétrica respecto del eje de ordenadas, figura 17.

(**)

$$\overline{y} = \frac{\int_a^b f^2(c_i)dx}{2Área}$$

El problema 5 tiene una simetría en el eje de ordenadas y por esta simetría $\overline{x}=0$ e $\overline{y}$ se calcula aplicando (**) a la función $f(x) = \sqrt{120^2 - x^2}$ en el intervalo [-R, R]. Escribe la relación correspondiente y calula el valor de $\overline{y}$. ¿?

La simetría de la plataforma también habría permitido integrar la función en [0, R] para calcular $\overline{y}$.

Escribe la relación que permite hallar el momento, M_g, de la galleta respecto del borde externo de la pared en función de δ. M_g = ¿?

El cdm de las cargas de la pared es (0, -20) y, esto permite hallar el momento, M_p, de las cargas de la pared de altura *h* (incluidos los 20 cm de forjado) respecto del borde externo de la misma. Escribe la relación en función de ρ y de h. M_p = ¿?

Por tanto, la construcción será estable si $M_p>M_g$, lo que permite calcular la altura mínima, h, que debe de tener la pared. Hállala y escríbela aquí: h > ¿?

Ten en cuenta la simetría, considera 220 intervalos de la misma amplitud, escribe la sucesión de estos intervalos y la de sus puntos medios de los intervalos, finalmente, halla el valor de $\overline{y}$ con la hoja de calculo y escríbelo aquí: $\overline{y}$ = ¿?

Bibliografía

Van Ash, A.G. (1993): "To prove, why and how?". *International Journal Mathematics Education Science and Technology*, 2, 301-313.

Blásquez., S. y Ortega, T. (2001): rupturas en la comprensión del conecpto de límite en alumnos de bachillerato. *AULA* Vol. 10, pp. 119-135. Salamanca.

Boyer, C.B. (1987): *Historia de la matemática*. Alianza Universidad Textos. Madrid.

Faure, P. (1981): *Enseñanza personalizada y también comunitaria*. Narcea. Madrid.

Fisher, E. (1983). *Intermediate Análisis.* Springer Verlag. New York.

Fontana D. (1986): *La disiplina en el aula.* AulaXXI/Santillana. Madrid.

García Hoz, V. (1988): *La práctica de la educación personalizada.* Ediciones Rialp, S. A. Madrid

Ibañes, M. y Ortega, T. (1997): *Mathematical Proobs: Classification and Examples for Use in Secondary Education.* The Association for Mathematics Education of South Africa. pp.109-155.Centrahil. South Africa.

Ibañes, M. y Ortega T. (2001): Un estudio sobre los esquemas de prueba en alumnos de primer curso de bachillerato. *UNO. Vol. 28, pp 39-60.* Graó. ISSN: 1133-9853. Barcelona..

Kline, M. (1992): *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días.* Alianza E. Madrid.

Martinez, B. (1980): *Causas del fracaso escolar y técnicas para afrontarlo.* Narcea, S. A. Madrid.

Mira y López, E. (1979): *El niño que no aprende.* Kapelusz. Buenos Aires.

N.C.T.M. (1991): *Estándares curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática.* S.A.E.M. Editado por THALES. Sevilla.

Ortega, T. (1997): *Prácticas de Aula en Precálculo y Cálculo.* Actas del IV Seminario-Congreso Regional Castellano Leonés de Educación Matemática. pp. 187-196. Valladolid.

Ortega, T. (1991): El generador de volúmenes. *Suma*, nº 7. Granada.

Sierpinska, A (1985) Obstacles epistémologiques relatifs a la notión de limite. *Recherches en Didactique des Mathematiques.* Vol. 6, pp. 5-67.

PROPUESTA METODOLÓGICA PARA APRENDER A RESOLVER PROBLEMAS MATEMÁTICOS

Isabel Santiesteban y Maricela Rodríguez
Centro Universitario de Las Tunas, Cuba.
isasp@ult.edu.cu

Resumen
Se ofrece una propuesta metodológica con experiencias de aprendizajes duraderas que se auxilian de la resolución de problemas matemáticos para favorecer el aprendizaje significativo en los estudiantes de la Enseñanza Media Básica en Cuba, fundamentada en los más actuales criterios de las teorías del aprendizaje relacionadas con la superación de los docentes.

Introducción
Una dificultad constante de los estudiantes de la Enseñanza Media Básica en Cuba es el incumplimiento de objetivos de la Matemática, sobre todo, los destinados a la resolución de problemas. Se han hecho varios intentos por mejorar esos resultados; el último de ellos esta relacionado con las transformaciones de los nuevos programas, donde la primera de ellas se refiere a la presentación y tratamiento de los nuevos contenidos a partir del planteamiento y resolución de problemas cotidianos. Esto se debe a que la resolución de problemas es el proceso por el que los estudiantes experimentan la potencia y la utilidad de las matemáticas en el mundo que les rodea. Además de ser un modelo de indagación y aplicación integrado, con el objeto de ofrecer un contexto sólido para el aprendizaje y la aplicación de las matemáticas. Sin embargo, se considera que los docentes no se encuentran suficientemente preparados para asimilar los cambios, ya que en sus clases, crearon un esquema difícil de variar y en su formación no se le exigía la elaboración creadora de situaciones problémicas al introducir los nuevos contenidos y la aplicación de estos a situaciones concretas de la vida. La propuesta que se propone está dirigida a tratar de enmendar los problemas y deficiencias que se ponen de manifiesto en el proceso de asimilación del conocimiento en particular, y en el desarrollo de una adecuada instrucción heurística que contribuya al desarrollo de habilidades, al resolver problemas en la enseñanza de la Matemática.

Desarrollo
Para introducir este tipo de instrucción en la enseñanza de la Matemática en la Enseñanza Media Básica, se ha seleccionado la situación típica "resolución de problemas", por ser la que brinda las mayores posibilidades para desarrollar habilidades en los estudiantes al indagar, investigar, debatir sus propias ideas, y desarrollar su espíritu crítico y autocrítico; lo que propicia la independencia cognoscitiva y su aplicación a situaciones concretas de la vida.

La propuesta metodológica tiene las siguientes características:
1. El trabajo está estructurado sobre la base del diagnóstico, tanto en la esfera cognitiva como en la afectiva, tomando como líneas principales el aprendizaje cooperativo. De este modo propicia el intercambio franco y abierto entre estudiantes

2. El papel del docente es primordial, pues además de diseñador, es facilitador, supervisor y controlador durante todo el proceso de enseñanza-aprendizaje.
3. Aparecen diferentes elementos de formación como son: teoría, práctica etc, con lo que se propicia que se contribuya al logro de los objetivos formativos.
4. El estudiante además de participar activamente en la construcción de su propio conocimiento, propicia la construcción del conocimiento de sus semejantes, cuando trabaja en equipos.
5. Se le propone a los estudiantes situaciones problémicas con distintos grado de dificultad, en las que los conocimientos matemáticos a aplicar estén en correspondencia con los contenidos del grado, y se presten a la particularización y la generalización.
6. Se les pide a los estudiantes que traten de registrar el proceso de resolución con la mayor cantidad posible de datos y que reflexionen sobre el proceso seguido.
7. Se propicia la discusión en grupo donde se hacen explícitas las ideas, estrategias, razonamientos, bloqueos, etc, presentes en el proceso de resolución.

Sintaxis de las etapas propuestas.

La primera etapa *(Introducción)* estará dedicada a crear un clima apropiado entre docentes y estudiantes, que facilite la comunicación. Además estará caracterizada por tres momentos: motivación, familiarización e identificación.

En el primer momento, de *motivación* es para despertar el interés de los estudiantes al resolver problemas y de entrenamiento en los conocimientos necesarios para enfrentarlos, empleando técnicas participativas, medios de enseñanza y juegos didácticos. La *familiarización* con las acciones y los heurísticos seleccionados, donde se hace la introducción a través de la resolución de problemas, empleando el programa heurístico general seleccionado; se utilizará como estrategia didáctica la hoja de trabajo, donde aparecen los impulsos que se relacionan con los diferentes heurísticos. Estos se elaboran y aplican teniendo en cuenta el nivel de razonamiento de los estudiantes.

En el segundo momento, se declarará de forma explícita, los procedimientos heurísticos y las acciones con los cuales se está trabajando, empleando varias hojas de trabajo, con la finalidad de familiarizar a los estudiantes con las preguntas que se relacionan con los diferentes procedimientos heurísticos que se propone introducir; para que los estudiantes puedan aplicarlos a la resolución de problemas dirigidos por el docente y con posterioridad los empleen de forma independiente.

Después se orientará la confección de una ficha donde aparezca el conjunto de acciones fundamentadas en los procedimientos heurísticos introducidos, para su trabajo en el próximo momento.

El tercer momento o de *identificación* de los procedimientos heurísticos empleados en la resolución de los ejercicios. Los estudiantes deben identificar cuales procedimientos han empleado en la resolución de los problemas, bajo guía del docente, primeramente y luego de forma independiente. Para esta identificación emplearán la ficha elaborada con anterioridad.

Se considera concluida esta etapa cuando los estudiantes son capaces de identificar y aplicar los procedimientos heurísticos en la resolución de problemas.

La segunda etapa *(Ampliación),* cuenta con dos nuevos momentos, los que están dirigidos a que los estudiantes desarrollen habilidades en la elaboración de estrategias, empleando los procedimientos heurísticos, para la resolución de problemas. Los dos momentos de esta etapa son: *elaboración de estrategias en colectivo y elaboración de estrategias individuales*. Se auxilian del protocolo de resolución y la reflexión sobre el proceso de resolución.

En el primer momento se utiliza la estrategia didáctica, el protocolo de resolución, para explicar las ideas que se consideren importantes en el curso de la resolución, lo que se intenta hacer y su parecer sobre todo ello. En la resolución de problemas en grupo un estudiante hace de secretario y registra el proceso de resolución. Estos protocolos favorecen la retrospección e introducen un elemento de control en el proceso.

Como los estudiantes han elaborado protocolos de resolución, se entrevista a los participantes pidiéndoles que cuenten el proceso y digan su percepción del mismo, donde se ponen en común, analizando las ideas que los conducen a la solución y los bloqueos que les impidan llegar al final, de esta manera ocurre la reflexión sobre el proceso seguido.

Se considera concluida esta etapa cuando los estudiantes son capaces de resolver ejercicios de forma independiente y explicar el uso del conjunto de acciones fundamentadas en los heurísticos para su resolución.

La tercera etapa de la estrategia*, (Aplicación),* estará dirigida fundamentalmente a que los estudiantes propongan problemas confeccionados por ellos, relacionados con los contenidos propios de la matemática, con las sugerencias del docente a partir de problemas abiertos, que propician la investigación en grupos, aquí se utiliza la estrategia didáctica *trabajo en grupo*, para seguir la metodología de trabajo propuesta ayudado por un moderador o moderadora y un secretario o secretaria, que toman las notas y las ideas del proceso de resolución. Esto hace posible la discusión al final de la sesión sobre el comportamiento seguido, donde el que dirige la actividad, no ofrece ninguna respuesta ni da opinión.

Al alcanzar esta etapa, dirigirán la actividad práctica y confeccionarán problemas que pueden ampliar su campo de aplicación a otras asignaturas en colectivo e individualmente.

Se considera concluida la etapa cuando los estudiantes elaboran problemas para sus compañeros de grupo.

Algunos ejemplos para trabajar con la propuesta.

El contenido para 7^{mo} grado comienza con la Unidad # 1 El significado de los números. El docente aprovecha las oportunidades que ofrece la teoría de números para realizar exploraciones que son interesantes, amenas y útiles. Estas indagaciones inciden en la resolución de problemas, la comprensión y desarrollo de otros conceptos matemáticos, la demostración de la belleza de las matemáticas y la comprensión de los aspectos humanos del desarrollo histórico de los números.

Se utilizan las potencialidades de la teoría de los números para resolver diversos problemas de interés para los estudiantes auxiliándose de técnicas participativas y juegos didácticos como los siguientes.

Se les sugiere a los estudiantes, la posibilidad de realizar un brindis en la escuela, con la necesidad de que traigan un dulce, preferentemente panetela o pudín. Más tarde en el aula se conforman equipos con distintos números de estudiantes, se les propone que repartan el dulce en cada equipo a partes iguales, y expliquen las conclusiones a las que han arribado.

Se sugiere el juego "Estima y aproxima".

El docente reparte en el aula hojas de trabajo, donde cada una tiene el precio de un producto distinto que se oferta en el mercado y un descuento en particular dado en porcentaje, por ejemplo: ($10,95; 15%). Luego reparte calculadoras en el grupo y cada jugador tiene que hacer una estimación del precio final con el descuento.

El jugador que se haya acercado más al precio real será el ganador.

Otro aspecto que resulta de gran interés para los estudiantes, son las estadísticas del deporte, con datos reales donde puedan generar datos nuevos e investigar toda una gama de conjeturas.

El docente presenta una hoja de trabajo con la información de los resultados estadísticos de un juego de baloncesto de la siguiente forma:

Jugador	**Minutos juego**	**Canastas/ intentos**	**Rebotes**	**Pases**	**Puntos**
A	37	8/19	8	5	20
B	34	8/14	1	12	19
C	31	8/14	6	9	19
D	32	10/16	9	0	26

Utilizando la hoja de trabajo los estudiantes pueden generar información nueva como puntos/minutos, puntos/intentos, o ¿Qué jugador tiene el mejor porcentaje?

También con otros datos pueden hallar la altura de cada jugador y determinar los rebotes/centímetros de altura de cada jugador o los puntos/centímetros de altura.

Este problema abre ante los estudiantes un mundo de preguntas, donde los mismos desarrollan las habilidades al recoger, organizar, elaborar e interpretar tablas y gráficos para formular inferencias y argumentos convincentes que se basen en el análisis de datos.

La Unidad #2 Lenguaje de las variables, donde se sugiere la traducción de situaciones de la vida al lenguaje algebraico.

Sugerimos utilizar el juego didáctico "Buscando Sinónimos", para ejercitar la traducción del lenguaje común al algebraico o viceversa.

Buscando sinónimos. Se forman equipos en dependencia de la cantidad de estudiantes en las aulas y se entrega un listado de palabras o expresiones a todos los alumnos. El docente presentará una palabra o expresión y pedirá sinónimos o expresiones que signifiquen lo mismo y lo que han interpretado. Los estudiantes contestarán de forma individual y su calificación será para el equipo.

Con este juego el estudiante aprende a modelar situaciones usando métodos orales, escritos, gráficos y simbólicos.

Otro ejemplo podría enfocarse de la siguiente forma.

Piensa en un número. Añádale cinco. Multiplica el resultado por dos. Réstale cuatro. Divídelo por dos. Réstale el número que habías pensado al principio. Verás como te leo el pensamiento. El resultado es tres.

Este ejemplo ilustra el papel que cumplen los símbolos escritos en la representación de ideas, cuestión esta que se recomienda utilizar a lo largo de toda la Enseñanza Media Básica. Los estudiantes aprenden a usar un lenguaje preciso en conjunción con los sistemas simbólicos especiales de las matemáticas.
En el 8vo grado a los estudiantes se les prepara para *utilizar modelos gráficos lineales o bidimensionales para mostrar relaciones que impliquen números* que se amplían de coordenadas naturales a racionales, como el siguiente ejemplo.
El docente muestra en hojas de trabajo las estadísticas de la lluvia que cae en las provincias Orientales del país, durante los meses transcurridos en el año. Los estudiantes deben realizar una gráfica.
Se auxilian de las estrategias didácticas el *protocolo de resolución y la reflexión sobre el proceso seguido*, el docente dirige la discusión sobre la época de siembra de determinado producto en dependencia de la provincia que se analice, la época para visitar las playas y determinados centros turísticos, la temporada de ciclones, etc.
En la Unidad #2 Igualdades que contienen variables. El docente se auxilia del principio heurístico de analogía para resolver ecuaciones lineales de la forma ax+b=c (a,b,c racionales con $a \neq 0$) donde se establecen conexiones con las ecuaciones tratadas en 7mo grado. Y auxiliándose del principio de reducción llevar el procedimiento a una ecuación de la forma ax=b (a,b racionales con $a \neq 0$).
Este contenido es muy apropiado para que los estudiantes desarrollen habilidades al modelar muchos problemas de forma concreta, recoger y organizar datos en tablas, representar datos etc.
Como los estudiantes se han apropiado del conocimiento desde el grado anterior. El docente utiliza las estrategias didácticas: *el protocolo de resolución, la reflexión sobre el proceso de resolución y el trabajo en grupos,* de forma tal que las tareas del grupo sean de manera que los estudiantes se dediquen a la resolución y discusión de forma cooperada y además, siempre que sea posible utilicen la tecnología disponible.
Para introducir las ecuaciones lineales de la forma ax+by=c (con a,b,c racionales y $a \neq 0$) se emplea el juego didáctico “Buscando Sinónimos” para facilitar la traducción del lenguaje común al algebraico de situaciones en las que se emplean dos variables en una sola ecuación lineal.
El docente hace notar por medio de preguntas, que este tipo de ecuaciones tienen infinitas soluciones en el conjunto de los números racionales y que se necesitaría una segunda ecuación, de manera que se introduzcan los sistemas de ecuaciones lineales en dos variables a partir de la recopilación de datos de la vida práctica.
No todos los problemas requieren un contexto del mundo real. Por el contrario, los estudiantes se apasionan a menudo con problemas que cuentan una historia, donde el docente se puede auxiliar de técnicas participativas, con el propósito de motivar y despertar el interés por las matemáticas.
Un ejemplo de lo planteado anteriormente puede ser la dramatización como técnica participativa, donde a partir de ésta queda en el aula una situación problémica como la siguiente.
El docente narra la historia:
Andando por el desierto nómadas que cargaban sobre sus cabalgaduras sendos sacos de mercancía para venderlas en los sitios por los cuales vagaban. Uno de caballo negro y otro de caballo blanco.
Estudiante # 1 (hombre del caballo negro). -*Huf, no puedo más este sol sofoca mi cabalgadura.*

Estudiante # 2 (hombre del caballo blanco). *–Tienes que ser más voluntarioso, amigo.*
Estudiante # 1 *-Tú sin embargo no pareces cansado. Hagamos un trato. ¿Por qué no tomas tú uno de mis sacos y me lo llevas en tu cabalgadura?*
Estudiante # 2 *-Oh amigo, eso no puede ser.*
Estudiante # 1 *-¿Por qué no?*
Estudiante # 2 *–Porque si yo tomo uno de tus sacos entonces yo tendré el triplo de la cantidad de sacos que tienes tú, sin embargo si tu tomas uno de los míos entonces ambos tenemos la misma cantidad de sacos.*

Se aprovecha la ingeniosidad del problema para la solución de un sistema de dos ecuaciones con dos variables.

En el 9no grado se pueden analizar ejemplos que ilustran situaciones abiertas de problemas donde los estudiantes se auxilian de la estrategia didáctica trabajo en grupos para elaborar problemas y despliegan diversas estrategias.

Se realizó una encuesta entre estudiantes de la enseñanza media del municipio Tunas para determinar el número de horas diarias que estudian. ¿Cuántas horas crees que salieron?

En el problema siguiente, los estudiantes tienen que generar, organizar y analizar datos, buscar patrones que hayan observado para aplicar el principio heurístico de la generalización

En un pueblo hay 3 calles. Todas las calles son rectas. Cada cruce tiene una farola. ¿Cuántas farolas se necesitan? ¿Cuántas hacen falta en un pueblo de 20 calles? Generaliza para cualquier número de calles?

Los estudiantes deben realizar un croquis o figuras de análisis para responder a la cuestión de cómo están dispuestas las calles antes de resolverlo. Esto genera una diferenciación de casos y diversas estrategias de solución.

Conclusiones

La propuesta metodológica contribuye por una parte, a que los estudiantes se apropien de un conjunto de acciones al resolver problemas, y por otra, a que esta acción se revierta favorablemente en la asimilación de los contenidos de la Matemática que se imparten en Enseñanza Media Básica. Es aplicable ya que tiene en cuenta los programas vigentes, parte del diagnóstico de la práctica escolar, la asequibilidad de la enseñanza y la elevación continua de los niveles de dificultad.

El entrenamiento de los estudiantes en el uso de un conjunto de procedimientos heurísticos se puede convertir a partir de una correcta concepción y organización del proceso docente-educativo, en una vía de inestimable valor si se pretende que el estudiante aprenda a buscar por sí mismo el nuevo conocimiento.

Las orientaciones metodológicas se han elaborado con el propósito de que sirvan fundamentalmente como guía orientadora para dirigir desde el punto de vista metodológico y heurístico, el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática.

Bibliografía

Algarabel, S. et al. (1996). Solución de problemas: una revisión del uso de heurísticos y una evaluación de su utilización en Matemáticas. *Revista Española de Pedagogía*. 203. 143-165.

Gil, D. y Guzmán, M. (1993). *La enseñanza de las Ciencias y la Matemática. Tendencias e Innovaciones*. Editorial Popular S. A.

Gómez, I. (1991). La funcionalidad del aprendizaje en el aula y su evaluación. *Cuadernos de Pedagogía*. Fotocopia p. 28 -35.

Lorenzo, J. (1996). La Resolución de Problemas. Una revisión teórica. *Revista Suma 21*.

Mitjáns, A. (1995). *Creatividad, Personalidad y Educación.* Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de La Habana. Cuba.

Monereo, C y Pérez M.L. (1996). La incidencia de la toma de apuntes sobre el aprendizaje significativo. Un estudio en enseñanza superior. *Infancia y Aprendizaje. 73*.

Pozo, J. (1994). *La Solución de Problemas*. Santanilla. S.A. Madrid.

Santos, L. (1992) El trabajo de Alan Shoenfeld: Una propuesta a considerar en el aprendizaje de las Matemáticas. En: *Educación Matemática. Vol. IV #2*. Ciudad México.

Santos, M. (1990, Enero-Abril). Estructuras de aprendizaje y métodos cooperativos en educación. *Revista Española de Pedagogía 185.* 53-78. Madrid.

Schoenfed, A. (1991) *Ideas y Tendencias en la Resolución de Problemas*. Edipubli. S.A. Buenos Aire.

MÉTODOS NUMÉRICOS: UN ENLACE ENTRE EL CÁLCULO Y LA MATEMÁTICA DISCRETA

Edison De Faria Campos
Universidad de Costa Rica, Costa Rica
edefaria@cariari.ucr.ac.cr

Resumen
En este artículo destacamos la importancia de los métodos numéricos como un elemento integrador entre el cálculo diferencial e integral, el álgebra lineal y la matemática discreta. Trataremos con métodos clásicos para la búsqueda de raíces de ecuaciones algebraicas, integración numérica mediante sumas de Riemann y métodos de Monte Carlo, curva de ajuste vía regresión y fractales. Utilizaremos las potencialidades de programación y del sistema computacional algebraico (CAS) de la calculadora graficadora voyage 200 para desarrollar las aplicaciones y los programas correspondientes.

Introducción

Las Escuela de Matemática y de Ciencias de la Computación e Informática de la Universidad de Costa Rica iniciaron durante el año 2002 un proceso de revisión de los cursos de matemática para computación, tendiente a adecuar los contenidos de los cursos a las necesidades reales de la carrera, incorporar las nuevas tecnologías de la información y comunicación como herramientas didácticas, y desarrollar proyectos conjuntos entre los docentes de las dos escuelas.
Los argumentos utilizados para proponer una reforma curricular fueron los siguientes:

1. Falta de conocimientos básicos que presentan los estudiantes al ingresar a la Universidad. Esto lleva a un alto nivel de deserción y de reprobación en los primeros cursos de matemática. Hemos sugerido un examen de ubicación para determinar las deficiencias matemáticas en los estudiantes y la necesidad de ofrecer un curso de nivelación para aquellos que presenten deficiencias en el manejo de los conocimientos básicos de matemática.
2. Falta de correlación entre los contenidos desarrollados en los cursos de matemática y los cursos propios de la carrera de computación. En este sentido hemos sugerido la introducción de ejes transversales que relacionen los contenidos de ambas disciplinas y la formación de una comisión compartida para la búsqueda de temas y metodologías adecuadas que permitan obtener este acercamiento.
   Entre los ejes transversales hemos propuesto los métodos numéricos, pues estos permiten establecer un puente entre lo continuo y el discreto.
3. Ausencia del uso de tecnologías. Creemos que el uso de tecnologías digitales en los cursos de matemática para computación facilitará el trabajo en conjunto de las dos disciplinas, logrará un aprendizaje significativo y funcionará como un elemento motivador para los estudiantes de computación (Noguera, 1998).
4. Exceso de contenidos. Sugerimos una reducción de los contenidos y una mayor profundización en aquellos que consideramos pertinentes.
5. Énfasis en procesos memorísticos. Llegamos a un consenso de que el énfasis debe de ser puesto en conjeturar, desarrollar habilidades superiores del pensamiento y resolver problemas (De Faria, 1998).

Las actividades propuestas en este curso corresponden a los contenidos de Matemática para Computación 2,3 y 4 (siglas MA0229, MA 0329, MA0429): Cálculo Diferencial e Integral para funciones de una variable, Cálculo Diferencial e Integral para funciones de varias variables y Álgebra Lineal y procuran hacer el enlace entre el cálculo continuo y el discreto.

Actividad 1 : Raíces de la ecuación $f(x)=0$
Objetivo: Programar el algoritmo de bisección, para determinar las raíces de ecuaciones algebraicas.

En esta actividad programaremos algunos de los algoritmos clásicos para determinar el valor aproximado de una raíz de una ecuación de la forma $f(x)=0$.

1. **Método de bisección**.

Este método se basa en el teorema del valor medio (Bolzano): Si f es continua en el intervalo $[a,b]$ tal que $f(a)$ *y* $f(b)$ tienen signos opuestos (es decir $f(a)f(b)<0$) entonces existe (al menos) un número $p\in]a,b[$ tal que $f(p)=0$. El método de bisección requiere dividir varias veces a la mitad los subintervalos de $[a,b]$ y, en cada paso, localizar la mitad que contenga p. Para simplificar supongamos que existe una única raíz en $[a,b]$, y construyamos las siguientes sucesiones: $\{a_n\},\{b_n\},\{p_n\}$ con $a_1=a$, $b_1=b$, $p_1=\dfrac{a_1+b_1}{2}$. Si $f(p_1)=0$ tome $p=p_1$. Caso contrario $f(p_1)$ tiene el mismo signo de $f(a_1)$ o de $f(b_1)$. Si $f(p_1)f(a_1)<0$ entonces $p\in]a_1,p_1[$. En este caso tomamos $a_2=a_1, b_2=p_1$. Repetimos el procedimiento en el intervalo $[a_2,b_2]$. Caso contrario, $p\in]p_1,b_1[$ y $a_2=p_1$, $b_2=b_1$ y repetimos el procedimiento en el intervalo $[a_2,b_2]$. Podemos utilizar alguno de los siguientes criterios de paro. Dado $\varepsilon>0$ detenga cuando:

1. $|p_n-p_{n-1}|\le\varepsilon$
2. $\dfrac{|p_n-p_{n-1}|}{|p_n|}\le\varepsilon,\ p_n\ne 0$
3. $|f(p_n)|\le\varepsilon$
4. Cuando se ha alcanzado un número máximo de iteraciones predefinido, $n=N$.

De esta forma hemos transformado un problema de calcular las raíces de una función continua definida en un intervalo compacto en un problema discreto que consiste en determinar los valores de $\{p_n\}$, n entero positivo tal que se cumpla la condición de paro.

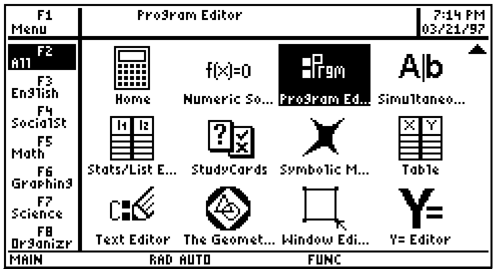
Código del programa bisección (Para la calculadora Voyage 200)
(Digitar las instrucciones separadas por / en cada línea por separado)

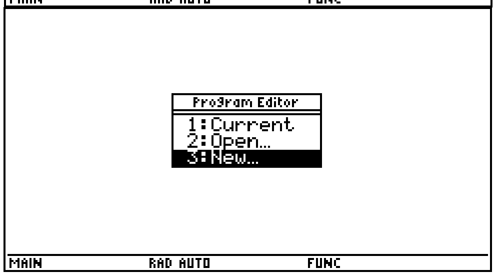
```
bisecar( )   / Prgm   / Local ex, aa, bb, ee, mm, n, p / Dialog   / Title
"bisección" /
Request "función f(x)=",ex /   Request "extremo inferior a=",aa /  Request
"extremo superior b=",bb  /  Request "tolerancia e=",ee  /  Request
"Num. Máx. Iterac.=",mm /
EndDlog  /  expr(ex)→ex  /  expr(aa) →aa  /   expr(bb) →bb  /
expr(ee) →ee  /
expr(mm) →mm  /  ClrIO  /  0→n  /  If (ex|x=aa)*(ex|x=bb)>0 Then
/
Disp "el método no se aplica en [a,b]"  /   Stop   /   EndIf  /  If
abs(ex|x=aa)<ee  / Then     /     Disp "raíz aproximada"    /
SetMode("Exact/Approx","APROXIMATE") /
Disp aa    /   Disp "Número de iteraciones"    /   Disp n    /
SetMode("Exact/Approx","AUTO")     /     Stop     /     ElseIf
abs(ex|x=bb)<ee Then   /
Disp "raíz aproximada" /  SetMode("Exact/Approx","APROXIMATE")
/  Disp bb  /
Disp  "Número  de  iteraciones"     /      Disp  n       /
SetMode("Exact/Approx","AUTO")  /
Stop  /  EndIf  /  (aa+bb)/2→p  /  While n<mm and abs(ex|x=p)>ee
/
If (ex|x=p)*(ex|x=bb)>0 Then  /  p→bb  /  Else  /  p→aa  /  Endif
/
(aa+bb)/2→p  /  n+1→n  /  EndWhile  /  If abs(ex|x=p)<ee Then  /
Disp      "raíz      aproximada"                          /
SetMode("Exact/Approx","APROXIMATE")  /
Disp  p    /    Disp  "Número  de  iteraciones"  /  Disp  n
SetMode("Exact/Approx","AUTO")
Stop  /  EndIf  / EndPrgm
```

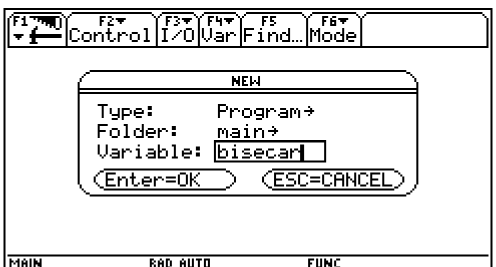
Pasos

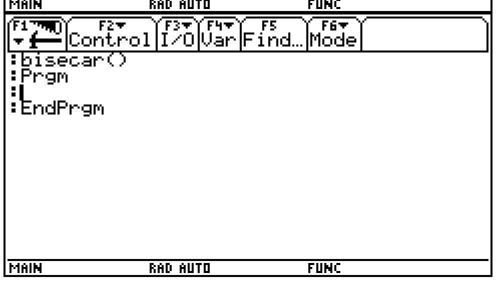
1. Abra el editor de programas. Presione la tecla O, seleccione el ícono correspondiente al editor de programas y presione ÷. Abra un nuevo programa, y digite el nombre del programa: bisecar

2.









3. La barra de herramientas ha cambiado como en otros editores y ahora nos permite seleccionar las instrucciones de entrada salida o de control.
4. Digite el código del programa bisecar.El comando exp(string)$\Rightarrow$ expresión devuelve la cadena de caracteres contenida en string como una expresión y la ejecuta inmediatamente.El símbolo $\rightarrow$ se obtiene al presionar la tecla ♣ Para poner comentarios presione 2 X. Aparecerá e símbolo de comentario ƒ. El símbolo $\subseteq$, tal que, se obtiene al presionar 2 K.
5. Ejecutar el programa.

Actividad 2: Raíces de la ecuación $f(x)=0$
Objetivo: Programar el algoritmo de Newton-Raphson, para determinar las raíces de ecuaciones algebraicas.

Método de Newton-Raphson

Para determinar una raíz de la ecuación $f(x)=0, x\in[a,b]$, con f diferenciable en $[a,b]$. Consideremos la sucesión $\{p_n\}$construida de la siguiente forma: Sea $p_0\in[a,b]$ una aproximación inicial para la raíz, y $\{p_1\}$ el punto en dónde la recta tangente a la curva $y=f(x)$ en el punto $(p_0,f(p_0))$ corta el eje x. La pendiente de la recta tangente es $f'(p_0)=\dfrac{f(p_0)}{p_0-p_1}$, si $p_1\neq p_0$. Despejando p_1 obtenemos: $p_1=p_0-\dfrac{f(p_0)}{f'(p_0)}$ si $f'(p_0)\neq 0$. Si repetimos el procedimiento y trazamos la recta tangente a la curva en el punto $(p_1,f(p_1))$ y si $f'(p_1)\neq 0$ entonces dicha recta tangente cortará el eje x en el punto p_2 tal que $p_2=p_1-\dfrac{f(p_1)}{f'(p_1)}$ si $f'(p_1)\neq 0$. De esta forma construiremos recursivamente la sucesión

$$\begin{cases} p_0 \quad \textit{aproximación inicial} \\ p_{n+1}=p_n-\dfrac{f(p_n)}{f'(p_n)} \qquad si \;\; f'(p_n)\neq 0,\; n\geq 0 \end{cases}$$

Este es el método de Newton-Raphson para aproximar una raíz de la ecuación $f(x)=0,\; x\in[a,b]$.

Código del programa Newton (para la calculadora Voyage 200)
(Digitar las instrucciones separadas por / en cada línea por separado)

```
newton( )   /   Prgm   /   Local ex, x0, ee, mm,n, p   /   Dialog   /   Title
"newton"  /
Request "función f(x)=",ex  /   Request "valor inicial x0=",x0  /
Request "tolerancia e=",ee  /   Request "Num. Máx. Iterac.=",mm  /   EndDlog
/
expr(ex)→ex  /   expr(x0) →x0   /   expr(ee) →ee  /    expr(mm) →mm   /
ClrIO  /
0→n   / x0→p / While n<mm and abs(ex|x=p)>ee  /
x0-(ex|x=x0)/(nDeriv(ex,x)|x=x0) →p   /   n+1→n  /   If  abs(ex|x=p)<ee
Then  /
p→x0   /   EndIf   /   EndWhile   /  Disp "raíz aproximada"   /
SetMode("Exact/Approx","APROXIMATE")  /    Disp p   /
Disp   "Número   de   iteraciones"          /          Disp    n             /
SetMode("Exact/Approx","AUTO")  /
Stop   /   EndPrgm
```

Pasos

1. Abra el editor de programas. Abra un nuevo programa, y digite newton en el campo correspondiente al nombre del programa.

2. Digite el programa.
3. Ejecute el programa.

Actividad 3: Sumas de Riemann
Objetivo: Programar el algoritmo sumas de Riemann , para determinar el valor aproximado de una integral definida.

Sumas de Riemann

Este programa es un poco más complejo que los dos anteriores. El usuario ingresa la función integrando, el intervalo de integración y el número de subintervalos de la partición del intervalo dado. Posteriormente el usuario escoge si el punto de cada subintervalo es e extremo izquierdo, el punto medio o el extremo derecho. Para lograr esto, se construye un menú con el comando **DropDown**. Este comando recibe como entrada un título (hilera de caracteres), una lista con las opciones a seleccionar, y una variable que contendrá los valores de los parámetros ingresados. Al hacer la partición el intervalo $[a,b]$ y aproximar el área bajo la curva por rectángulos, transformamos el problema de cálculo del área bajo una curva representada por una función continua por otro problema de una suma discreta de área de rectángulos.

Código del programa riemann

```
riemann( ) / Prgm / local a,b,c,h,n,i,r,s,v,x,y,pic1,xf,xa,xb,xn / ClrHome /
Dialog / Text "Sumas de Riemann" / Request "f(x)=", xf / Request "a=", xa /
Request "b=", xb / Request "n=", xn / EndDlog / expr(xa) → a / expr(xb) → b /
expr(xn) → n / expr("Define y1(x)="&xf) / FnOff / ClrDraw / a → xmin /
b → xmax / (b-a)/n → h / h → xscl / FnOn / 1:ZoomFit /
min(0,ymin) → ymin / max(0,ymax) → ymax / DispG / stoPic pic1 /
While n>0 / Dialog / Text "Número subdivisiones" / Request "n=", xn /
Text "Seleccionar puntos" / DropDown "Posición", {"Inicio","Centro","Fin"},c /
EndDlog / expr(xn) → n / setMode("Exact/Approx","APPROXIMATE") /
FnOff / ClrDraw / RclPic pic1 / (b-a)/n → h / a → x /
a+(c-1)*h/2 → v / 0 → s / For i,1,n / y1(v) → y / s+y*h → s /
Line v,0,v,y / Line x,0,x,y / Line x,y,x+h,y / Line x+h,y,x+h,0 /
PxlText "    ",5,5 / PxlText "Σ="&string(s),5,5 / x+h → x / v+h → v /
EndFor / ∫(y1(x),x,a,b) → r / PxlText "∫f(x)dx="&string(r),15,5 /
PxlText " Error="&string(s-r),25,5 / setMode("Exact/Approx","AUTO") / Pause /
EndWhile / EndPrgm
```

Pasos

Abra el editor de programas. Abra un nuevo programa, y digite riemann en el campo correspondiente al nombre del programa.

Digite el programa.

Ejecute el programa.

Algunas otras actividades que vimos en el curso pero que no podemos describirlas completamente por falta de espacio son:

Actividad 4: Fractales

Objetivo: Programar Sistemas de Funciones Iteradas (IFS), como una aplicación de transformaciones lineales.

Actividad 5 : Regresión lineal
Objetivo: Obtener curvas de mejor ajuste para un conjunto de datos.

Actividad 6: Integración numérica por métodos de Monte Carlo
Objetivo: Aproximar integrales mediante métodos de Monte Carlo (simulación)

Actividad 11 : Multiplicadores de Lagrange
Objetivo: Programar el método de los multiplicadores de Lagrange para resolver problemas de máximos y mínimos para funciones de varias variables con restricciones.

Conclusiones

Creemos que la introducción de los métodos numéricos como un eje transversal en los cursos de matemática para computación servirá de motivación para los y las estudiantes y funcionará como un elemento de enlace entre las matemáticas y los cursos de programación propios de la carrera. Esto también permitirá la utilización de tecnologías digitales para programar los algoritmos correspondientes y abrirá nuevas vías de diálogo entre los docentes de ambas disciplinas. Finalmente, podemos aprovechar el potencial de las tecnologías digitales para profundizar el estudio de ciertos contenidos de los cursos mencionados e introducir aplicaciones novedosas como por ejemplo los fractales, integración mediante simulación, regresión y modelización mediante ecuaciones en derivadas parciales.

Bibliografía

Castillo W., González J., Arce C. (1997) *Álgebra Lineal*. Universidad de Costa Rica. páginas 235, 236.

De Faria E. (1998). Calculadoras gráficas, geometría y el constructivismo. Costa Rica: Revista Innovaciones Educativas, año V, No. 9, EUNED.

Noguera, N. (1998). *A Description on Tenth Grade Student's Attitudes and Cognitive Development When Leaning Algebra Using Symbolic Manipulators (TI-92's).* Tesis. Ohio: Ohio University.

LA FORMACIÓN DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN EN ALUMNOS DE EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

S. R. Velázquez, C. Flores, G. García, H. Hesiquio, E. Gómez y M. Gutiérrez
Centro de Investigación y Desarrollo Educativo y Universidad Autónoma de Guerrero.
sramiro@galeana.uagfm.mx

Resumen
En este artículo se describe la realización de un taller cuyo diseño responde al marco de una investigación en proceso, que explora los saberes que sobre el concepto de función tienen los alumnos de educación media superior (EMS) y pretende analizar los efectos que presenta la puesta en escena de situaciones didácticas sobre la formación del concepto de función. En la primera etapa de la investigación se están explorando dichos saberes en 30 alumnos de EMS y 10 de los primeros semestres de la licenciatura en matemáticas en Acapulco, Guerrero, México. También se han diseñado situaciones didácticas para abordar este concepto, a fin de que se instrumenten en la escuela. Con estos avances se estructuró el taller para interesados en este campo y realizado en Relme 17 con la participación de siete profesores.

Introducción
Diversas investigaciones en el campo de la Matemática Educativa constatan que los alumnos no tienen una comprensión cabal de este concepto que es fundamental para la construcción de conocimiento matemático y para desempeñarse con éxito en las diferentes ciencias. Por su parte los profesores tienen dificultades para hacer una representación cordinada de este concepto, en varias cuestiones se guían por la forma y no por el contenido y hacen una interpretación inadecuada de las producciones de los alumnos en esta temática (Hitt, 1996).
Se considera que es posible diseñar e instrumentar situaciones didácticas (Brousseau, 1983) en las que los alumnos realicen diversas tareas matemáticas para que formen el concepto de función. De modo que sean capaces de realizar una representación cordinada de este concepto (Duval, 1998), modelen diversos fenómenos y resuelvan problemas en los que se reflejen las 4 categorías que se consideran necesarias para la comprensión de un concepto. Estas son la identificación, discriminación, generalización y síntesis (Sierpinska, 1991).
En esta presentación se propone un taller dirigido a estudiantes y profesores interesados en la Matemática Educativa, en el que se analicen las dificultades y errores asociados de los alumnos al abordar estos contenidos y diversas situaciones didácticas que pueden promover la formación del concepto de función.

Antecedentes de la investigación en curso
Descripción del problema
El problema de investigación consiste en que los alumnos del nivel medio superior no tienen una comprensión cabal del concepto de función que es fundamental para la construcción de conocimiento matemático y para desempeñarse con éxito en las diferentes ciencias. Existen diversas investigaciones que constatan este problema, a continuación se describen algunas de las más representativas.

Duval (1998) afirma "…se hace énfasis en que el conocimiento matemático se puede representar bajo diversas formas semióticas. Pero muy pocos estudios se centran en la operación de cambiar la forma semiótica mediante la cual se representa un conocimiento. Sin embrago esta es una operación cognitiva básica". En esta afirmación se refleja que la falta de una representación cordinada de contenidos matemáticos, particularmente, en la formación del concepto de función dificulta su comprensión y por ende los alumnos no desarrollan la habilidad de visualizar. La representación cordinada de un concepto está relacionada con la habilidad de visualizar y consiste en cambiar el registro de cualquier representación semiótica.
Cantoral y Montiel (2002) en un trabajo sobre exploración del concepto de función en alumnos y profesores afirman que "… el tratamiento del concepto de función ha provocado que el alumno no desarrolle la habilidad de transitar por las distintas representaciones del concepto, ni disponga de las herramientas o el lenguaje para abordar problemas gráficos donde necesite el análisis numérico y algebraico, o viceversa" . En dicho trabajo se expresan algunas dificultades y errores asociados de los alumnos al abordar este contenido, como los siguientes: Considera que una gráfica cartesiana que cambia de pendiente en determinados intervalos no corresponde a una función, ve varias funciones en funciones discontinuas, asigna una función a cada par ordenado y representa y une los puntos en el plano en el orden en que están en una tabla.
Por nuestra parte en un estudio sobre el referido concepto en alumnos de EMS y de los primeros semestres de la licenciatura en matemáticas, se constata que tienen dificultades para articular la representación gráfica de una función con un contexto real. Al plantear actividades con este fin los alumnos se guían por la forma y no por el contenido como se ve en la fig. 1. Esta situación refleja una falta de significados del concepto ya que éste tiene grandes potencialidades para la modelación de fenómenos del medio físico y social.
Considerando el recipiente cuyo dibujo aparece, grafica la expresión que representa el llenado de un líquido donde la variable independiente representa la altura del líquido y la variable dependiente el área que ocupa dicho líquido.

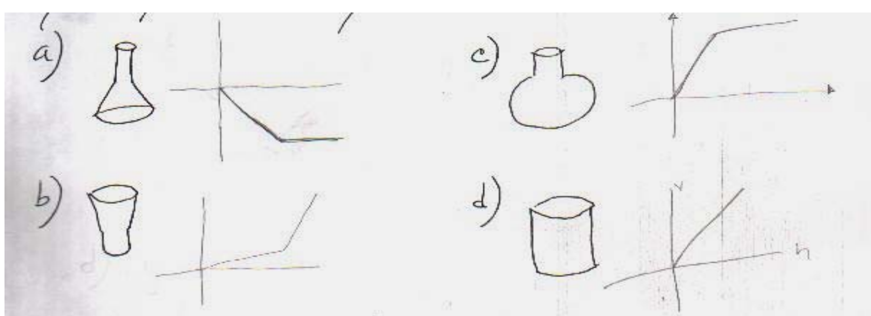


Fig. 1

Además tienen dificultades en los subconceptos dominio, rango e imagen. De igual forma sucede al identificar una función dada la gráfica, como se muestra a continuación.

Algunos aspectos del marco teórico conceptual

La formación de conceptos es una categoría esencial en la enseñanza aprendizaje de la matemática, ya que los conceptos constituyen formas fundamentales con las que opera y se desarrolla el pensamiento matemático. En especial la comprensión del concepto de función es fundamental para la construcción de conocimiento matemático y para desempeñarse con éxito en las diferentes ciencias, debido a que por lo general en toda actividad matemática se establecen relaciones, correspondencias y funciones. Sobre la base de estas ideas la formación del concepto de función debe realizarse como un proceso organizado y sostenido que refleje los objetivos a lograr, los contenidos y el tratamiento didáctico a lo largo de las diferentes etapas escolares.

En el ámbito de la Matemática Educativa se ha construido un proceso de formación de conceptos (Arango, 1993) que comprende tres fases principales, como se describen a continuación: la primera fase es de familiarización con el concepto, que comprende ejercicios preparatorios sobre situaciones y formas de trabajo referentes al contenido correspondiente. En esta fase se incluye el análisis de contenidos ya apropiados como los de variación proporcional directa e inversa, en conexión con ideas interesantes como las de de Galileo que expresaba sus relaciones funcionales con palabras y en lenguaje de proporciones. La segunda fase corresponde a la formación del concepto y abarca el desarrollo de las funciones didácticas[4] aseguramiento del nivel de partida, motivación, orientación hacia el objetivo e introducción del nuevo contenido. En esta fase se desarrolla la representación coordinado del concepto. La tercera fase corresponde a la fijación del concepto en la que se realizan diversas acciones de profundización que amplíen la articulación de los diferentes registros de representación.

Por otra parte es necesario insistir en que en la formación del concepto de función se trabaje ampliamente su representación cordinada (Duval, 1998), que como ya se afirmó en líneas anteriores consiste en cambiar el registro de cualquier representación semiótica. A los signos, gráficos o notaciones que usamos para representar objetos matemáticos se les denominan representaciones externas, que a su vez tienen un equivalente en la mente de los sujetos que los emplea y se les conoce como representaciones mentales. Duval (1998) se refiere a estas dos formas de representación y las denomina semióticas y mentales. Las primeras las considera como producciones constituidas por el empleo de signos que pertenecen a un sistema

[4] Cada actividad que se realiza en una clase o un sistema de clases, tiene una función o tarea didáctica. Las funciones didácticas que se consideran son la motivación, orientación hacia el objetivo, el aseguramiento del nivel de partida, los nuevos contenidos, fijación y control.

de representación. Las representaciones mentales las define como aquellas que cubren el conjunto de imágenes y globalmente, a las concepciones que un individuo puede tener sobre un objeto, una situación y sobre lo que les está asociado. En el mismo sentido afirma que las representaciones semióticas son necesarias para fines de comunicación e igualmente esenciales para la actividad cognitiva del pensamiento, desempeñan un papel fundamental en el desarrollo de las representaciones mentales, en el cumplimiento de diferentes funciones cognitivas y en la producción de conocimientos.
Otro aspecto a considerar en esta formación consiste en las 4 categorías que son necesarias para la comprensión de un concepto. Estas son la identificación, discriminación, generalización y síntesis (Sierpinska, 1991). Esta educadora afirma que para asimilar un concepto se requiere de la comprensión de ejemplos y contraejemplos del objeto, decir lo que es el objeto y lo que no es, dar cuenta de sus relaciones con otros conceptos y reconocer que estas relaciones son análogas a relaciones que son familiares con aplicaciones. En este sentido se utilizan las referidas categorías, la identificación de un objeto entre otros objetos da como resultado que algo que había sido un antecedente se convierte en el objeto principal de la descripción, lo percibimos como algo digno de interés y estudio. La discriminación consiste en reconocer objetos distintos, notar sus diferencias y sus propiedades relevantes. La generalización conduce a un conocimiento a extenderse al rango de las aplicaciones y finalmente la síntesis es la percepción de relaciones entre hechos como resultados, propiedades y relaciones organizados de una manera consistente. Como se puede ver estas categorías orientan el proceso de formación del concepto de función, asegurando la organización de actividades apropiadas para cada una de ellas.

Una concepción de situaciones didácticas

Una forma de concretar las posiciones teóricas antes expuestas es con el diseño y puesta en escena de situaciones didácticas, en este sentido se estructura una concepción que si bien considera aspectos de la teoría original de las situaciones didácticas (Brousseau, 1983) incorpora otros que las acercan a las condiciones escolares de la región. A continuación se describe brevemente esta concepción.
La escuela como centro exprofeso para promover el desarrollo intelectual de los alumnos, es un escenario donde de manera sistemática se realiza el proceso de estudio en general y en particular de la matemática. Sobre la base de las posiciones teóricas que se vienen sustentando en este trabajo, estudiar matemática es un proceso organizado y sostenido como fuente constante de tareas y problemas matemáticos. En este sentido un proceso de enseñar y aprender matemática en la escuela, requiere de la participación consciente de estudiantes y profesores en el planteamiento y solución de problemas. Donde se utilicen los diversos medios didáctico-matemáticos, en la producción de saberes que mantengan "vivo" el conocimiento matemático.

> Cuando se considera el estudio como el objetivo principal del proceso didáctico, resulta mucho más fácil traspasar al alumno una parte de la responsabilidad matemática asignada hoy día en exclusiva al profesor. Este nuevo reparto de responsabilidades asigna al profesor el papel de "director de estudio", posibilita que los alumnos reconozcan al profesor como "matemático" y disminuye el riesgo de la "enfermedad didáctica". Chevallard, Y. (1998).

Un eje rector en este proceso, es el diseño de situaciones didácticas conformadas con series de actividades en las que los alumnos pueden resolver problemas y generar saberes a partir de los recursos cognitivos de que disponen. Las situaciones didácticas que en este trabajo se diseñan, se conciben principalmente, sobre la base de las funciones didácticas enmarcadas en la teoría de la actividad (Leontiev, 1981), los 4 aspectos básicos del proceso de estudiar matemática (Chevallard, 1998) y las fases de la apropiación del conocimiento matemático (Brousseau, 1983).

Funciones Didácticas

La actividad docente es la forma de realización de la actividad cognoscitiva en la escuela, es por tanto una actividad humana dirigida a un fin y organizada en las fases de orientación, ejecución y control. A cada una de estas fases le corresponde una cierta función en el trabajo docente como proceso didáctico, esas son las funciones didácticas. Cada actividad que se realiza en una clase o un sistema de clases, tiene entonces una función o tarea didáctica. Las funciones didácticas que se consideran son la motivación, orientación hacia el objetivo, el aseguramiento del nivel de partida, los nuevos contenidos, fijación y control. Las tres primeras corresponden a la fase de orientación, los nuevos contenidos y la fijación a la de ejecución y el control a la fase del mismo nombre. En la instrumentación de estas funciones didácticas, destaca la formación de conceptos como fundamental para el desarrollo del pensamiento matemático, ya que los conceptos son la forma principal en que opera dicho pensamiento. Como se puede ver estas funciones constituyen una guía para el docente, en el diseño e instrumentación de situaciones didácticas.

Los cuatro aspectos básicos para el estudio de la matemática

Estos aspectos son las cuestiones a las que responde el contenido matemático que se aborda, la unidad del razonamiento deductivo y el pensamiento conjetural, las técnicas que se utilizan y el tecnológico-teórico.

Las cuestiones a las que responde el contenido que se aborda consideran las necesidades y problemas que dieron origen a ese conocimiento, la forma de cómo se construyó para ser un conocimiento matemático científico comunicable, así como su transformación en un conocimiento matemático enseñable. En esta transformación se responde a estas preguntas ¿Qué características tiene este contenido para ser un conocimiento enseñable?, ¿Cuáles son las razones para que forme parte del currículo escolar?, ¿Qué potencialidades tiene para desarrollar el pensamiento matemático?.

La unidad del razonamiento deductivo y el pensamiento conjetural, se refleja en la búsqueda y aseguramiento del conocimiento matemático, es decir para el cumplimiento de una tarea matemática se requiere de la exploración y formulación de conjeturas hasta encontrar el conocimiento. A la vez este conocimiento se asegura a base de demostraciones, fundamentos, argumentos y justificaciones. En este proceso de búsqueda y aseguramiento, se ejecuta el trabajo con la técnica que consiste en la instrumentación de procedimientos matemáticos vinculados con el contenido, a partir de las cuales se producen nuevas técnicas y nuevos conocimientos. En este aspecto son relevantes las técnicas y estrategias eficaces en la solución de problemas. Como una base de orientación para los estudiantes, existe una serie de técnicas y estrategias en la solución de problemas. Como técnicas están la lectura analítica, la modelación, el tanteo inteligente, la determinación de problemas auxiliares y la comprobación (Rizo . y Campistrous, 1995). Como estrategias se tiene la analogía, partir del problema resuelto, lugares geométricos y transformaciones geométricas (Polya, 1976).

El aspecto tecnológico-teórico lo conforman los fundamentos, argumentos y explicaciones sobre la tarea que se está realizando de manera que se amplíe su comprensión y se eficiente el proceso de estudio.

Estos aspectos están entrelazados, se dan en unidad y caracterizan el proceso de aprender y enseñar matemática como un proceso de estudio. Cuando las actividades de una situación didáctica se realizan de esta manera, se descubre la naturaleza de la matemática.

Las Fases de la Apropiación del Conocimiento Matemático

Brousseau (1983) establece que las fases de la adquisición del conocimiento matemático son: la acción, formulación, validación e institucionalización. La acción consiste en el planteamiento de la tarea, su comprensión y en las acciones que realiza el alumno para cumplir con las exigencias establecidas. En la formulación se confrontan y analizan los diversos procedimientos y resultados. En la validación se fundamentan los procedimientos y resultados y finalmente, en la fase de institucionalización se expresan los saberes construidos, correctamente, desde el punto de la forma y el contenido.

Algunos resultados de la investigación marco del taller

En esta fase de la investigación se tienen los primeros resultados sobre la exploración de saberes sobre el concepto de función, que muestran dificultades y errores asociados al resolver situaciones relacionadas con este contenido, como se expresa en la descripción del problema. Además se han diseñado situaciones didácticas para abordar los contenidos programáticos referentes a este concepto, sobre la base de las posiciones que se vienen sustentando. Estos resultados preliminares y las situaciones didácticas diseñadas se presentaron en un curso con la participación de 28 estudiantes y profesores de diversas partes del país, en el marco de la VI Escuela de Invierno y Seminario Nacional de Investigación en Didáctica de la Matemática. Así como en un taller en Relme 17 con la asistencia de 7 profesores de diversos países de América Latina.

Descripción del taller

Los objetivos del taller fueron describir las dificultades y errores asociados de los estudiantes al realizar diversas tareas matemáticas en las que está inmerso el concepto de función y analizar situaciones didácticas para promover la formación de este concepto, de modo que se determine la pertinencia y eficacia de su instrumentación en la escuela. Con el propósito ulterior de evaluar los efectos de la puesta de escena de situaciones didácticas sobre el concepto de función. Se consideraron los contenidos de dificultades y errores asociados de los alumnos al realizar tareas matemáticas que involucran el concepto de función y situaciones didácticas para promover la formación del concepto de función. Se propuso como modalidad de trabajo para el taller que los participantes cuenten con un material impreso de apoyo, realicen las tareas matemáticas propuestas y hagan producciones individuales, de equipo y de grupo.

Los asistentes al taller manifestaron que se trató de un trabajo interesante y propusieron cambios a las situaciones didácticas, particularmente en lo referente a las lecturas de introducción en las que se sugiere considerar el desarrollo histórico del concepto como conocimiento matemático enseñable.

Bibliografía

Arango, C. (1993), *Metodología de la enseñanza de la matemática*, tomo I, Pueblo y Educación, Habana.

Brousseau, G. (1983), *Los obstáculos epistemológicos y los problemas de la enseñanza*, versión en español del Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN, México, D.F.

Cantoral, R. y Montiel, G. (2002), Desarrollo del pensamiento: El caso de visualización de funciones, *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, tomo I, Grupo Editorial Iberoamérica, México, D. F.

Duval, R. (1998), Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento, en *Investigaciones en Didáctica de la Matemática II*, Grupo Editorial Iberoamérica, México, D.F.

Hitt, F. (1996), Sistemas semióticos de respresentación del concepto de función y su relación con problemas epistemológicos y didácticos, En *Investigaciones en didáctica de la Matemática*, Grupo Editorial Iberoamérica, México, D.F.

Leontiev, A. (1981) *La actividad en Psicología*, Pueblo y Educación, Habana.

Sierpinska, A. (1994), *Understanding in mathematics*, The Falmer Press, London.

LA TOPOLOGÍA EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES

Carmen Sosa Garza, Roberto Torres Hernández
Universidad Autónoma de Querétaro, MÉXICO
carsg@uaq.mx, robert@uaq.mx

Resumen

En la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Querétaro, en México, existe y funciona desde hace varios años la Maestría en Docencia de las Matemáticas. Este posgrado está dirigido primordialmente a maestros de Matemáticas en ejercicio, principalmente de los niveles medio y medio superior, cuya característica común es que no son matemáticos de profesión, es decir, no son egresados de una licenciatura en matemáticas. En este contexto, en dicha maestría se ofrece la materia de Topología como curso optativo de los últimos semestres. Como encargados de impartirla, hemos observado que los libros existentes de este tema están diseñados fundamentalmente para los estudiantes de las licenciaturas de matemáticas, con un rigor bien establecido, o bien son trabajos a nivel de divulgación que presentan solo ciertos aspectos geométricos del tema. De cualquier modo, estos dos extremos no nos parecen apropiados para los fines que se persiguen en esta maestría y en general en la formación de profesores.

Así pues, nos hemos dado a la tarea de diseñar apuntes y material de trabajo, tratando de tender un puente entre los textos de carácter matemático y los de divulgación. A grandes rasgos, la idea central consiste en iniciar cada tema de topología con ejemplos y conceptos conocidos, principalmente tomados del Cálculo infinitesimal e ir generalizando y abstrayendo definiciones y resultados para llegar finalmente a resultados y definiciones propios de la topología. El esquema completo es el siguiente:

- El valor absoluto y la distancia usual en el plano como ejemplos de distancias o métricas. Ejemplos de diferentes distancias. El concepto de espacio métrico.
- La idea de conjunto abierto en el plano con varias métricas. La definición de espacio topológico.
- La definición de continuidad con epsilón-delta y su generalización a la definición topológica por abiertos.
- El concepto de homeomorfismo y su uso en las deformaciones topológicas. El Teorema de Clasificación de Superficies.
- Aplicaciones recientes de la topología a otras áreas del conocimiento, tales como la teoría de nudos y el ADN y en particular, la aplicación de la topología a la computación.

Es en este último punto donde incide este trabajo. La idea es presentar como en una "imagen digital" se encuentra ligada la topología, una de las geometrías del siglo XX, como ciertas propiedades cualitativas en la imagen están relacionadas a ciertas propiedades topológicas.

Antecedentes

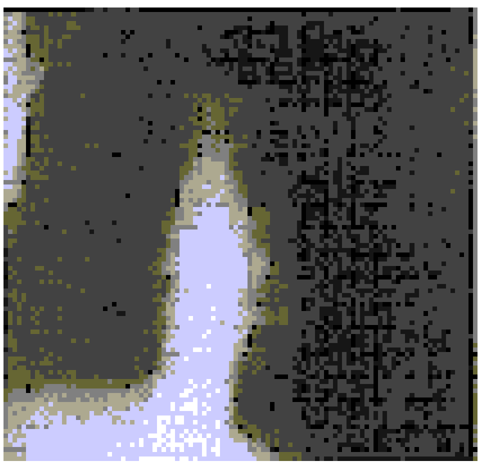
La topología es una rama de las matemáticas que a últimas fechas a adquirido importancia por las diversas aplicaciones que se han encontrado. Según Victor Katz, el principio de la topología se encuentra en los trabajos de Karl Weierstrass en 1860 analizando el concepto de límite de una función. Con este objetivo, reconstruyó nuevamente el sistema de los números reales y reveló algunas propiedades que ahora se llaman "topológicas". Posteriormente Georg Cantor desarrolló la teoría de los conjuntos (1980) el cual es un fundamento donde la topología construye su "casa". Otro aspecto de la topología, es la llamada combinatoria o algebraica, que se inicó en 1890 con el trabajo de Henri Poincaré. La palabra "topología" se deriva del griego τσπσ que significa "lugar" y αλσγια que significa "estudio". Tradicionalmente la topología estudiaba las propiedades de las superficies de la geometría euclidiana.

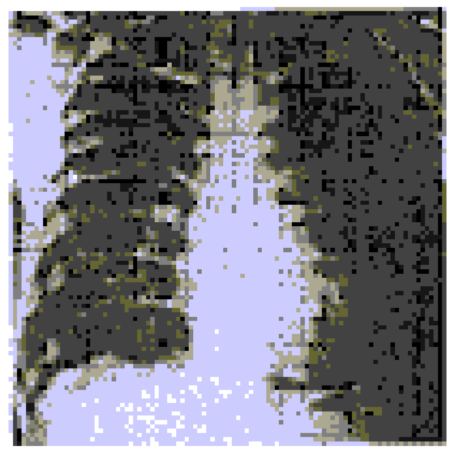
Actualmente la topología estudia la "continuidad" siendo fundamental para entender el análisis. Pero lo más importante de la topología es que es una de las llaves para la matemática moderna.

Por otra parte, el procesamiento de una imagen digital se ha desarrollado rápidamente con muchas aplicaciones: en los negocios (lectura de documentos), la industria (la automatización), medicina (radiografías), geología (fotos a grandes distancias), entre otros.

El campo del tratamiento digital de imágenes está en continuo evolución. El interés por los métodos de tratamiento digital deriva de dos áreas principales de aplicación: la mejora de la información pictórica para la interpretación humana y el procesamiento de los datos de la escena para percepción autónoma por una máquina, este trabajo habla de la primera área.

Como muestra de las mejoras que se pueden lograr, considérense las dos siguientes imágenes:





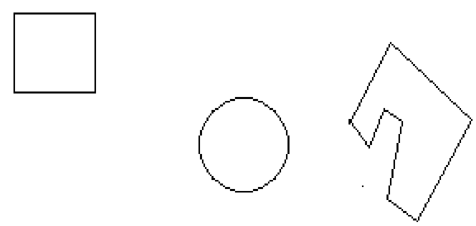
A partir de este momento, se relacionarán las ideas de imágenes digitales y de topología casi simultáneamente, a veces a doble columna, para resaltar la liga entre ellos.

¿Qué es una imagen digital?

Una imagen digital es una función bidimensional de intensidad de luz *f(x,y)* donde *x,y* representan las coordenadas espaciales y el valor de *f* en un punto *(x,y)* es proporcional al brillo (nivel de gris) de la imagen en ese punto al que se le llama *pixel*. Una imagen digital puede considerarse como un arreglo rectangular de puntos, donde cada punto se puede asociar con una pareja *(x,y)* , el número de renglón y el número de columna que se encuentra, y teniendo un nivel de gris. Por ejemplo, un tamaño típico, comparable a una imagen monocroma de televisión, es una matriz de 521x521 puntos con 128 niveles de grises. Etapas fundamentales del procesamiento de imágenes:
adquisición,
prepocesamiento,
segmentación,
descripción, reconocimiento.

¿Qué es topología?

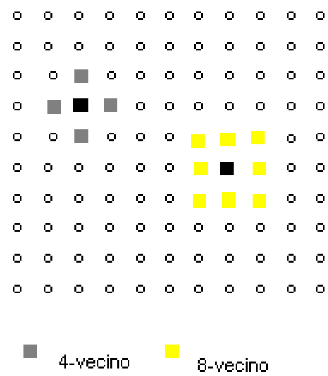
La topología se considera la geometría del siglo XX y entre sus objetivos es clasificar superficies. También se le conoce como la geometría de hule, dos figuras son topológicamente equivalentes cuando una figura se puede deformar, sin desgarramientos o adherencias, y obtener la otra figura. Por ejemplo una circunferencia y un cuadrado son topológicamente equivalentes.



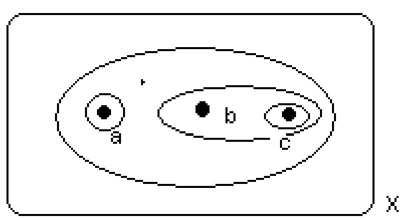
figuras equivalentes

Las propiedades que quedan invariantes bajo este tipo de transformación son las propiedades topológicas que no son más que las propiedades cualitativas de la figura y no como las que estudia la geometría euclidiana, las propiedades métricas.

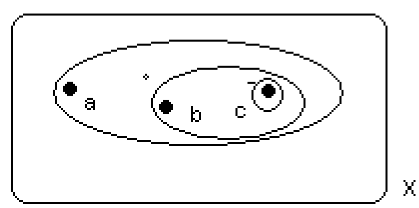
¿Cómo se pueden relacionar dos puntos?
Cada punto $P = (x,y)$ tiene **4-vecinos**, horizontal y vertical, $(x-1,y)$, $(x,y-1)$, $(x,y+1)$ y $(x+1,y)$. También tiene **4-vecinos diagonales**, $(x-1,y-1)$, $(x-1,y+1)$, $(x+1,y+1)$ y $(x+1,y+1)$ que junto con los 4-vecinos horizontales y verticales se llaman los **8-vecinos.**
Nótese que si P se encuentra en el borde, algunos de sus vecinos pueden no existir.



En topología los puntos se relacionan dependiendo de las vecindades que se hayan definido, es decir dado un conjunto X, se define un conjunto de subconjuntos de X a los cuales llamaremos topología y tienen la propiedad de que la unión arbitraria y la intersección finita pertenece a él.



No es una topología



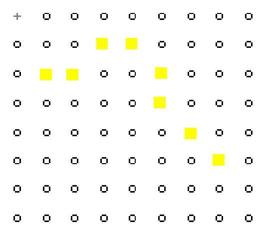
Si es una topología

La segmentación consiste en descomponer una imagen en subconjuntos o regiones donde Esta etapa del proceso determina el eventual éxito o fracaso del análisis. Los algoritmos de segmentación de imágenes monocromáticas generalmente se basan en una de las propiedades básicas de los valores del nivel de gris: discontinuidad y similaridad.

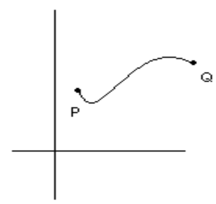
¿Cómo relacionar y encapsularlos los puntos para identificar las diferentes regiones?

Un 4-camino (8-camino) de P a Q, π de longitud n es una secuencia de puntos $P = P_0, P_1, ..., P_n = Q$ tal que P_i es 4-vecino (8-vecino) de P_{i+1}, $1 \leq i \leq n-1$. Por lo que se podría hablar de una función *f*,

f: $[1,\ldots,n] \longrightarrow$ M tal que $f(j)=P_j$



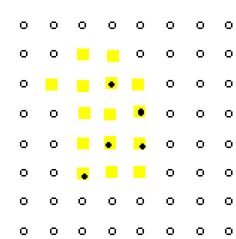
Una trayectoia topológicamente hablando es una función continua f,
f : (a,b)→X.



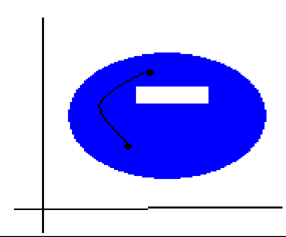
Cada segmentación debe ser completa; es decir cada píxel debe pertenecer a una región y que cada región debe ser **conexa.** Pero ¿cómo poder asegurar que dos puntos se encuentran en la misma región?

Topológicamente conexa significa que esta formada de una sola pieza, intuitivamente hablando, es decir A es conexa si no existen dos subconjuntos abiertos, B y C no vacíos, ajenos tales que la unión de estos, $B \cup C = A$.

Un subconjunto *S* se dirá que es 4- *conectado (8-conectado)* si para cualquier par de puntos en *S, P,Q,* existe una 4-camino (8-camino) de *P* a *Q* con puntos de *S*. Dado *P, la componente conexa de P con respecto a S,* son todos los puntos de *S* que se puedan conectar a *P* por medio de puntos de *S*.



La componente arco-conexa de x en un espacio X, es el conjunto más grande que tiene la propiedad que para cualquier punto y en ella, x,y son arco-conexo. Que es equivalente a la unión de todos los subespacios conexos de X que contengan a x.

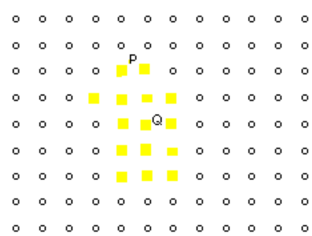


¿Cómo se podría aislar cada componente? Se buscaría los puntos “frontera” y encontrar una un 4-camino (8-camino) π de longitud n donde $P_0 = P_n$. Es decir cada punto tiene exactamente dos 4-vecinos (8-vecinos) de π.
Nota: es necesario que contenga al menos 5 puntos.

Topológicamente se tiene la curva de Jordan, todo subespacio o figura homeomorfa a una circunferencia es una curva.
Teorema de Jordan: Si J es una curva en el plano, R^2*, entonces separa al plano. Es decir* $R^2 - \{J\}$ *tiene dos componentes*

Nota: Dando la topología adecuada a M, se puede definir una curva de Jordan y demostrar el teorema, toda curva tiene exactamente un agujero.

Uno de los objetivos de la segmentación es poder angostar, es decir eliminar puntos de un subconjunto de M sin afectar las propiedades de conexidad tanto de S como S^c.
Un punto *P* satisface que $S - P$ tiene el mismo número de componentes (en el sentido de *S)* y S^c U *P* tiene el mismo número de componentes (en el sentido de S^c) como S^c, se le llama **punto simple**.
Dado *S,* un punto aislado de S o un punto interior de *S* no puede ser un punto punto simple mientras que un punto frontera de *S* siempre será un punto simple.



P es un punto simple   Q no es punto simple

La parte teórica puede continuar hasta temas cada vez mas complejos, pero no es ese el objetivo de este trabajo.
Resta solo por decir que el trabajar con este material con profesores que no son profesionales de la matemática, ha sido muy enriquecedor y motivante y esperamos que sea interesante para nuestra comunidad del RELME.

Bibliografía

Armstrong, M.A. (1987) *Topología Básica.* España, Ed Reverté S.A.
Chinn, W.G. y Steenrod, N.E. (1966) *First Concepts of Topology*. Nueva York, Random House Inc.
González, R., Woods, R. (1996) *Tratamiento digital de imágenes.* E.U.A., Addison-Wesley Iberoamericana, S.A.
Rosenfeld, A. (1979) Digital topology. *American Mathematical Monthly*, 86. 621-630.
Wilson, R. (1990) Topología digital: una aplicación a las gráficas de computación. *Memorias del XXV Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana*. Xalapa, Ver. 269-284.

LA INCERTIDUMBRE COMO MARCO DEL PROBLEMA. UNA APLICACIÓN DE LA METODOLOGÍA BORROSA

Carmen M. Torrente
Universidad Nacional de Tucumán, Argentina
ctorrente@fbqf.unt.edu.ar

Resumen
En este trabajo se presenta una aplicación de la teoría de los conjuntos borrosos (TCB), ilustrando su uso a propósito del diseño de una técnica de evaluación de pasantes. Cuando el problema bajo estudio cuenta con información poco estructurada, o de carácter subjetivo, abordarlo demanda de un tratamiento apropiado, de una metodología capaz de manipular ese tipo de datos. La metodología que se propone es una que se basa en la TCB. La aplicación de la metodología borrosa requiere tanto de la identificación de las variables bajo estudio, como de la adopción de la escala semántica. Con éstas – las variables y la escala - se construyen ciertas matrices cuya lectura permitirá la toma de decisiones adecuadas al problema que se trata.

Introducción

Los problemas de estudio de la realidad que cuentan con datos exactos y ciertos son cada vez más escasos, tanto los provenientes de la naturaleza como los producidos por el hombre son mayormente inciertos. Esto es así porque la información con que se cuenta suele ser incompleta, poco confiable, imprecisa, además de ser abundante en ciertas áreas de estudio.
El tratamiento de este tipo de información requiere de herramientas adecuadas, su análisis no puede hacerse *siempre* empleando técnicas que son propias de situaciones ciertas y aleatorias. Para las primeras se recurre a formulaciones determinísticas, para la segunda el auxilio es la teoría de las probabilidades. La cuestión que se plantea, es cómo enfrentar a la incertidumbre, si ésta no es mensurable por definición.
El problema del *cómo* orientó la búsqueda hacia otra teoría, con bases filosóficas diferentes, para enfrentar el problema concreto que se despliega en este trabajo. En este se cuenta con un juego de cinco factores (cualidades, competencias) –que definen al problema puntual– y sus respectivos niveles de calificación. Estas valoraciones, o estimaciones, fueron brindadas por un experto. A partir de esa información se construye un *modelo* que servirá como parámetro de comparación para situaciones problemáticas concretas.
El propósito de este estudio es mostrar cómo se empleó la técnica borrosa para encontrar el grado de adecuación de una situación real al modelo propuesto. Por cierto, el trabajo tiene un cierto sesgo didáctico.

Algunas consideraciones previas

La teoría subyacente al modelo que se presenta en este trabajo es la teoría de los conjuntos borrosos. Esta teoría nació de la mano de Zadeh en el año 1965 y rompió con la dicotomía pertenece–no pertenece de los conjuntos clásicos, a la cual incluye como caso límite. Permite, asimismo, construir una estructura matemática con la cual es posible manipular datos inciertos, para los cuales la pertenencia a un conjunto tiene grados; de modo que ciertos procesos decisorios, en condiciones de incertidumbre, podrían plantearse y resolverse más adecuadamente por medio de la utilización de esta teoría. Con ella nos adentramos a una manera de razonar distinta a la aristotélica, la de los términos absolutos de cierto o falso. Con la lógica borrosa, multivalente, el mundo real puede modelarse con mayor aproximación, pues no siempre es “blanco o negro”. También admite zonas grises, *pensar el mundo* implica, entonces, perspectivas diferentes y complementarias.

Por otro lado, no debe temerse a los rótulos de “matemática blanda”, como contraposición de la “matemática de las ciencias duras”. Piénsese en una “matemática flexible”, capaz de interpretar las leyes que rigen el comportamiento humano y las relaciones entre los hombres, como contraparte de una matemática rígida. Y, porque sea flexible no deja de ser rigurosa; es la rigurosidad lo que en definitiva debemos cuidar de nuestra herramienta.

Identificación del problema

La Facultad de Medicina de la Universidad Nacional de Tucumán –UNT–, Argentina, implementó, a partir del año 1989 un nuevo plan de estudios. En este plan se consideraron las recomendaciones de sucesivos encuentros de Educación Médica que se realizaron en distintos países, a partir de la reunión de Alma Ata, Rusia, en 1978. Fue en esta reunión que se plasmó la estrategia de la Atención Primaria de la Salud –APS–con la meta de “*Salud para todos en el año 2000*”.

La formación del estudiante de medicina de la Facultad de Tucumán culmina con la *pasantía rural* que constituye la aplicación práctica e integración de conocimientos, actitudes y criterios que el alumno ha adquirido en los cursos precedentes, atendiendo al perfil de médico diseñado. Esto es, el de un médico general habilitado para resolver situaciones en el primer nivel de atención, con clara percepción de su entorno social y sanitario.

Durante el periodo en que se desarrolla la pasantía rural los estudiantes aprenden a resolver problemas *in situ*, generar soluciones concretas, enfrentarse con el proceso salud–enfermedad, tanto de un individuo como de la población o grupo al cual pertenece.

Con el presente trabajo se pretende evaluar dos pasantías rurales en particular, identificadas con el nombre de Pasantía A y Pasantía B. Para ello, se confrontarán estas pasantías con el modelo propuesto, y, según sea su grado de adecuación al modelo, se podrán identificar los ajustes que sean necesarios para lograr una mejor adecuación y establecer un orden de preferencia entre ambas. En suma, representará una información adicional pertinente a la hora de tomar algún tipo de decisión al respecto.

Construcción del objeto de estudio

Si se considera que la pasantía rural se encuentra en un marco de incertidumbre, abordarla requiere de un tratamiento apropiado. La metodología que se propone se basa en la teoría de los subconjuntos borrosos pues permite captar los matices que configuran a la pasantía rural, el objeto de estudio.

La aplicación de las técnicas borrosas requieren de la *identificación de las variables* bajo estudio y de la adopción de una *escala semántica* para construir, a partir de allí, un perfil ideal respecto al cual se podrán comparar las pasantías particulares y establecer el grado de adecuación de las mismas.

Para definir la pasantía rural se consideraron los siguientes factores:

F_1: Formación de 1° a 5° año

F_2: Formación de 6°

F_3: Diagnóstico y tratamiento del paciente.

F_4: Diagnóstico y tratamiento de los problemas de salud del área de incumbencia.

F_5: Compromiso social

F_6: Comunicación social

Estos factores, si bien no constituyen una lista exhaustiva, describen a la pasantía rural de una manera bastante aproximada y dan cuenta de la correcta realización de las actividades que se proponen en el plan de estudios. Los factores, conforman el conjunto referencial *R*, a partir del cual se deriva el *perfil ideal* de pasantía y también las técnicas que pueden ser utilizadas para la evaluación de pasantías concretas en el contexto en que se desarrollan.
Cada uno de los factores puede *incidir* en mayor o menor grado sobre los otros factores. Por ser la *incidencia* una noción subjetiva, su estimación podría tomar valores entre ser "totalmente alta" y ser "totalmente baja", por ejemplo. Se consideró adecuado adoptar la escala endecadaria siguiente:

1 totalmente alta
0,9 alta
0,8 prácticamente alta
0,7 casi alta
0,6 bastante alta
0,4 bastante baja
0,5 medianamente alta
0,3 casi baja
0,2 prácticamente baja
0,1 baja
0 totalmente baja

Aplicación de la técnica borrosa
El perfil ideal, el modelo respecto al cual se compararán las pasantías rurales, $\tilde{F}$, se construyó teniendo en cuenta las valuaciones asignadas a cada factor por un experto, un especialista en el tema.
Tanto para el perfil ideal como para los candidatos a ser contrastados se dispone de sendos subconjuntos borrosos. Los subconjuntos borrosos correspondientes a las pasantías a contrastar, $\tilde{P}_A$ y $\tilde{P}_B$, se construyeron a partir de los valores que poseen los distintos factores.
Al establecer la comparación con el perfil teórico establecido es posible conocer el grado de adaptación de cada una de las pasantías.

Para el conjunto referencial

$$R = \{ F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6 \}$$

Los factores con las valuaciones asignadas por el experto define el siguiente perfil ideal:

$\tilde{F}$ =

0,9	0,8	0,9	0,8	0,9	0,9

El subconjunto borroso $\tilde{F}$ indica el nivel que se exige para cada factor.
A fin de aplicar la técnica de evaluación borrosa se tomó como caso a contrastar una pasantía real, la Pasantía A, cuyo conjunto borroso, fue construido a partir de las valoraciones emitidas por un pasante referida a su pasantía concreta.
Para la Pasantía A el subconjunto borroso es:

$\tilde{P}_A$ =

0,9	0,8	0,7	0,7	0,7	0,7

Para la Pasantía B el correspondiente subconjunto borroso es:

$\tilde{P}_B =$

0,7	0,8	0,7	0,5	0,6	0,4

La evaluación trata de plasmar mediante un "número" las cualidades que posee la pasantía respecto del parámetro establecido. Los subconjuntos borrosos $\tilde{P}_A$ y $\tilde{P}_B$ se obtuvieron a partir de la información brindada por pasantes e indican los niveles, dentro del intervalo [0, 1], conque fueron estimados los factores definidos en este estudio, Estas valuaciones se compararon con el perfil (*F*) teórico propuesto.
La idea es conocer el grado de adecuación de cada una de las pasantías con el perfil para así poder hacer, con esta información, los ajustes necesarios. Para encontrar el índice de adecuación se siguió el procedimiento de Gil Aluja (1996).

Construcción del coeficiente de adecuación
Dados el conjunto referencial R, los subconjuntos borrosos $\tilde{F}$ y $\tilde{P}_i$ y los respectivos grados de pertenencia, $\mu_F(x)$ y $\mu_P(x)$, cuyos valores pertenecen al [0, 1], se tiene que:

Si $\mu_P(x) \geq \mu_F(x)$, entonces, $K_X(p \to f) = 1$
Si $\mu_P(x) < \mu_F(x)$, entonces, $K_X(p \to f) = 1 - [\mu_F(x) - \mu_P(x)]$

El coeficiente de adecuación *K* se obtiene de sumar los $K_X(p \to f)$ y dividir el resultado por el cardinal del conjunto referencial *R* de los factores.

Para la Pasantía A el valor obtenido fue:

$$K(\tilde{P}_A, \tilde{F}) = \frac{1 + 1 + 0{,}8 + 0{,}9 + 0{,}8 + 0{,}8}{6} = 0{,}88$$

Análogamente para la Pasantía B se obtuvo:

$$K(\tilde{P}_B, \tilde{F}) = \frac{0{,}8 + 1 + 0{,}8 + 0{,}7 + 0{,}7 + 0{,}5}{6} = 0{,}75$$

Se puede observar que el valor máximo de adecuación, esto es $K = 1$, se obtendría si la pasantía particular satisface, en todos los casos la desigualdad $\mu_P(x) \geq \mu_F(x)$. Por el contrario, tomaría el valor mínimo, K = 0,13, cuando obtenga un 0 para todos los factores.
Además se observa que $\tilde{P}_A \succ \tilde{P}_B$. Es decir se establece un orden de preferencia que podría arrojar información adicional a quienes coordinan las pasantías.
Se ha optado por aplicar el coeficiente de adecuación en lugar de la distancia de Hamming, por cuanto ésta puede acercarse, o alejarse, del valor ideal por arriba o por debajo del mismo. Y, en casos concretos, es conveniente ajustar lo que no llega al nivel requerido sin dejar por ello de reconocer lo aspectos que posean un grado superior.

Algunos comentarios

- El modelo propuesto, construido a partir de la metodología borrosa, resulta adecuado para una evaluación de situaciones complejas donde los aspectos inciertos, no medibles por definición, necesitan ser estimados. Permite pasar de la semántica verbal a una escala de valores, posee la característica de la matización y se evita, de este modo, caer en los reduccionismos habituales.
- El modelo no se constituye en un instrumento de mero control (sobre todo de las debilidades) sino en un instrumento orientado a mejorar la situación del sistema evaluado, sin la pretensión de representar toda la realidad sino sólo reflejar ciertos aspectos del problema.
- El índice de adecuación K, permite tanto una evaluación global como individual, en el sentido que podría compararse con el modelo, factor por factor, permitiendo una visión más acabada del problema de la evaluación.

El problema que aquí se trató está simplificado, atendiendo al propósito del trabajo, esto es: es presentar la técnica borrosa para el tratamiento de un problema enmarcado en la incertidumbre y, como se dijo también, guarda un *cierto sesgo didáctico*. Pues, obsérvese que se tomó un solo experto, dos pasantías concretas y sólo cinco factores, como dimensiones del problema. Es de suyo que, para un problema concreto, cuanta mayor cantidad de variables puedan considerarse, cuanto mayores expertos contribuyan a valorar la incidencia de cada uno de estas variables y cuanto mayor sea la cantidad de "pasantes" que evalúen sus propias pasantías, el resultado de la evaluación y la técnica de evaluación misma se constituyen en instrumentos valiosos para su ulterior uso.

Bibliografía

García, P; Machado, E; Slemenson P. (2001) Lógica de la intuición. Una aplicación de la metodología borrosa al análisis del pensar, en *Cuaderno del Cimbage.* N°4. Facultad de Ciencias Económicas. Universidad de Buenos Aires. Buenos Aires.

Kaufmann, Gil Aluja, (1987) *Técnicas operativas de gestión para el tratamiento de la incertidumbre.* Editorial Hispano Europea, Barcelona.

Kosko, B. (1995) *Pensamiento borroso.* Crítica. Barcelona.

Kosko,B. (1990) Fuzziness vs. Probability en Int. J General Systems, Vol 17, pp. 221-240. *Gordon and Breach Sciennce Publishers, S.A.*

Klir, G; Yuan,B. (1995) *Fuzzy sets and fuzzy logic. Theory and Applications.* Prentice Hall. USA.

Lazzari, L.; Machado, E.; Pérez, R. (1999)Los conjuntos borrosos: una introducción, en *Cuaderno del CIMBAGE* N° 2. Universidad de Buenos Aires. Facultad de Ciencias Económicas. Buenos Aires.

Mordeson, J.; Malik, D.; Cheng, S. (2000) Fuzzy Mathematics in Medicine. Physica-Verlag. Germany.

Russel B. (1923) *Vagueness.* Australian Journal of Philosophy 1.

Sánchez, E. (1995) *Medical diagnosis and composite fuzzy relations*. In Gupta, M. M., R. K. Ragade and R. R. Yager, eds., *Advances in Fuzzy Set Theoryad Aplications.* North Holland, New York, pp. 437-444

Trillas, E; Alsina, C; Terricabras, J. *Introducción a la lógica borrosa.* Ariel Matemática. Barcelona.

Zadeh, L. A. (1965) *Fuzzy sets*. Information and Control, N°8

LAS CONCEPCIONES DE LOS DOCENTES ACERCA DE LAS DEMOSTRACIONES

Cecilia Crespo Crespo; Christiane Ponteville
Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González". Universidad de Buenos Aires
ccrespo@sinectis.com.ar - chponteville@velocom.com.ar

Resumen

Uno de los conceptos matemáticos centrales a ser transmitidos a los alumnos a partir de la escuela media es el de demostración. El presente trabajo se plantea analizar la concepción que tienen los docentes de la noción de demostración tanto desde el punto de vista científico, como didáctico, teniendo en cuenta su puesta en práctica dentro de la enseñanza de la matemática. Esta investigación conduce a resultados que indican que la enseñanza de la demostración como contenido matemático, aunque es aceptada por los docentes como algo importante desde el punto de vista teórico, no es siempre una problemática asumida por ellos en forma sistemática, sino en algunos casos de manera intuitiva, tomando como modelo aquel en el que han sido formados.

La demostración matemática y los docentes

La demostración es el medio de prueba de resultados característico de la matemática. Ocupa un lugar central en esta ciencia.

El concepto de demostración es una de las nociones matemáticas medulares para ser transmitida a los alumnos a partir de los 13 años. En nuestro país, se sugiere su construcción en forma gradual y espiralada durante la Educación General Básica y que se continuará posteriormente. *"A lo largo de toda la EGB, el contraste de conceptos y relaciones, la búsqueda de regularidades en un conjunto de datos (hechos, formas, números, expresiones algebraicas, gráficos, etc.) y la formulación de generalizaciones sobre la base de lo observado a la experiencia o a la intuición, apuntarán a la formación del razonamiento inductivo."... "La capacidad de razonar lógicamente crece con la edad y las experiencias de dentro y fuera de la escuela. En los distintos grados se han de ir ampliando los contextos de aplicación de la misma (numéricos, geométricos, de proporcionalidad, gráficos, etc.) y el rigor con que se la utilice."* (Ministerio de Cultura y Educación, 1995).

Una tendencia presente en investigaciones de matemática educativa es el análisis de los conocimientos que poseen los docentes y la manera en que éstos influyen en la enseñanza de los contenidos correspondientes. La importancia de estas investigaciones reside en que sus ideas, valores y fundamentos se reflejan en sus decisiones pedagógicas. Diversas investigaciones muestran que el docente de matemática enseña de acuerdo a las concepciones que tiene de esta disciplina (Santos Trigo, 2001). Si la demostración es considerada como una estructura rígida y no modificable que aparece en los libros, la enseñará como algo acabado y que debe ser memorizado por los alumnos. En cambio si considera que los alumnos pueden "hacer matemática", la demostración como contenido matemático adquirirá un perfil de elemento dinámico y modificable desde el punto de vista didáctico pudiendo adaptarse a la situación escolar presentada.

No es necesario explicar en profundidad la relación existente entre la matemática y el razonamiento lógico. El razonamiento matemático forma parte del proceso en el que se formulan y resuelven problemas matemáticos. Se basa en la recolección de datos, realización de conjeturas y en la determinación de si las mismas son válidas o no.

Las distintas formas del pensamiento lógico no siempre son logradas satisfactoriamente por los alumnos en la escuela. Diferentes investigaciones realizadas muestran que aunque estas aparecen desde la escuela dentro de los contenidos a enseñar sin embargo a veces ni los estudiantes del nivel universitario tienen dominio de dichos procedimientos lógicos. (Ibañes y Ortega, 1997).

El razonamiento lógico en el aula

El pensamiento lógico, puede decirse que es el que garantiza que el conocimiento formal sea correcto, que se ajuste a la realidad que refleja. La corrección lógica es el único criterio para juzgar la validez de un razonamiento. El docente debe determinar cuál es el nivel de precisión y rigor que se desea exigir a los alumnos en cada momento del proceso de enseñanza-aprendizaje.

Esta forma de pensamiento no es inherente sólo a la matemática. En cualquier ciencia, e incluso en cualquier actividad humana aparecen procedimientos deductivos válidos aplicables en cada uno de los campos del conocimiento, que son los que permiten garantizar la corrección de los razonamientos.

Es importante precisar que la escuela en general y la matemática en particular deben contribuir al desarrollo de las ideas lógicas. Es cierto que se puede observar que en el mejor de los casos los docentes aplican en ciertas ocasiones los procedimientos lógicos de forma no sistemática, sin un objetivo determinado y sin tener en cuenta las particularidades esenciales que los caracterizan. Los procedimientos lógicos más elementales son los que se relacionan con las propiedades de los conceptos. En primer lugar se aíslan propiedades, interviniendo las operaciones racionales del pensamiento: análisis, síntesis, comparación, abstracción, concreción, generalización y particularización. Otro procedimiento lógico elemental relacionado consiste en asociar propiedades a un objeto. A medida que aumenta la complejidad de los objetos y el grado de abstracción de las propiedades se hace necesario recurrir a otros procedimientos como son: reconocer propiedades, distinguir propiedades esenciales, necesarias, suficientes y necesarias y suficientes, identificar conceptos, definir, clasificar, ejemplificar y deducir propiedades.

No es un secreto que en nuestras aulas se estudian muchos problemas. Dentro de estos, los problemas de demostración, han despertado desde siempre interrogantes a alumnos y docentes en la búsqueda de su solución. Surgen preguntas como:

- "¿De dónde puedo partir para encontrar lo que me piden?",
- "¿Por qué lo puedo hacer?",
- "¿Qué me falta por obtener?",
- "¿De dónde obtenerlo?",
- "¿Por qué el trazado de la figura auxiliar?",
- "¿Cómo conseguir lo que me falta?",
- "¿Cómo se le ocurrió a alguien esta construcción auxiliar?";
- *entre otras.*

Por su parte, los docentes se deberían formular preguntas del tipo:

- "¿Han entendido mi reproducción de esta demostración en el pizarrón?",

- "¿Siguen mis razonamientos?",
- "¿Cómo y cuándo entienden los alumnos las demostraciones?",
- "¿Son los alumnos conscientes de la existencia de múltiples técnicas de demostración?",
- ...

Los problemas vinculados con el razonamiento lógico deben favorecer las construcciones propias, la apertura de caminos para el autoconvencimiento a través de la adquisición de la estructura de los conceptos que intervienen en la resolución de problemas y del rigor en las deducciones matemáticas. Además deben permitir la adquisición de una visión para la matemática como una ciencia en constante desarrollo y crecimiento. Los problemas planteados en el aula no corresponden, en general, a problemas de la matemática pura, pero utilizan conceptos y esquemas de ésta.

La investigación llevada a cabo

El presente trabajo se centra en el análisis de la concepción que tienen los docentes de la noción de demostración tanto desde el punto de vista científico, como su puesta en práctica dentro de la enseñanza de la matemática. Se trata de la continuación de una investigación realizada acerca de las ideas que poseen los docentes y estudiantes del último año de la carrera de profesorado de matemática. (Crespo Crespo y Ponteville, 2001 y 2002). La información fue recabada a través de cuestionarios y entrevistas a estudiantes y docentes en ejercicio tanto en el nivel medio como en el terciario y universitario. Las preguntas se orientan a analizar creencias y conocimientos acerca de la demostración, diferentes términos vinculados con ella (verdad, verificación, etc.) e importancia dentro de la matemática y su enseñanza.

Algunos resultados de la investigación realizada

Una de las primeras ideas que en la investigación que presentamos aparecen desdibujadas son las diferencias entre:

- qué es la matemática
- qué es saber matemática
- qué es aprender matemática

Sin embargo, dentro de las concepciones docentes acerca la matemática, deberían diferenciarse dos tipos de saberes: el saber matemático en sí y el saber escolar. Esta diferenciación que es clara en otros contenidos, no lo es para el caso de las demostraciones. Por ejemplo, gran cantidad de docentes tiene claramente asumida la existencia de diferencias fundamentales entre saberes conceptuales específicos (geométricos, algebraicos, analíticos, etc.), pero no reconocen los distintos niveles existentes entre qué es demostrar, qué es saber demostrar y qué es aprender a demostrar. Algunos de los encuestados, sobre todo del grupo de docentes, declaran no saber exponer claramente estas diferencias.
Casi la mitad de los docentes afirma que no hace demostraciones en clase, utilizando como justificación la falta de interés de los alumnos, el trabajo con cursos numerosos, la falta de conocimientos previos de los alumnos, la excesiva extensión de los programas y que los cursos *"ya no son como antes"*.
Con respecto al grupo de alumnos que intervinieron en la investigación, la mayoría afirman la necesidad de demostrar y de enseñar a demostrar en clase, si bien no saben especificar

cuáles son los métodos que utilizarán con este fin. Afirman que la futura práctica docente les irá dando las "herramientas y metodologías" necesarias.

Es notable que casi todos los docentes afirman que trabajan en el aula mediante la resolución de problemas y muchos de ellos hacen hincapié en la importancia de la enseñanza de técnicas de resolución de problemas. Esto denota, comparando con los resultados descriptos anteriormente, que excluyen a los problemas de deducción de la categoría de problemas.

Entre los docentes que afirman enseñar a demostrar, algunos consideran que enseñan a demostrar porque desarrollan demostraciones, dedicando mucho tiempo a explicar el método utilizado, la justificación de cada paso, la obtención de resultados parciales, etc. y pidiendo a los alumnos que reproduzcan demostraciones equivalentes. Aparece de esta manera un componente tradicional en la enseñanza: reproducir las ideas del profesor en contextos parecidos. Surge de esta manera la idea de "demostración tipo" y de la presentación a los alumnos de demostraciones que utilicen distintas estrategias clásicas, como ser las de demostraciones directas, por el absurdo, por inducción matemática o a través de la propiedad contrarrecíproca.

A pesar de que en el plan de estudios del profesorado de matemática aparece la demostración como un contenido a ser incorporado, los docentes y alumnos manifiestan no haber adquirido capacidades respecto de ese tema.

Las ideas expresadas en las encuestas, permiten ver que los docentes sienten que sus concepciones no son claras respecto de qué es demostrar, pero que pueden realizar demostraciones en el pizarrón.

En la mayor parte de los casos, se concibe al aprendizaje de la demostración como un proceso individual en el cual el alumno propone y desarrolla los pasos a seguir: interpretar el planteo, identificar las hipótesis y la tesis, buscar un método de demostración y ensayar opciones, guiado por el docente. Pocos docentes plantean que las demostraciones pueden realizarse y aprenderse en el marco de un trabajo grupal, manifestando que esta actividad ha enriquecido su propia concepción de la idea de demostración.

A modo de conclusión

Esta investigación permite concluir que la enseñanza de la demostración como contenido matemático no es siempre una problemática asumida por los docentes en forma sistemática, sino en algunos casos de manera intuitiva, tomando como modelo aquel en el que han sido formados. Los docentes diferencian la idea de hacer demostraciones y la de enseñar a demostrar, siendo esto último algo que pocos llevan a cabo en el aula.

En pocos casos se tiene en cuenta la importancia del aprendizaje colaborativo para adquirir el vocabulario matemático adecuado y necesario para desarrollar una demostración, a través de la comprensión de conceptos y argumentaciones matemáticas. Esto no significa que se logren desde el inicio, demostraciones con rigor absoluto en el aula, sino que se vayan formando cadenas deductivas con el suficiente rigor como para comprender y justificar resultados matemáticos.

La falta de presencia dentro de los planes de estudio de los profesorados y dentro de las propias planificaciones de la enseñanza de las demostraciones como contenido, hace necesaria la reflexión y abre una brecha muy importante dentro de la investigación en matemática educativa, pues muestra que la demostración, concepto central de la matemática como ciencia, no lo es en la práctica dentro de su enseñanza.

Bibliografía

Crespo Crespo, Cecilia; Ponteville, Christiane (2001). *La influencia de las concepciones de los docentes y los estudiantes acerca de la matemática en la enseñanza de esta ciencia*. Presentado en la *XXIV Reunión de Educación Matemática. Unión Matemática Argentina.* San Luis.

Crespo Crespo, Cecilia; Ponteville, Christiane (2002). *Pensar en matemática para enseñar matemática*. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. Volumen 15, Tomo 2 (pp. 1163-1168). México: Iberoamérica.

Gamut, L. T. F. (2002). *Introducción a la lógica*. Buenos Aires: EUDEBA.

Guénard, François; Lelièvre, Gilbert (Editores) (1999). *Pensar la matemática.* Barcelona: Tusquets Editores.

Ibañes, Marcelino; Ortega, Tomás (1997). *La demostración en matemáticas. Clasificación y ejemplos en el marco de la educación secundaria*. En *Educación Matemática.* Vol. 9 n°2. (pp. 65-104) México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Ministerio de Cultura y Educación. (1995) *Contenidos Básicos Comunes para la Educación General Básica*. Buenos Aires.

Santos Trigo, Luz Manuel. Mancera Martínez, Eduardo (2001). *¿Qué piensan los maestros sobre la enseñanza relacionada con resolución de problemas?*. En *Educación Matemática.* Vol. 13 n°4. (pp. 31-50) México: Grupo Editorial Iberoamérica

LA HERRAMIENTA INFORMÁTICA EN ACTIVIDADES DE MOTIVACIÓN, CONSOLIDACIÓN, REFUERZO Y/O RECUPERACIÓN DE CONOCIMIENTOS PREVIOS AL ESTUDIO DEL CÁLCULO.

Ana María Simoniello de Álvarez; Adriana A. Negri y Jorge Humberto Búsico
Universidad Nacional del Litoral, Santa Fe, Argentina
amsimoni@fce.unl.edu.ar

Resumen

Sobre la base de investigaciones que realizamos previamente acerca de los errores frecuentes de nuestros alumnos en las cuestiones de Álgebra básica, que les impiden incorporar adecuadamente conceptos del Análisis Matemático, en la cátedra de esta asignatura de la Facultad de Ciencias Económicas nos propusimos realizar diversas acciones que tiendan a modificar esa situación, con el propósito de promover que el alumno emprenda un aprendizaje eficaz del Cálculo.

Entre otras acciones planificamos un conjunto de clases previas al desarrollo de la asignatura en las que, sobre la base de materiales escritos de guía para el aprendizaje y con la incorporación del uso de la herramienta computacional, el alumno tendrá oportunidad de efectuar actividades de introducción-motivación sobre conocimientos previos, con respecto a las falencias más frecuentes que se han detectado, la cantidad y calidad de los errores que, en general, cometen con el uso de la matemática básica. Otras actividades son de consolidación y/o de refuerzo, de recuperación y/o ampliación a medida que se evalúa el avance del alumno.

El uso de la herramienta computacional, en este caso, el Programa Matemático-Informático DERIVE, tiene por objeto proporcionar al alumno un primer contacto con el mismo y aprovecharlo como recurso pedagógico en el aula, motivante y colaborador en las realización de las actividades propuestas.

Introducción

En la cátedra Análisis Matemático de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional del Litoral hemos desarrollado investigaciones oportunamente difundidas, acerca de los errores frecuentes de nuestros alumnos en las cuestiones de Álgebra básica, que observamos les impiden incorporar adecuadamente conceptos del Análisis Matemático. Esta asignatura se desarrolla en el 2do cuatrimestre del Primer año de estudios de las carreras Contador Público Nacional, Licenciatura en Administración y Licenciatura en Economía.

¿Cuál es la situación problemática?

Esperamos que nuestros alumnos conozcan y comprendan los métodos y operatorias del Análisis Matemático y aprendan su aplicación para interpretar, plantear y resolver situaciones problemáticas de las diversas ciencias involucradas en sus estudios.

Pero, ... nos encontramos con alumnos que, a nuestro criterio, nos muestran que aún no tienen práctica o no han logrado o adquirido formas de pensamiento que les permitan relacionar los conceptos previos con las nuevas cuestiones que se le presentan en el estudio del Análisis Matemático.Se ve involucrada en estas situaciones la falta de permanencia de ideas y de conocimientos algebraicos básicos en el alumno; sin ellos los nuevos aprendizajes les resultan complicados y en gran medida son motivo de frustraciones y continuos fracasos.

Diversos interrogantes orientaron nuestro trabajo, entre ellos:

¿Qué proponer y qué hacer para lograr cambios favorables cuando nos encontramos con las dificultades que, observamos, tienen los alumnos en la aplicación de conceptos previamente adquiridos?

¿Cuáles dificultades encontramos?

¿Qué debemos proponer al alumno?, y... de qué forma hacerlo? ¿Cómo lograr un aprendizaje eficaz?
¿Porqué el fracaso de cierta cantidad de nuestros alumnos en el aprendizaje de Análisis Matemático?

¿Porqué no se produce, en general, una mayor permanencia del conocimiento en el alumno?

Debemos reconocer que se presentan dificultades, en cierto aspecto debidas a la gran cantidad de alumnos en el aula (70 aprox.), con un único docente, las 6 hs. semanales durante 72 horas de un cuatrimestre. Esto dificulta, en gran medida, la posibilidad de considerar y corregir los errores de cada uno de los alumnos.

Cabe destacar que los errores más frecuentes que detectamos en los alumnos que no logran un aprendizaje eficaz son:

- incorrecta aplicación de propiedades de operaciones con números reales.
- incorrectos pasajes de términos, factores y/o divisores en igualdades o desigualdades algebraicas.
- omisión de paréntesis necesarios para la operatoria algebraica .
- deficiencia en la aplicación de leyes de la lógica matemática.
- no interpretar en forma adecuada el concepto de valor absoluto de un número real;
- dificultades en la operatoria con ciertos tipos de expresiones literales;
- para el trazado de la gráfica de una recta utilizar una tabla de valores determinando coordenadas de más de dos puntos de la recta;
- aplicación incorrecta de la fórmula resolvente de la ecuación de 2do.grado.
- incorrecto trazado de la gráfica de una función cuadrática de una variable.
- desconocer la determinación del vértice de la parábola. Considerar una tabla de valores para determinar varios puntos de la misma y unirlos de cualquier forma.
- dificultades para identificar la figura limitada por las representaciones gráficas de dos funciones de una variable.
- considerar datos a partir del esbozo de una gráfica, para efectuar cálculos, en lugar de obtenerlos a partir de la resolución de una ecuación o sistema de ecuaciones posible.
- inconvenientes en la verificación de soluciones de ecuaciones.
- aplicación incorrecta de la definición y propiedades de logaritmos.

Nos propusimos realizar diversas acciones que tiendan a modificar esa situación del alumno, con el propósito de promover que emprenda un aprendizaje eficaz del Cálculo.

Consideramos que hoy se puede acudir a la calculadora o computadora, con programas adecuados para, no sólo realizar cálculos sino verificar propiedades, controlar resultados, modificar parámetros para obtener nuevos resultados, investigar con nuevos datos, en fin, realizar una tarea de exploración en la gráficas que pueden colaborar promoviendo la reflexión y consolidación de conocimientos ya adquiridos, así como la posibilidad de afianzar la introducción de otros nuevos.

Una propuesta para el cambio

Las nuevas tecnologías han aparecido y, en general podemos afirmar que invaden nuestra vida diaria, por lo que muchos de nuestros alumnos tienen la posibilidad de manejo, aunque sea incipiente, del ordenador. Por ello pensamos que un elemento motivador para el cambio puede ser el uso de herramientas informáticas, como complemento de las clases iniciales de la asignatura.

Consideramos que, dado la forma como muestran estar preparados previamente nuestros alumnos para el aprendizaje de Análisis Matemático, puede ser útil que determinados tópicos del Álgebra básica, que no debieran ignorar, pueden ser revisados ó aprendidos en su caso, sobre la base de la utilización de un Programa Matemático-Informático, como DERIVE, que permita realizar al alumno una ejercitación adecuada que contemple diversas situaciones en el manejo de los conceptos, en forma simbólica, numérica y gráfica en algunas clases previas al desarrollo de Análisis Matemático.

Elección de la herramienta computacional: sin desconocer la existencia de otros Programas la elección de DERIVE se basa en las posibilidades que este programa ofrece, en un lenguaje que es totalmente análogo al empleado en la pizarra de las clases de Matemática. Es un Programa cuyas principales ventajas son su agilidad y rapidez, así como su equilibrio entre prestaciones, facilidad de uso y requerimiento de hardware. Posee amplias posibilidades operativas: utiliza un lenguaje natural, como el que se utiliza en el aula de Matemática habitual, ofrece la visualización permanente del trabajo del usuario, su guardado en archivo magnético e impresión en papel, opera con expresiones y relaciones aritméticas, algebraicas y trascendentes, con ecuaciones, sistemas de ecuaciones, aproximación de funciones, ecuaciones diferenciales, gráficas en dos y en tres dimensiones; permite crear, programar funciones u operadores que interesen al usuario. Ha sido incorporado a calculadoras programables a las que los alumnos tienen acceso. Ayuda a la formación de conceptos por la interrelación y retroalimentación que permiten sus posibilidades numéricas, simbólicas y gráficas. La versión DERIVE f*or Windows* favorece su uso, no sólo por la aplicación del mouse sino que se ven facilitadas las acciones con otros programas, como procesadores de texto ó de gráficos.

Consideramos importante que, para desarrollar actividades con DERIVE, el docente debe preparar guías orientadoras del trabajo, para el alumno, con ejercicios y problemas adecuados a la circunstancia.

Metodología

Las prácticas informáticas serán realizadas con la Versión 4.06 del Programa DERIVE *for Windows*. El contenido de las mismas se presentará al alumno en formato de Guías de Actividades en las que además de los temas de Álgebra que se propone abordar, se complementan con las órdenes necesarias para la utilización del Programa DERIVE en forma adecuada. Cabe destacar que no es necesario que el alumno posea conocimientos de informática para utilizar el mismo.

La Guía de Actividades está organizada en tres capítulos. En el primero se describen los menús y comandos de la ventana de Álgebra del Programa y se agrega operatoria con los mismos y cuestiones básicas de Álgebra, en especial aquellas cuestiones en las que los alumnos muestran poseer mayores dificultades. En el segundo se describe la ventana para gráficas en dos dimensiones de DERIVE y se complementa con el estudio de funciones en forma simbólica, numérica y gráfica. El tercero se dedica al estudio de funciones que particularmente son modelos de diversas situaciones problemáticas de las Ciencias Económicas.

Se programan estas actividades para cuatro clases al inicio de cada cuatrimestre, de dos horas cada una, en el aula-gabinete informático. Estas clases serán desarrolladas en forma extra-programática, en horarios diferentes a las clases de la asignatura.

Desarrollo de la propuesta

Describimos los temas a tratar en cada una de las cuatro clases correspondientes a cada iniciación del cuatrimestre lectivo.

1er. Clase: Al comenzar la clase se realiza una breve introducción al sistema operativo Windows 98 con el propósito de familiarizar al alumno con el entorno de ventanas; para que sea capaz de ejecutar la aplicación DERIVE, conozca la forma de organizar archivos y de lograr su impresión en papel. A continuación se ingresa en la ventana de Álgebra de DERIVE y se ejecutan actividades que involucran el funcionamiento del menú y de los comandos de la barra de herramientas. Una vez analizados los elementos principales del programa, se explica como editar expresiones matemáticas haciendo especial hincapié en las operaciones algebraicas fundamentales, en la sintaxis correspondiente y en la asignación de valores fijos a variables. Asimismo, se practican otras operaciones básicas que posibilita el programa, tales como mover, reenumerar, borrar, recuperar, seleccionar, copiar y/o pegar expresiones y subexpresiones, matemáticas o de texto.

2da. Clase: En la primera parte de la clase se explica la resolución de ecuaciones y de inecuaciones algebraicas, por medio de comandos del menú o de operadores especiales de DERIVE considerando también la verificación de soluciones, las respuestas del programa y la necesaria reflexión acerca del conjunto solución en cada caso; de manera similar para sistemas de ecuaciones lineales. A partir de esto los alumnos deben practicar y ejecutar las actividades que se les proponen en la correspondiente guía, las que incluyen ejercicios para interpretación, planteo, análisis de razonamientos y justificación de conclusiones.

3ra. Clase: Esta clase está dedicada al estudio de los conceptos de la topología en los espacios euclídeos de una y de dos dimensiones; funciones elementales de una variable real, dominio, imagen, expresiones simbólicas y gráficas, destacando propiedades generales. En primer lugar se explica la forma de introducir funciones con argumento, en la ventana de Álgebra de DERIVE, a efecto de poder ser evaluada para diferentes valores de la variable. Se utilizará el Operador VECTOR para detectar imágenes y construir tablas de valores. Luego se considerará el funcionamiento del menú y de los comandos de la barra de herramientas correspondientes a las ventanas de gráficos en dos dimensiones. Se explica la forma de representar gráficamente funciones u otros conjuntos de puntos en esta ventana gráfica. Se destacará que la representación gráfica de una función permite explorar para conocer, por ejemplo, los puntos en los que ésta no está definida o aquéllos en los que no se verifican determinadas propiedades. Los alumnos deberán resolver ejercicios y problemas de la Guía de actividades sobre el tema desarrollado, con características similares a las propuestas en la clase anterior.

4ta. Clase: La última clase de esta propuesta se centra en el estudio de las funciones lineal, cuadrática, logarítmica y exponencial; tiene por objeto el reconocimiento de sus características principales, en forma simbólica, numérica y gráfica. Estas funciones son las que con frecuencia en el desarrollo del Análisis Matemático se utilizarán como modelos concretos de situaciones problemáticas que refieren a las distintas ramas de las ciencias económicas involucradas en las carreras que cursan los alumnos. Los alumnos resolverán ejercicios y problemas sobre el tema.

Evaluación

Al finalizar las prácticas con DERIVE, en cada uno de los cuatrimestres, se aplicará una prueba con el ordenador para evaluar los conocimientos adquiridos por los estudiantes. La calificación de esta prueba consideramos podrá representar el 10% de la calificación global de la asignatura. Para disminuir el problema de la masificación de las clases, se dará la opción al alumno de conservar la calificación obtenida en la aprobación de esta prueba hasta que apruebe el examen final de la asignatura.

Para la realización de la prueba y con la finalidad de que no haya más de un alumno por ordenador será necesario desdoblar los grupos.

La prueba consiste en la resolución de un ejercicio similar a los que se han realizado durante las clases de prácticas con el ordenador y tiene una duración de una hora. Durante la primera media hora los alumnos resuelven el ejercicio planteado. Transcurrido este tiempo, los dos profesores presentes en el aula imprimen y guardan en un disquete cada uno de los exámenes. El examen impreso es devuelto a los alumnos para que lo firmen, siendo esta copia la que se utilizará para su calificación.

Durante la realización del ejercicio propuesto, los alumnos pueden consultar la Guía de Trabajos con DERIVE que hemos confeccionado.

Puesta en práctica: Año lectivo 2004. En principio consideramos que será posible programar la ejecución de 4 (cuatro) clases de 2hs.cada una al iniciar el cuatrimestre de desarrollo de la asignatura.

Resultados y conclusiones

La tarea emprendida ha resultado motivadora de diversas acciones en el grupo de docentes afectados a la tarea. Debe organizarse la distribución de alumnos y docentes para el mejor aprovechamiento de los espacios físicos y horarios asignados.

Estas actividades esperamos complementarlas con otras que se programarán para la finalización del desarrollo de la asignatura, en cuyo caso se aprovechará el conocimiento previo de la herramienta computacional y se espera sea útil para afianzar los conocimientos sobre Análisis Matemático, adquiridos por los alumnos durante el cursado.

El trabajo se realiza en el marco del Proyecto de Investigación de la Universidad Nacional del Litoral *"Investigación de la capacidad para incorporar desarrollos tecnológicos en el* *aprendizaje de Química y Matemática en las Facultades de Ingeniería Química y de Ciencias Económicas*", que dirigen el Ing. Pablo L'Argentiere y la Prof. Nilda Monti, en el marco del Programa: *Concentración coordinada de Investigaciones sobre la Enseñanza y el Aprendizaje Universitarios*.

Bibliografía

Anido de López, M.& Simoniello, A.M. (1995) Las herramientas CAS como motivadoras para la reflexión en la práctica docente. *Reporte de investigación en 1er.Congreso Internacional y Sexto Taller Regional sobre Informática Educativa. Santa Fe. Argentina.*

Artigue, M. et.al.(1995) . *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Grupo Edit. Iberoamérica . México.

Bixio, C. (2001). *Enseñar a aprender. Construir un espacio colectivo de enseñanza-aprendizaje*. Ed. Homo Sapiens. Rosario. Argentina.

Camilloni, A.(1998). *La evaluación de los aprendizajes en el debate didáctico contemporáneo.* Paidós Educador. Buenos Aires. Argentina.

Monereo, C.(1995) *Estrategias de enseñanza y de aprendizaje. Formación del profesorado y aplicación en el aula.* Graó. Barcelona. España.

Simoniello, A.M, Negri, A. Búsico, J. Monti, N. (2000). Indagación sobre errores algebraicos en el aprendizaje del Cálculo. *Comunicación en Segunda Conferencia Argentina de Educación Matemática.* Santa Fe. Argentina.

Simoniello, A.M. & Búsico, J. (2001). Estudio de caso sobre errores algebraicos de los estudiantes en el aprendizaje del Cálculo. *Comunicación en Decimoquinta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (Relme 15)*. Buenos Aires Argentina

JUEGO Y MATEMÁTICA ESCOLAR

Cecilia Tirapegui de Cerviño
Universidad Nacional Experimental de Guayana Venezuela
ctirapeg@telcel.net.ve

Resumen

El juego comparte características con la actividad matemática. Sin embargo, con demasiada frecuencia se lo confunde con ocio, pérdida de tiempo o actividad reñida con la escuela. Estudios psicológicos, antropológicos, sociológicos y pedagógicos del juego, entre otros: UNESCO (1980); Brunner (1986); Maturana y Volden-Zöller (1994); Reyes-Navia (1999), permiten identificar muchas de sus coincidencias con las matemáticas. En este trabajo se analizan: (a) las características del juego como actividad humana, comparándolas con las de la actividad matemática, (b) las relaciones entre juego, aprendizaje y desarrollo emocional, y (c) las características de los procesos de ejercitación en el desarrollo de las habilidades y destrezas matemáticas en educación básica y media. Se propone incluir el estudio del juego en la formación docente, para promover una cultura lúdica entre los educadores matemáticos, sin perder de vista los imperativos que la sociedad actual hace a la escuela, así como los principios del constructivismo pedagógico y la transversalidad como eje de la actividad escolar. Se presenta la experiencia de la Universidad Nacional Experimental de Guayana, UNEG, que ofrece un curso de Juegos Didácticos: futuros maestros conocen diferentes tipos de juegos, diseñan modelos para favorecer la ejercitación de conceptos, relaciones u operaciones matemáticas, desarrollando habilidades para resolver problemas. Además, ensayan sus juegos y los exponen públicamente.

Juego y vida

La vida requiere que, como individuos, desarrollemos una conciencia individual y social, vinculada a habilidades perceptuales, motrices, afectivas, lingüísticas, comunicacionales... entre otras. Uno de los motores fundamentales de este proceso, es el juego. El balbuceo del bebé o sus violentos pataleos al quitarle el pañal, son actividades que se realizan libremente, completamente imperiosas y provistas de un fin en sí mismas, están acompañadas de un sentimiento de tensión y de alegría. Estas son algunas características del juego: no requiere ser enseñado, pues actuar, lenguajear y emocionar van juntos, coordinados por el impulso vital propio del hombre.

Caillois (1958, citado por UNESCO, 1980), precisa que el juego es una actividad humana que se distingue de las otras, por ser

libre: a la que el jugador no puede ser obligado sin que el juego pierda inmediatamente su carácter de diversión atractiva y gozosa;
separada: circunscrita en límites de espacio y de tiempo precisos y fijados de antemano;
incierta: cuyo desarrollo no puede determinarse, y cuyo resultado no puede fijarse previamente, dejándose obligatoriamente a la iniciativa del jugador cierta latitud en la necesidad de inventar;
improductiva: que no crea bienes ni riqueza, ni elemento nuevo alguno; y salvo transferencias de propiedad dentro del círculo de jugadores, conducente a una situación idéntica a la del comienzo de la partida;
reglamentada: sometida a reglas convencionales que suspenden las leyes ordinarias e instauran momentáneamente una legislación nueva, única que cuenta;
ficticia: con una conciencia específica de "otra" realidad segunda o franca irrealidad en relación con la vida ordinaria.

Böhm (1985, p. 7) expresa que un niño sumergido en el juego, permite observar el bosquejo de una acción: (a) que se pone a sí misma las reglas de dicha acción y se entrega libremente en reglas que se crean jugando; (b) cuyo desenlace es incierto y por consiguiente está determinado por la audacia y el riesgo; (c) imposible de ser comparada con ninguna otra acción, pero trae algo realmente nuevo a manera de cada persona humana en su unicidad, inintercambiabilidad e irrepetitividad siempre nueva; (d) que lleva en sí misma su finalidad y no recibe su valor, desde luego, de ninguna utilidad externa ni de una función económica; (e) acompañada por la conciencia de ser distinta que la vida corriente y lleva en sí misma la experiencia de la felicidad de ser distinto entre iguales.

Uno de los componentes de todo juego, es la emoción con que los jugadores enfrentan las diferentes actividades: el goce, el disfrute que genera y que incita a compartir con el otro. Brunner (1986, p.85) afirma que el juego ofrece a los niños la oportunidad inicial más importante de atreverse a pensar, a hablar y quizá a ser ellos mismos, pero "tanto como necesitan la soledad, necesitan también combinar las propias ideas que conciben solos con las ideas que se les ocurre a los compañeros... es la esencia no sólo del juego, sino también del pensamiento".

El juego verdadero (o "verdaderamente humano", como lo llama Chateau, 1973) puede describirse como una actividad con características de riesgo, que incita a la acción a pesar de una novedad plena de sorpresas, de la incalculabilidad del tiempo y esfuerzo que requiere, entonces ¿qué tan diferente es de la actividad matemática?

Juego y matemáticas

Siguiendo el pensamiento de D'Ambrosio (1993), si ***matema*** es la acción de explicar y comprender con el fin de trascender, desenvolverse y enfrentarse a la realidad para sobrevivir y ***ticas,*** las técnicas que el hombre ha desarrollado y desarrolla constantemente para esa explicación y comprensión ¿se puede afirmar que en el juego no hay matemáticas? o que el hacer matemáticas ¿está exento de esa pulsión y libertad propias del juego?

Si lo nuevo del juego interesa por sí mismo, como nuevo, aunque no presente ningún otro carácter interesante, el niño tratará de originarlo, variando más o menos sus movimientos, repitiendo si es necesario, en una especie de experimentación cuyos resultados, imprevisibles, son una fruición sensorial que lo llena de satisfacción.
Si la creatividad está presente en cada juego infantil, con ese sentido de la belleza, esa sensibilidad estética especial… que crece cuando se comparte con "el otro" y "los otros", se disfruta tanto en ese compartir como en la actividad que genera.
Si la libertad, como principal virtud del juego, potencia las acciones y la posibilidad de hallar goce y "ganas de seguir", de ir más allá rompiendo con esquemas y patrones previstos que lo frenen.
Si el emocionar que jamás está ausente cuando jugamos, es aquello que nos identifica como "humanos" y nos impulsa a compartir con "el otro" y "los otros" así como al "hacer juntos", "disfrutar juntos" y "crear juntos", **¿por qué no se juega en nuestras aulas escolares?** ¿Por qué relegamos las actividades lúdicas al pre-escolar?... Aunque una pregunta que se pudiese formular es ¿por qué los adultos (padres, maestros, directivos escolares, comunidad en general) estudiamos tan poco al juego como actividad humana?

> Estudiosos como Huizinga, Caillois, Bruner, Maturana y Volden-Zöller, (entre otros) destacan la relación entre el juego y (a) el aprendizaje, (b) los procesos de socialización (c) habilidades y las destrezas de pensamiento, y (d) la creatividad, señalan que las actividades lúdicas infantiles se enriquecen cuando el adulto "está cerca", acompaña, interpreta, valora sus juegos. No se trata intervenir o coartar su juego, sino "estar allí", de garantizarle un ambiente estable y propicio para su actividad creadora.

Sin embargo, ¿cómo hallar "creatividad" en una clase que tenga como propósito hacer que los niños se aprendan las tablas de multiplicar, repitiendo cada combinación una y otra vez? El disfrute, aquel deseo de libertad, belleza y felicidad que persigue la actividad matemática, parecen absolutamente reñidos con la mayoría de las actividades de aprendizaje que se desarrolla en una clase de Matemáticas.

Actualmente, las habilidades matemáticas representan un importante valor social. Todos los ciudadanos requieren una alfabetización matemática que les permita explicarse el mundo en que se vive, interpretar las diversas situaciones con que se enfrenta y actuar consciente y creativamente en función de su beneficio y del de los demás. En toda la educación formal se estudian matemáticas, pero generalmente están asociadas con una actividad de aplicación de fórmulas y colecciones de cálculos alejados de la realidad, vinculada con dificultad y exactitud, sentimientos de inseguridad e impredecibilidad de éxito. Las matemáticas distan mucho de ser una actividad interesante, "emocionante", para muchos niños y jóvenes, y por qué no decirlo, para algunos docentes.

Al analizar las características de la actividad lúdica, como esa conciencia de ser de otra manera que en la vida ordinaria, ese fluir constante, ese acatamiento voluntario a normas y reglas compartidas espontáneamente, combinados con ese emocionar tan humano, ¿por qué dejarlo fuera de aula? ¿por qué desechar la posibilidad de combinar la ejercitación rutinaria de una clase de matemáticas con juegos diseñados intencionalmente para promover la actividad del alumno?

En el proceso de adquisición del conocimiento matemático, hay dos fases igualmente importantes, que no se pueden descuidar (ni disociar la una de la otra). La primera está asociada a las actividades que promueven que el aprendiz se apropie de los conceptos, relaciones o procedimientos involucrados. La segunda corresponde a la ejercitación de esos conceptos, relaciones o procedimientos, para lograr las habilidades y destrezas operatorias sin las cuales difícilmente evoluciona el conocimiento matemático. En ambas fases, la mediación del enseñante se traduce en la organización de actividades que ejecuta el aprendiz, acompañado por él y por sus compañeros. La fase de ejercitación toma más tiempo que la anterior, la fortalece favoreciendo la institucionalización del saber.

Es tarea del docente generar actividades que promuevan la adquisición del conocimiento matemático, manifestado en la observación, la organización y representación de eventos, el análisis, la toma de decisiones, la predicción, anticipación y comprensión de resultados (entre otras). Pero, estas actividades no necesariamente han de ser ingratas o neutras emocionalmente: ni las matemáticas ni la vida lo son. El juego representa una opción capaz de "envolver" tanto al docente como a los alumnos en una actividad de aula productiva y creativa.

Juego en la formación de maestros: la experiencia de la UNEG.

En la Universidad Nacional Experimental de Guayana, UNEG, desde 1994 se ofrece el curso electivo "Juegos Didácticos" entre el 7° y 9° semestre de la carrera Educación Integral, con el propósito de diseñar, confeccionar, ensayar y evaluar juegos con contenido matemático. El curso que tiene un componente teórico y uno práctico: por una parte se analizan los fundamentos del juego como actividad humana, en lo psicológico, sociológico y pedagógico, que motivan su incorporación al aula, y en lo práctico, se juega, se hace jugar analizando los procesos afectivos y cognitivos vivenciados.

Los juegos de estructura adaptable, como los que tradicionalmente se llaman "juegos de salón": bingo, dominó, memoria, rompecabezas y ponte-pilas tienen muchas posibilidades de adaptarse a la ejercitación matemática, dado que tienen una estructura conocida y requieren de un proceso de diseño con ciertas especificaciones que permiten generalizar criterios para su evaluación. Sin embargo se manejan otros juegos como los laberintos, competencias con calculadoras, juegos sin juguete, juegos de estrategia como los tipo NIM o el ajedrez africano Ayi Cui (o Mancala), siempre revisando las habilidades cognitivas, sociafectivas y gerenciales que se ponen en juego al jugar.

En todos los casos, se adapta un contenido matemático correspondiente a un grado escolar específico, se exige la presentación de un guión didáctico que contiene las siete preguntas básicas: qué es, por qué, para qué, con qué, cuándo, dónde y cómo se utilizan en el aula. Se enfatiza que se juega con el objeto de ejercitar notaciones, relaciones operaciones o propiedades matemáticas, como una práctica complementaria al proceso de aprendizaje-enseñanza de los contenidos matemáticos. El jugar en la clase de Matemáticas no puede sustituir el proceso de formalización de conceptos, relaciones o procesos.

Por otra parte, las fichas de un rompecabezas o un dominó que los niños manipulan no pueden confundirse con los materiales concretos sobre los cuales actúa el niño en su proceso personal de aproximación a los conceptos, relaciones o procedimientos estudiados. Es un aspecto que necesariamente ha de ser considerado al momento de diseñar un juego con contenido matemático.

La libertad, como principal característica del juego, la incalculabilidad e incertidumbre, así como las otras que se mencionaron al principio de este trabajo, no se negocian ni se pueden perder de vista: el ludificar la pedagogía no se puede confundir con la "pedagogización del juego" (que se popularizó en los años 70), o disfrazar de juego cualquier actividad escolar. En este proceso se requiere que el docente, como diseñador de este tipo de medio didáctico, tenga presente, así como los factores socio-afectivos asociados a la actividad de jugar.

Uno de los aspectos que se postula, es que un juego de aula debe permitir que **todos los alumnos, simultáneamente**, lo practiquen: si se trata de un rompecabezas o un dominó para cuatro participantes, debe existir ocho o nueve juegos iguales, y se evita la competitividad y señalamiento de ganadores o perdedores: lo importante es jugar, compartir con los otros, no necesariamente, ganar, siendo ésta, según la autora, una especificidad del juego didáctico.

En la propuesta que se maneja en la UNEG, se define "*experiencia de aprendizaje D.J.C"* (Tirapegui, 1997) como un conjunto de acciones que se proponen al educando en una clase de Matemática para que *descubran* (**D)** como practicar un juego de contenido matemático, *jueguen* (**J**) y posteriormente *compartan* (**C**) sus impresiones con sus compañeros. Las tres fases de esta experiencia se detallan a continuación:

D (descubriendo) Los alumnos manipulan los elementos del juego (fichas, cartones, barajas, tableros u otros) y se promueve una discusión para describir dichos elementos, familiarizarse con ellos, identificar las relaciones que intervienen y descubrir la forma en que se desarrollará la actividad (asociando fichas, ubicándolas en un tablero, arrojando un dado, armando formas, marcando o respondiendo a una determinada señal. Fruto de esta discusión, los niños identifican el contenido curricular que se ejercitará, y establecen las reglas del juego.
J (jugando) Los niños juegan, mientras tanto, el docente observa y participa sólo para proporcionar alguna ayuda u orientación específica. En ocasiones, es recomendable que él sea un jugador más, incorporándose en cierto grupo. Esta etapa proporciona la satisfacción de "actuar" por parte del alumno, y una retroalimentación al docente que puede darse cuenta de cómo se van desarrollando las habilidades de los niños, qué aspectos de la instrucción deben reforzarse, y qué alumnos manifiestan algún problema de tipo funcional o socioafectivo que limita o dificulta la interacción normal con sus compañeros. Así, está en mejores condiciones para buscar correctivos.
C (Compartiendo) Al terminar el juego (haya o no haya ganadores) se promueve una discusión a través de la cual los jugadores comparten sus impresiones con respecto a la actividad y comparan las estrategias que se fijaron quienes, en su participación individual o grupal, culminaron exitosamente la partida. Este compartir promueve el descubrimiento de generalidades y constancias entre los elementos y operaciones involucradas, y el desarrollo de habilidades y destrezas, tanto numéricas como cognoscitivas y metacognoscitivas. Se procura que exista una retroalimentación crítica de cuánto se ha aprendido y cuánto se debe practicar para tener mejor dominio de las relaciones u operaciones ejercitadas. Esta fase de la experiencia D.J.C. es la más importante.

Los cursantes de la asignatura "Juegos Didácticos" diseñan y confeccionan cinco juegos de estructura adaptable, con contenido matemático, para ser practicados por los 32 o 36 alumnos de un curso de educación básica, con sus respectivos guiones didácticos. La evaluación incluye el reporte del ensayo de uno de los juegos diseñados. Además, se efectúa una exposición pública de los juegos producidos en el curso, cuya promoción está a cargo de los participantes.

Un aspecto interesante, que resulta como valor agregado, es el siguiente: durante el curso, al examinar las colecciones de ejercicios que diseñan los maestros en formación, para ser incorporados a las estructuras de los juegos, se detectan diferentes niveles de dificultad, o irregular presencia de los números con que se ejemplifican las relaciones u operaciones, propiciando su análisis y corrección (siempre en forma lúdica) en la misma clase. En ocasiones, se manifiestan concepciones inadecuadas de conceptos, algunos errores en los ejemplos elegidos o representaciones que no favorecen la actividad del alumno. Entonces, se generan discusiones que dan lugar a la toma de conciencia del participante del curso de Juegos Didácticos, de la importancia que tiene la planificación y precisión de las actividades que se proponen a los alumnos, para que "hagan" matemáticas. Estas situaciones no siempre afloran en una clase de didáctica o de matemáticas.

Por último, tanto en el ensayo de los juegos en aulas, que se debe reportar como evaluación del curso de Juegos Didácticos, como en la exposición pública, se tiene oportunidad de modelar actividades que favorecen la actividad del alumno de educación básica y media, permitiendo vivenciar, en contextos diferentes de los habituales, relaciones u operaciones matemáticas y, lo más importante, que ejercitando actividades matemáticas es posible emocionarse, disfrutar, sentirse bien y quedar con ganas de seguir haciéndolo.

La historia de la humanidad ha seguido y sigue el curso del emocionar, y en particular el curso de los deseos, y no el de la disponibilidad de recursos naturales, o el curso de las oportunidades o el curso de las ideas, valores y símbolos, como si éstos existieran como tales en sí mismos. Humberto Maturana y Gerda Verden-Zöller. (1994).

Bibliografía

Böhm, W. (1985) Antro*pología y educación*. Universidad de Córdoba, Mimeo.

Brunner, J. (1986) Juego, pensamiento y lenguaje. *Perspectivas, Revista Trimestral de Educación Nº 57*, Vol. XVI (1). París: UNESCO.

Chateau, J. (1973). *Psicología de los Juegos Infantiles*. Kapeluz, Buenos Aires.

D'ambrosio, U. (1993) *Etnociencias. Enseñanza de la Matemática (Parte 2).Vol.1 Nº 3.* ASOVEMAT, Maturín.

Huizinga, H. (2001). *Homo Ludens*. Madrid: Alianza.

Maturana, H. y Verden-Zöller, G. (1994). *Amor y juego. Fundamentos olvidados de lo Humano*. Santiago de Chile: Instituto de Terapia Cognitiva

Reyes-Navia, R. (1999). *El Juego Procesos de Desarrollo y Socialización. Contribución de la Psicología*. Bogotá: Magisterio.

Tirapegui, C. (1997). Propuesta de experiencia de aprendizaje y un modelo de guión didáctico. *Memorias del Segundo Congreso venezolano de Educación Matemática, II COVEM*. Valencia: ASOVEMAT.

UNESCO. (1980). El Niño y el juego. Planteamientos Teóricos y Aplicaciones Pedagógicas. *Estudios y Documentos en Educación Nº 34*. París: autor

INNOVACIÓN EN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA PARA LA CARRERA DE PSICOLOGÍA EN LA UNIVERSIDAD DE VIÑA DEL MAR

Roberto C. Doniez Soro, Marco A. Rosales Riady.
Universidad de Viña del Mar, Chile
rdoniez@uvm.cl, m_a_rosales@123mail.cl

Resumen

Nos proponemos dar a conocer un proyecto de innovación docente, que están realizando el Departamento de Matemática y la Escuela de Psicología. El proyecto apunta al diseño, implementación y experimentación de estrategias de enseñanza y aprendizaje, sustentadas en la Ingeniería Didáctica, en los Cambios de Registros, la Visualización y uso de Nuevas Tecnologías, en una asignatura de Matemática para los alumnos de la Carrera de Psicología. Se propone un cambio curricular que acentúe lo formativo y diminuya el carácter instrumental de la asignatura, de tal manera de lograr que los estudiantes adquieran habilidades y desarrollen capacidades en las que utilicen estrategias metacognitivas en la resolución de problemas. La asignatura considera dos sesiones semanales, cátedra y taller. Los contenidos se estructuran en tres módulos didácticos (Razonamiento Matemático, Triángulo de Pascal y Funcionalidad), cada uno con una palabra clave: Método Científico, Algoritmo y Modelo. El sistema de evaluación consistente en trabajos grupales (por módulo) denominados "Proyectos por Módulo" y un examen individual final. Los ajustes y modificaciones que incorpora la réplica de esta asignatura, nacieron de las observaciones propuestas tanto por los alumnos y los profesores de la asignatura piloto, como por profesores de asignaturas en que la matemática es prerrequisito.

Antecedentes

Esta asignatura comenzó a dictarse el año 1997 y mantuvo su carácter instrumental hasta el año 2001. A fines de ese año la dirección de la Carrera le solicita al Departamento de Matemática un cambio curricular en la asignatura. Entonces un grupo de profesores comienza a diseñar el cambio curricular requerido, que terminará por acentuar el carácter formativo por sobre el instrumental, de manera que los estudiantes finalmente adquieran las competencias necesarias para la resolución de problemas basados en los contenidos matemáticos de la Enseñanza Media.

Objetivos

Las siguientes intenciones didácticas estructuran este cambio curricular:

a. Diseñar e implementar un nuevo curso para la Carrera de Psicología, ante los requerimientos de la Dirección de la Carrera.
b. Propiciar el cambio curricular que acentúe lo formativo y disminuya el carácter instrumental de la asignatura.
c. Diseñar, implementar y experimentar estrategias de enseñanza y aprendizaje a través de la resolución de problemas, sustentadas en: Ingeniería Didáctica, Cambios de Registro, Visualización y uso de Nuevas Tecnologías.
d. Generar las instancias para que los estudiantes adquieran habilidades y desarrollen sus capacidades metacognitivas en la resolución de problemas, de manera que éstas les permitan un mejor desempeño en sus estudios superiores.

Elementos para conformar un Marco Teórico

En nuestra propuesta docente hemos considerado:

- La Ingeniería Didáctica y sus fases como metodología de Investigación ya que permite estudiar las diversas interacciones dentro de la sala de clase, tales como: los procesos de aprendizaje de los alumnos, los procesos paramatemáticos utilizados por ellos (argumentación, demostración, justificación...) y las estrategias didácticas globales (resolución de problemas en forma grupal, debate).
- La Visualización, pues ella es una herramienta muy útil a la hora de resolver los problemas propuestos, teniendo en cuenta que nuestros estudiantes poseen un escaso dominio formal en Matemática, pero un hábito en la práctica visual.
- Los Cambios de Registros de Representación, a través de los cuales los estudiantes aprenden a valorar la diversidad de estrategias que tienen para resolver un problema planteado, dando cuenta así de la riqueza del problema. Creemos que así los estudiantes mejorarán y desarrollarán más aún sus habilidades y capacidades cognitivas, al interior de cada uno de sus proyectos educativos.
- El uso de Nuevas Tecnologías en la elaboración y defensa de los Proyectos: Word, Excel, PowerPoint e Internet.
- Todo esto dentro del Modelo Aproximativo, que está centrado en la construcción del saber por el alumno. Donde el profesor propone y organiza una serie de situaciones con distintos obstáculos (variables didácticas dentro de estas situaciones), organiza las diferentes fases (acción, formulación, validación, institucionalización), organiza la comunicación dentro de la clase, propone en el momento adecuado los elementos convencionales del saber (notaciones, terminología, etc.). Donde el alumno ensaya busca, propone soluciones, las confronta con las de sus compañeros, las defiende o las discute y el saber es considerado con su lógica propia.

Estructura de la Asignatura

La asignatura ha contemplado una extensión normal de 16 semanas, con una sesión de cátedra y otra de taller. Los contenidos se han separado en tres Módulos Didácticos cada uno asociado con una palabra clave que lo orienta: Razonamiento Matemático –Método Científico, Triángulo de Pascal – Algoritmo y Funcionalidad – Modelo, cada uno con una duración de 4 semanas, con 4 sesiones de cátedra, 4 de taller y un Proyecto que intenta ser una actividad abarcadora que incluya aspectos transversales.

- A propósito de las Sesiones de Cátedra: Cada sesión de cátedra está dividida en: a) un conjunto de citas para reflexionar grupalmente (se espera interactividad: profesor-alumno y alumno-alumno), b) un conjunto de problemas de pensamiento lateral para resolver grupalmente, c) un pequeño diccionario matemático de conceptos, notaciones y nomenclaturas a la manera de notas históricas y de núcleo y d) un conjunto de problemas para el trabajo del profesor, en los que se revisan conceptos, notaciones, teoremas y métodos, y las palabras claves del módulo.
- A propósito de las Sesiones de Taller: En ellas se trabaja en grupos (de 3 o 4 integrantes) una Hoja de Trabajo (1 por sesión) dividida en dos partes: una para ser abordada en el aula (4 problemas) y otra para extender el trabajo más allá del aula (2 problemas). Cada sesión comienza con una revisión de los problemas no abordados en la sesión anterior. Se pide que cada alumno lleve una carpeta de registro de los problemas discutidos y resueltos. La semana que se recogen los Proyectos, el taller está

dedicado a la defensa oral del proyecto correspondiente, por algunos grupos seleccionados al azar.

- A propósito de los Proyectos por Módulos: Deben realizar tres Proyectos, cada uno de los cuales considera aspectos de forma, contenido y evaluación.
- Aspectos Formales: Cada Proyecto se entrega para ser resuelto grupalmente, ciñéndose a pautas preestablecidas y dentro de un tiempo máximo de dos semanas.
- Aspectos de Contenido: Cada proyecto consiste de 7 items separados en dos partes. Los tres primeros referidos a: citas, pensamiento lateral y la palabra clave. La palabra clave supone cierta familiaridad con Internet (búsqueda de temas, selección y síntesis de ideas). Los 4 problemas restantes más "matemáticos" en su planteamiento y resolución, han sido elegidos en concordancia a la palabra clave. Los de la Primera Unidad Didáctica son problemas de razonamiento con énfasis en el Método Científico: lectura del enunciado, separación de hipótesis, nominación de variables, desarrollo, resultados o soluciones, verificación. Los problemas de la Segunda Unidad tienen como objeto de estudio el Triángulo de Pascal, permiten entender el concepto de Algoritmo (proceso finito que se desarrolla por pasos y tiene como objetivo resolver un problema determinado). Los de la Tercera Unidad se basan en los conceptos de correspondencia y funcionalidad (permiten revisar los conceptos de proporcionalidad, porcentaje y escalas) vinculados con el concepto de Modelo (fundamental en la Ciencia Contemporánea). Se han privilegiado aquellos problemas que pueden abordarse a través de varios caminos (explicación literal, usando esquemas de pensamiento lateral, tablas aritméticas, trabajo algebraico, visualización, construcción material). También se ha pensado elegir aquellos que admitan respuestas múltiples.
- Aspectos Evaluativos: La nota de cada Proyecto resulta de la ponderación de varias notas. 20% en Formalidades, 60% en Desarrollo del Proyecto y un 20% en Auto y Co-Evaluación, indicadas en las columnas A, B y C de la matriz, y la nota del proyecto está dada por la fórmula: $N = A \times 0,2 + B \times 0,6 + C \times 0,2$
-

		G	1	1	1	1	1	2	7	A	4	4	4	4	4	4	4	28	B	C	N
1	Mena Luisa	1																			
2	Páis Ana	1																			
	↓																				
25	Urbina Fabila	7																			
26	Welte Hugo	7																			
			Fecha entrega	Carpeta Plastificada	Papel carta	Todo en disco	Formato Word	Ortografía y redacción	Puntos	Nota formalidades	Problema 1	Problema 2	Problema 3	Problema 4	Problema 5	Problema 6	Problema 7	Puntos	Nota Problemas	Auto y co-evaluación	Nota Proyecto

Para cada una de las la asignaciones de nota se utilizó la norma dada por:

$$N = \begin{cases} \dfrac{3P}{C} + 1 & \text{si} \quad 0 \leq P \leq C \\[2ex] \dfrac{3(T-P)}{T-C} + 4 & \text{si} \quad C \leq P \leq T \end{cases}$$

T puntaje total **P** puntaje obtenido **C** puntaje mínimo de aprobación **N** nota obtenida

- Para la auto-evaluación y co-evaluación de los proyectos grupales los estudiantes tuvieron que completar la siguiente tabla:

Los 5 primeros items son evaluados individualmente, siendo lo más honestos posible. Los restantes integrantes del grupo asignan a conciencia una nota por el desempeño global del que falta en el items 6. Las Notas de la Auto-evaluación (N1), Co-evaluación (N2) y Nota Final (N) se obtienen aplicando las fórmulas:

Participantes→ Items ↓	Nombres			
	Mena Luis	Páis Ana		
1. Mi nivel de compromiso				
2. Mi aporte de ideas				
3. Mi grado de iniciativa				
4. Mi capacidad de trabajo				
5. Mi grado de participación				
6. La nota que mis compañeros me asignan				
La **Nota final de auto y co-evaluación** que obtengo es				

$$N_1 = \frac{Item1 + \cdots + Item5}{5} \qquad N_2 = Item6 \qquad \boxed{N = \frac{N_1 + N_2}{2}}$$

- A propósito de las Actividades Transversales: Para articular los módulos se programaron (año 2002) tres muestras de video, seleccionados de una colección donada por el Instituto Cultural de Francia a nuestro Departamento, con motivo del "Año Mundial de la Matemática", relacionados con la Ciencia (matemática, física, astronomía, biología, medio ambiente,...). En la actual réplica se presentó otro de contenido matemático-científico (cuestiones didácticas desarrolladas en El Palacio del Descubrimiento, Paris-Francia y además un Diaporama que mostraban aspectos matemáticos de la calle (suelos y paredes de la Ciudad de Viña del Mar).
- A propósito de la Evaluación de la Asignatura: La nota de presentación a examen, corresponde al promedio aritmético de las notas de los tres proyectos y la defensa oral de un proyecto. La nota final: 70% de la nota de presentación y 30% del examen. La escala es de 1.0 a 7.0 con nota mínima de aprobación 4.0.
- A propósito de la Administración de la Asignatura: Esta asignatura contó en su versión piloto con el trabajo de tres profesores. Uno a cargo de las 2 sesiones de cátedra (una por paralelo) y otros dos a cargo de los talleres (cada paralelo se dividía en dos grupos de taller). La última versión contó con dos profesores, uno a cargo de una sesión de cátedra y una de taller y otro con una sesión de Taller.

Problemas en el corazón de la asignatura

Problema significa eso que obstruye el camino, el o los obstáculos, aquello que se ha arrojado delante (pro: delante y blema: acción de arrojar). Un problema es una situación frente a la cual no podemos menos que adoptar una actitud; esta actitud puede consistir en alguna de las siguientes opciones entre otras: dar marcha atrás y desandar el camino, buscar alguna forma de rodearlo, cambiando de rumbo o eligiendo alguna ruta alternativa, y enfrentar el obstáculo y buscar la forma de removerlo del camino, o de dejar la ruta despejada para poder proseguir. Esta asignatura se ha diseñado de tal manera que la Resolución de Problemas se aloje en una zona principal: su corazón. Los problemas planteados son muchos y han sido presentados en 4 distintos contextos: cátedras, talleres, proyectos y evaluaciones de manera de cumplir distintos objetivos.
Entre los contenidos y criterios que se consideraron en la selección de problemas:

1. Elementos matemáticos en juego:
   - Elementos de Lógica Elemental.

- Aritmética y Álgebra básicas: números naturales, enteros y racionales (fracciones, decimales, porcentajes, probabilidad,...); potencias y raíces; ecuaciones y sistemas de ecuaciones de grado 1 y 2.
- El Triángulo de Pascal: Números figurados, sucesiones, progresiones, binomio de Newton, combinatoria, probabilidad, geometría fractal (conceptos, imágenes: Copo de Nieve y Triángulo de Sierpinski).Teoremas de la Geometría (Thales y Pitágoras)
- Correspondencia y Función: ejemplos de la vida real, proporcionalidad y conversión de medidas y monedas, lectura y construcción de gráficos a partir de textos.

2. Formas de pensamiento: Se ha incentivado el uso del Pensamiento Lateral como una alternativa al llamado pensamiento lógico-vertical y de manera de complementar los razonamientos deductivos e inductivos (Intento y Error).
3. Uso de Tablas (Word y/o Excel) como herramienta: Incentivo del uso de tablas para manejar la información generada al abordar la solución de un problema.
4. Visualización como herramienta: Incentivo del uso de la Visualización (esquemas, dibujos, monos, gráficos, tablas,...) para avanzar en la solución de un problema. Uso de árboles, diagramas de Euler-Venn.
5. Construcción de material concreto (manipulación): Incentivo para la construcción de material concreto que guarde relación con alguna abstracción matemática del curso. (cuerpos geométricos que dan cuenta de un cubo de binomio, mapa plano para el pintado de un cubo con tres colores, construcción de dos juegos de Tangram siguiendo Escalas dadas, ...).
6. Tipo de problemas: Se incorporaron problemas donde fuera posible el uso de varias estrategias de resolución asociados a distintos tipos de saberes. Se incluyeron problemas que tuvieran varias respuestas posibles.
7. Uso de Internet: Asociado al trabajo con los problemas aparece el uso de Internet. Se espera que los estudiantes puedan buscar, seleccionar y sintetizar material relacionado con preguntas acerca de las palabras claves.

Acerca del Control durante la asignatura

El sistema evaluativo partió considerando sólo tres Proyectos grupales y un Examen individual, sin embargo acercándose al tercer proyecto (ultimo tercio de la asignatura) y notando cierto abandono, cierta relajación en los estudiantes, se pensó en introducir un instrumento que los obligara a revisar cuestiones ya vistas. Se realizó entonces un control evaluativo de tres preguntas relacionadas con los dos proyectos anteriores. Esta evaluación (que en general no tuvo muy buenos resultados) finalmente se vinculó al tercer proyecto y lo que se hizo fue hacer participar la nota del control con un 15% en la nota final del Proyecto 3.

Comentarios de algunos resultados de la experimentación en el aula

En general mostraron un mayor dominio de estrategias deductivas que inductivas. La estrategia de intento y error fue muy utilizada en problemas vinculados a visualización con una o varias soluciones. Les interesó aquellos problemas donde se estimularan las estrategias laterales. Los estudiantes no supieron hacer uso de tablas para ordenar las soluciones en algunos problemas. En los problemas de trabajo algebraico continuaron mostrando algunas dificultades propias de Enseñanza Media: (prioridad de operaciones, uso de paréntesis, etc.). Esto se hace patente porque evitan el trabajo algebraico recurriendo a una estrategia informal. Reconocieron en el uso de árboles una buena estrategia visual de resolución de algunos problemas. De los teoremas clásicos la mayoría conocía el Teorema de Pitágoras y pocos el Teorema de Thales. En aquellos problemas que conduce al planteo de sistemas de ecuaciones (2 ecuaciones con 2 variables y 2 ecuaciones con 3 variables) reconocieron que algunos de ellos al menos es posible resolverlo sin usar conocimientos de sistemas de ecuaciones. Esto les permitió comparar los dos caminos. La introducción del Triángulo de Pascal permitió estar en el cruce de varias ideas matemáticas importantes: Números Figurados, Binomio de Newton, Combinatoria, Probabilidades, Geometría Fractal, perímetros y áreas, idea de algoritmo, iteraciones, búsqueda de patrones numéricos, sucesiones y progresiones... por lo que expandieron sus conocimientos. Diferenciaron los conceptos de Correspondencia y de Función. Sacaron ejemplos de la vida real e hicieron análisis cualitativos y cuantitativos de situaciones gráficas. Manejaron el concepto de proporcionalidad en diferentes situaciones.

Proyecciones de la experiencia

Dentro de las proyecciones inmediatas podríamos nombrar:

1. Renovación del Banco de Problemas: Modificar, Incorporar y Diseñar, ciñéndose al Marco Teórico actual.Incorporación de un Control escrito individual después de cada Proyecto con problemas relacionados tanto con él como con los talleres del módulo, de modo de optimizar el Sistema de Control General de la asignatura. La nota final de cada proyecto así incorporará además la nota de control, quedando el Proyecto en un 80% y el control en un 20%. La nota de presentación se obtiene del promedio aritmético de los tres proyectos y de la defensa de éstos.Réplica de la Asignatura en otras carreras de la Universidad, por ejemplo Sociología, e incorporarla en el currículo de otras carreras como en Arquitectura, Diseño y Bachillerato en Humanidades,....

Retroalimentación

Los ajustes y modificaciones que incorpora la actual réplica de esta asignatura, nacieron de las observaciones propuestas tanto por los alumnos y los profesores de la asignatura piloto, como por profesores de asignaturas en que la matemática es prerrequisito. Es así como al término del curso 2002 se aplicaron dos instrumentos, uno de evaluación a los estudiantes y otro de seguimiento al profesor de la asignatura de Lógica, que le sigue en la malla curricular. Esta réplica también considera ambas evaluaciones retroalimentadoras, las que se realizarán a mediados del segundo semestre, de modo de validar la información recogida.

Referencias bibliográficas:

Artigue, M. (1995). *Ingeniería Didáctica*. En Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., Gómez, P. (Ed.), Ingeniería Didáctica en Matemática (pp. 33-59). México: Una Empresa Docente & Grupo Editorial Iberoamérica.

Charnay, R. (1994). Aprender (por medio de) la resolución de problemas. En Parra, C., Saiz, I. (Eds.), *Didáctica de Matemáticas* (pp. 51-63). Buenos Aires: Editorial Paidós.

Cruz, C. (1998). El Uso de Estrategias Metacognitivas en la Enseñanza de la Matemática. En Sociedad Chilena de Educación Matemática, *Ventana para el Desarrollo de la Educación Matemática* (pp.235-254) Santiago: Sociedad Chilena de Educación Matemática.

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En Hitt, F. (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 173-201) México: Grupo Editorial Iberoamérica.

González, H. (1998). Practiquemos el Descubrimiento Guiado Inductivo. En Sociedad Chilena de Educación Matemática, *Ventana para el Desarrollo de la Educación Matemática* (pp.71-110) Santiago: Sociedad Chilena de Educación Matemática.

Mineduc (1999). *Internet, un nuevo recurso para la Educación*. Santiago de Chile.

Oteiza, F. (1998). Generación de Estándares en Educación. En Sociedad Chilena de Educación Matemática, *Ventana para el Desarrollo de la Educación Matemática* (pp.171-205) Santiago: Sociedad Chilena de Educación Matemática.

Pluvinage, F. (1998). Los objetos Matemáticos en la adquisición del razonamiento. En Hitt, F. (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp.1-15) México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Universidad Católica de Valparaíso-Mineduc (2001). *Aplicaciones de la informática educativa en el curriculum escolar*. Viña del Mar: Universidad Católica de Valparaíso

FUNCIONES EMBOTELLADAS

Edison De Faria Campos
Universidad de Costa Rica
edefaria@cariari.ucr.ac.cr

Resumen

Esta es una propuesta didáctica que consta de una serie de actividades relacionadas con la representación gráfica de ciertas funciones y su vinculación con una representación en un contexto físico o icónico (dibujo de un recipiente). Las actividades son de dos tipos: Dadas las formas de los recipientes, bosquejar las gráficas correspondientes, teniendo en cuenta que la variable independiente es la altura del líquido y la variable dependiente es el área de la superficie del líquido (o bien el volumen del líquido dentro del recipiente); dadas las gráficas del área de la superficie del líquido versus altura, bosquejar los posibles recipientes correspondientes. Ambas actividades son diseñadas para propiciar el cambio de un sistema de representación a otro (Janvier, 1987; Duval, 1992, 1999; Hitt, 1992).

Introducción

En 1985 el Shell Centre for Mathematical Education (1990) publicó el módulo “El lenguaje de las funciones y gráficas” con un gran número de actividades para realizar en el aula. Estas actividades, ideadas principalmente por Claude Janvier, proponen el desarrollo de la capacidad de interpretar y usar la información proporcionada por las representaciones gráficas, pues según Janvier, muchos estudiantes están familiarizados con dichas representaciones, pero son incapaces de extraer la información global que contienen. Es así que Janvier (1987) justifica la importancia en las posibles “traducciones” entre cuatro modos de representación de la función de acuerdo al cuadro abajo:

Representación	Gráfica	Tabular	Analítica	Verbal
Gráfica	Reelaboración de la gráfica	Estimación de valores de las variables	Elección de una familia verosímil	Interpretación de la gráfica
Tabular	Representación cartesiana de puntos	Reelaboración de la tabla	Realización de un ajuste	Interpretación y análisis de datos
Analítica	Representación gráfica	Cálculo de valores particulares de la fórmula	Manipulación algebraica o analítica de la fórmula	Identificación y análisis de la fórmula
Verbal	Construcción de un esbozo	Comparación de valores de las variables	Elaboración de un modelo funcional	Discusión y reflexión

Investigaciones realizadas por Duval (1992) reportan que en estudios en donde se presente un enunciado en el cual están en juego varios sistemas de representación, es importante analizar las articulaciones que hay de un sistema a otro.

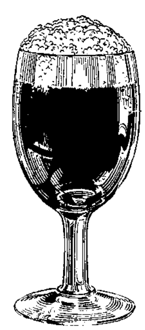
Las posibilidades de traducciones entre los distintos sistemas de representaciones llevaron a Janvier a idear varias actividades en las que se prima la utilización de distintos modos de representación de la función y el paso de un modo de representación a otro. Una de las actividades se denominó curvas de llenado y consistía en solicitar a los estudiantes que hicieran un esbozo de una curva que expresara como varía con el tiempo, la altura del líquido contenido en cada una de las botellas, cuando las mismas son llenadas a caudal constante.

El problema inverso también es importante, es decir, dibujar un posible recipiente que corresponda a una gráfica dada tiempo-altura, y fue investigado por Hitt (1992) en México. En este artículo propongo algunas actividades relacionadas con curvas de llenado y el problema inverso, que pueden ser aplicadas tanto a estudiantes de la educación secundaria como a estudiantes universitarios en un primer curso de cálculo. De esta forma realizamos conversiones entre diferentes registros de representaciones, Duval (1992,1999), Janvier (1987).

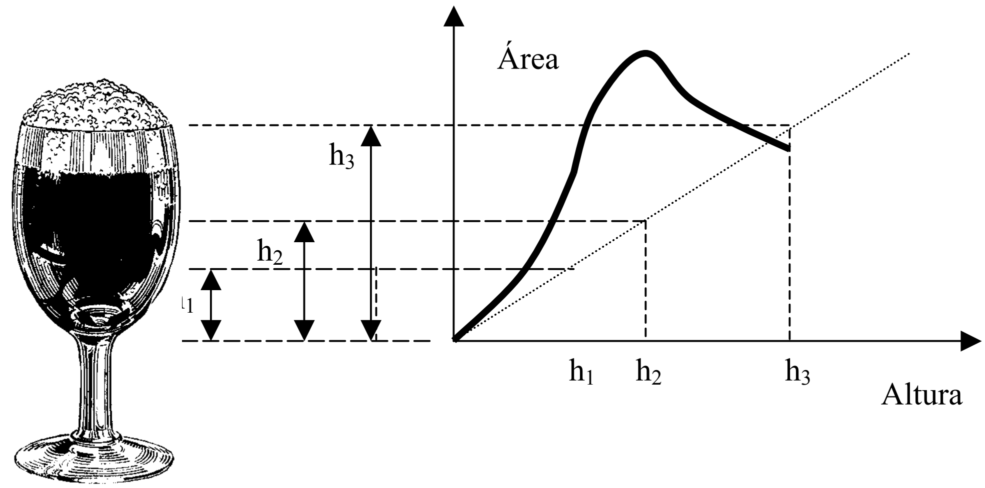
Considero que este tipo de actividad presenta una ventaja adicional: permite visualizar el comportamiento global de la gráfica de una función dado su modelo físico o icónico, o bien el modelo del recipiente, dado la representación gráfica de elementos del mismo. Sabemos que el límite o la derivada de una función en un punto dado son propiedades locales de la función, mientras que la integral definida proporciona una comprensión más global de una función. Ambos comportamientos, local y global, permiten que tengamos una mayor comprensión del objeto de estudio, las funciones.

Actividad 1: Esbozar las gráficas correspondientes a llenado de recipientes
Objetivo: Pasar de la representación física a la representación gráfica

Ejemplo: El recipiente abajo (una copa) se encuentra inicialmente vacío, sobre una superficie horizontal plana. Empezamos a llenarlo despacio (sin inclinarlo) de tal forma que la superficie del líquido siempre se encuentre en equilibrio y coincida con la sección transversal del recipiente. Bosquejar una posible gráfica que corresponda al llenado de la copa, si la variable independiente es la altura del líquido y la dependiente es el área de la superficie del líquido.

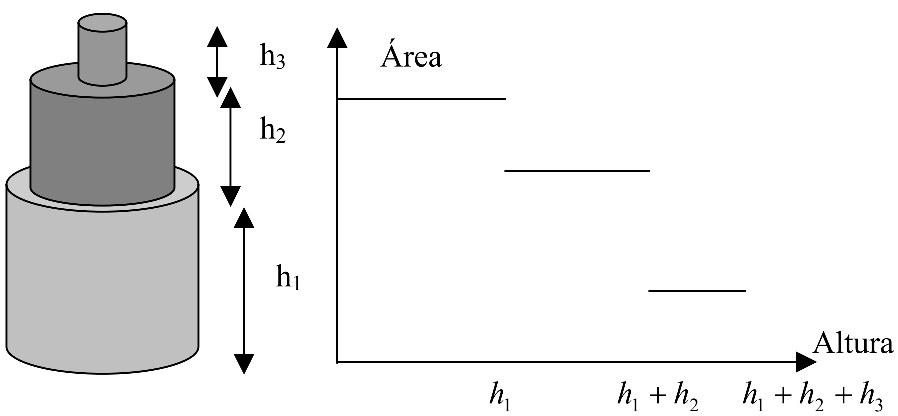


En este caso, el área inicial es igual a cero (recipiente vacío). Cuando introducimos el líquido, el área de la superficie – con forma aproximadamente circular – aumenta con la altura, inicialmente de manera muy pronunciada, posteriormente más despacio, hasta llegar a un valor máximo. A partir de la altura correspondiente al área máxima, el área empieza a disminuirse lentamente hasta alcanzar un valor límite, correspondiente a la copa llena de líquido. Por lo tanto una posible representación gráfica que corresponde a la figura dada es la siguiente:



El área máxima corresponde a la altura h_2, mientras que a la altura h_1 corresponde un punto de inflexión. Aquí no utilizo ninguna escala para los ejes coordenados, por no conocer las dimensiones reales de la copa, pero para facilitar la ubicación de las alturas dibujé una recta que supuestamente corresponde a la gráfica de ecuación $y = x$.

En este ejemplo se supone que la forma de la copa es "suave" en el sentido de que las curvas resultantes son continuas, pero podemos diseñar recipientes cuyas gráficas corresponden a funciones discontinuas, como la siguiente botella:



De esta forma podemos asociar gráficas – correspondientes al registro de representaciones gráficas de funciones – a la actividad de llenado de botellas (objetos físicos). Esto me llevó a sugerir el nombre de la actividad como "funciones embotelladas".

Las siguientes actividades fueron aplicadas a un grupo de 25 estudiantes de enseñanza de matemática de la Universidad de Costa Rica, videograbadas y analizadas con todo el grupo.

Problema: Dadas las formas de los siguientes recipientes (no aparecen en este artículo debido a la falta de espacio), bosquejar las gráficas correspondientes, teniendo en cuenta que la variable independiente es la altura del líquido y la variable dependiente es el área de la superficie del líquido.

Actividad 2: Esbozar las gráficas correspondientes a llenado de recipientes
Objetivo: Pasar de la representación física a la representación gráfica

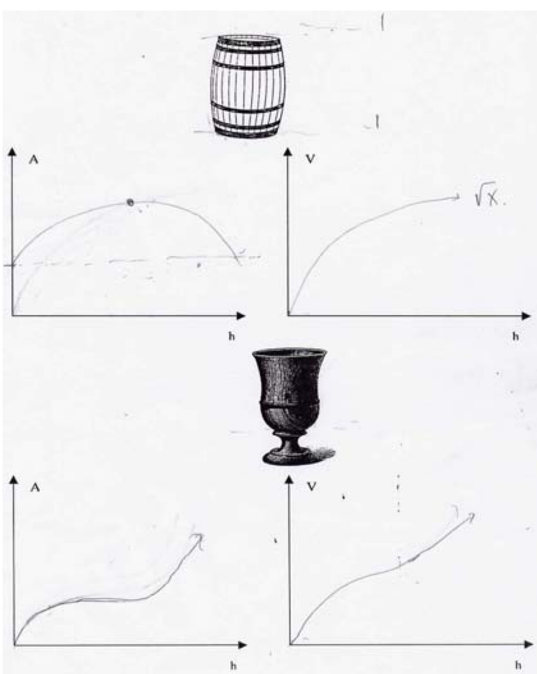
Problema: Para los recipientes de la actividad 1, esbozar las gráficas correspondientes, si la variable independiente es la altura y la variable dependiente es el volumen del líquido dentro del recipiente.

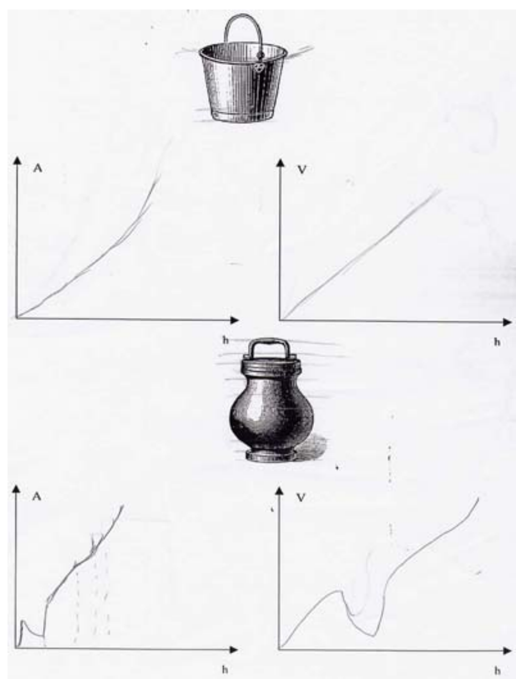
La última actividad corresponde al problema inverso, es decir, dibujar posibles recipientes que correspondan a gráficas dadas. En todas las representaciones gráficas la variable dependiente corresponde al área de la superficie del líquido dentro del recipiente, mientras que la variable independiente corresponde a la altura del líquido. Para las gráficas dadas, ¿existirá algún recipiente que sea imposible de construir?

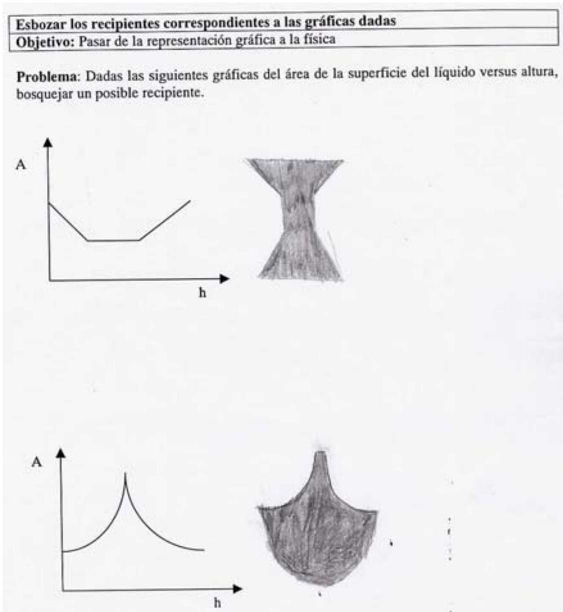
Actividad 3: Esbozar los recipientes correspondientes a las gráficas dadas
Objetivo: Pasar de la representación gráfica a la física

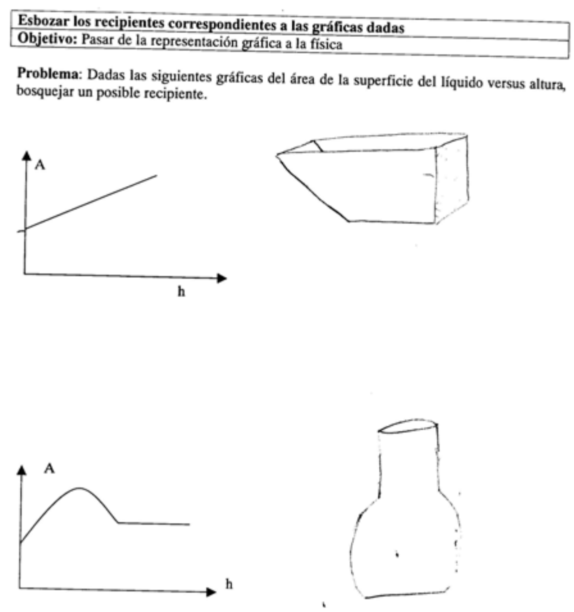
Problema: Dadas las gráficas del área de la superficie del líquido versus altura (no aparecen debido a la falta de espacio), bosquejar los recipientes correspondientes.

A seguir exhibo algunas muestras de las soluciones presentador los y las estudiantes.









Es interesante observar que varios estudiantes intentan seguir la forma de la gráfica cuando esbozan el recipiente. Además pierden la proporción entre los valores del área cuando realizan la conversión entre la representación gráfica y la icónica. Otro hecho curioso es que en algunos casos existe la tendencia a buscar la representación algebraica para la función, como en la primera figura $V = \sqrt{x}$ (en todo caso debería ser $V = \sqrt{h}$). Es posible que esta sea la representación más utilizada por los docentes cuando desarrollan el tema de funciones.

Conclusiones

Estoy plenamente de acuerdo con la afirmación de Kaput (1992) de que los sistemas de representaciones son un aspecto central de la comprensión del sujeto acerca de los objetos matemáticos y sus relaciones y de las actividades matemáticas que éste ejecuta cuando realiza tareas que tienen que ver con esos objetos. Actividades como las propuestas en este artículo son significativas para los estudiantes por su conexión con situaciones de la vida real y permiten que el docente utilice materiales concretos (recipientes reales) con el fin de que los estudiantes y las estudiantes exterioricen las distintas representaciones mentales que poseen de un determinado concepto mediante diagramas, esbozos de curvas, frases y símbolos. Además, este tipo de actividad abre nuevas posibilidades para que el sujeto pueda tener una comprensión global de la gráfica de una función, y puede ser fuente de inspiración para que docentes y estudiantes puedan trabajar juntos en la construcción significativa del conocimiento matemático.

Una pregunta que sería importante investigar y que se relaciona con las actividades realizadas es: ¿Cómo podríamos utilizar la tecnología digital – calculadoras graficadoras o computadoras – para simular el llenado de recipientes con formas conocidas, y construir las representaciones gráficas correspondientes?, ¿Podemos modelar las ecuaciones - representación algebraica - que representan el llenado de recipientes?

Referencias

Duval, R. (1992) *Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitive de la pensée*. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives. IREM Strasbourg.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y Aprendizajes intelectuales*. Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía & Grupo de Educación Matemática. *Trad*. Myriam Vega Restrepo. Colombia.

Hitt, F. (1992). *Dificultades en el paso de una representación gráfica a un contexto real y viceversa. Evasión de representaciones analíticas*. Memorias del IV Simposio Internacional sobre investigación en Educación Matemática. CINVESTAV-IPN, Departamento de Matemática Educativa.

Janvier, C. (1987). *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J. (1992). 'Technology and Mathematics Education' en D. A. Grouws (ed), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, N.Y.: Macmillan.

Shell Centre (1990). *El lenguaje de funciones y gráficas*. Ministerio de Educación y Ciencia. Centro de Publicaciones. Servicio Editorial Universidad del País Vasco, Bilbao.

FORMACIÓN DE PROFESORES EN LA TRANSICIÓN ARITMÉTICA AL ÁLGEBRA

Neila Sanchez, Fernando Guerrero
U. Distrital Fco. José de Caldas, Bogotá, Colombia
neila4@starmedia.com, nfguerrero@hotmail.com

Resumen
En el marco de investigar en el aula la comprensión de la variable -por el alumnado de básica- en su tránsito de la aritmética al álgebra, para el caso de los estudiantes para profesor de la licenciatura en educación básica, se propone y fundamenta un curso "Transición aritmética al álgebra para formadores de/y profesores de básica" en el ámbito de la resolución de problemas, bajo la metodología de análisis de situaciones didácticas con relación a los conceptos asociados a la transición aritmética al álgebra: ámbitos de interpretación de la letra; de los sistemas de numeración; de los sistemas de numeración posicional; del contexto aritmético de referencia y de las representaciones asociadas a la variable como objeto matemático. Las temáticas que se propone abordar en el curso son: estructuras aditivas; estructuras multiplicativas; variación y número; concepciones de álgebra. El marco de fundamentación teórico gira en torno a la conceptualización de lo que es y puede ser el fomento del desarrollo del pensamiento numérico y algebraíco a partir de las investigaciones llevadas a cabo por el grupo Pretexto de la Universidad Distrital y las investigaciones llevadas a cabo por Kucheman, Collis, Vergnaud, Kieran, Usiski entre otros. Se consideran en el marco de discusión a la propuesta de curso, la epistemología de la transición aritmética al álgebra, los problemas didácticos vinculados y las prácticas usuales de los profesores.

Antecedentes de la propuesta

Justificación. Las concepciones que un Estudiante para Profesor (EPP) ha desarrollado durante su proceso de formación en la escuela han generado formas de actuación que posteriormente caracterizan sus roles y acciones profesionales y se convierten en generador /obstáculo de nuevas construcciones de conocimiento o de acciones de transformación, así como de las posibilidades de investigar y reflexionar sobre su desempeño profesional. Por lo anterior, el análisis de cómo fue él enseñado, la reflexión sobre las producciones de los niños y adolescentes con relación a sus concepciones iniciales, la indagación de cómo se aprende la noción de variable en contextos matemáticos (aritméticos y algebraicos) en la escuela, además de los roles del profesor en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, son problemas que deben ser tematizados (indagados, investigados, reflexionados, develados y transformados) a profundidad en la formación de un EPP, pues de ello dependerá la reflexión crítica sobre su práctica pedagógica y el desarrollo de su pensamiento práctico como futuro profesor de matemáticas de la educación básica.

Formulación del problema. Cuando nos preocupa como abordar la enseñanza de alguna noción matemática en la educación básica hacemos en nuestra mente un inventario de estrategias metodológicas y didácticas y buscamos ayuda en los libros de Didáctica de la Matemática. Intentamos con ello construir explicaciones y soluciones a lo que creemos que genera dificultad de aprendizaje en los alumnos, porque pensamos que *algo pasa* con ellos cuando por ejemplo, confunden un procedimiento, dan respuestas erróneas o no pueden explicar lo que hicieron. Pese a esa primera aproximación siempre retornamos a nuestra experiencia como el principal modo de dar respuesta a ese tipo de situaciones inquietantes. Tomar conciencia de esta realidad nos ha ayudado a comprender que en la práctica pedagógica en el aula necesitamos investigar sobre la cognición matemática de nuestros alumnos, sobre sus características personales y los ámbitos concretos que facilitan su desarrollo. Asimismo nos enfrentamos con varios problemas relativos al conocimiento práctico[1] de los profesores de educación básica. ¿Cual es la relación que ellos establecen entre el conocimiento matemático a enseñar, el conocimiento matemático que aprendieron en su proceso de formación como profesores y el conocimiento matemático de sus alumnos? ¿Qué saben los profesores sobre las capacidades matemáticas de alumnos y sus procesos de pensamiento, en particular el pensamiento numérico y variacional? Asimismo nos preguntamos por la utilidad que ellos le dan al conocimiento práctico y el lugar que ocupa en el currículo de la formación inicial de profesores. Finalmente consideramos la necesidad de conceptualizar acerca de qué tipo o tipos de conocimientos deben poseer los estudiantes para profesor (EPP) cuando interactúan con sus alumnos en el aula. Surge entonces la pregunta abarcadora:

> ¿Cuál es el tipo de formación que con relación al razonamiento pedagógico y conocimiento practico debe desarrollar el EPP para gestionar democráticamente la enseñanza y aprendizaje del tránsito de la aritmética al álgebra escolar?

Marco teórico de la propuesta del curso "Transición aritmética al álgebra para formadores de/y profesores de básica"

Referente curricular el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos[1]. Proponer el inicio y desarrollo del pensamiento variacional como uno de los logros para alcanzar en la educación básica, presupone superar la enseñanza de contenidos matemáticos fragmentados y compartimentalizados, para ubicarse en el dominio de un campo conceptual, que involucra conceptos y procedimientos interestructurados y vinculados que permitan analizar, organizar y modelar matemáticamente situaciones y problemas tanto de la actividad práctica del hombre, como de las ciencias y las propiamente matemáticas donde la variación se encuentre como sustrato de ellas. Los conceptos, procedimientos y métodos que involucra la variación en la búsqueda de las interrelaciones permiten identificar algunos de los núcleos conceptuales matemáticos en los que está involucrada:

- Continuo numérico, reales, en su interior los procesos infinitos, su tendencia, aproximaciones sucesivas, divisibilidad;
- la función como dependencia y modelos de función;
- las magnitudes;
- el álgebra en su sentido simbólico, liberada de su significación geométrica, particularmente la noción y significado de la variable es determinante en este campo;
- modelos matemáticos de tipos de variación: aditiva, multiplicativa, variación para medir el cambio absoluto y para medir el cambio relativo. La proporcionalidad cobra especial significado.

Entendemos por conocimiento practico del profesor aquel conocimiento que pone en juego con respecto a lo que él sabe sobre las matemáticas escolares, del como la aprendieron y acerca del como se enseña.

[1] Esta conceptualizacion se ha tomado como una cita de los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998) sin ninguna modificación dada su importancia para la comprensión y análisis del problema, pues sitúa la discusión sobre el deber ser desde un currículo centrado en los conocimientos básicos que todo alumno de básica y media debe alcanzar para desarrollar su pensamiento variacional.

La transición aritmética al álgebra. En general, el trabajo sobre álgebra escolar desarrollado en las aulas gira en torno a los siguientes temas: Conjuntos numéricos (números reales), variables, simplificación de expresiones algebraicas y resolución de ecuaciones. Ahora bien, a partir de los estudios realizados en el contexto colombiano pudo determinarse que las dificultades de los estudiantes -que son manifestaciones de los problemas- en relación con el trabajo algebraico coinciden, en gran parte, con las reportadas en otros trabajos investigativos[2], las cuales, según Kieran (1989) pueden clasificarse en tanto estén relacionadas con:

- El cambio de convenciones respecto del referente aritmético,
- La interpretación de las letras y
- El reconocimiento y uso de estructuras.

Algunos resultados de investigaciones que dan cuenta de las dificultades encontradas al cambiar las convenciones en la notación, respecto del referente aritmético que traen los estudiantes, y, de manera especifica, los relacionados con las interpretaciones que estos hacen de la letra en contextos matemáticos dicen relación con: m*arco aritmético de referencia;* dificultad que tienen los estudiantes para aceptar la falta de cierre, por ejemplo, aceptar como respuesta la expresión abierta a+b que induce a escribir a+b = ab e incluso 2+3a= 5a ; el *dilema proceso-producto*, el cual podría estar relacionada también con la interpretación del signo "=" como una orden de operar y con la dificultad para aceptar la *relación de igualdad* como una *relación de equivalencia; necesidad de* tematizar el hecho de requerir de *unidades variables* (por ej., para sumar 2 con 1/3, se toma como unidad de medida 1/3, también lo serian 1/6, 1/9... mientras que para sumar 2 con ¾ se toma ¼ como unidad de medida, y para sumar 2/3 con ¾ se toma como unidad de medida 1/12).

Interpretación de las letras: un primer acercamiento

Cuando se inicia el trabajo escolar en álgebra, al parecer, como se encontró manifestación a partir del estudio referido, no se hace referencia explicita, o no se hace énfasis, en que conjunto se está trabajando, pues se espera que, *vistos* ya los conjuntos numéricos, el estudiante no solo esté en capacidad de *manejarlos*, sino de asimilar que, en el que se esta trabajando es el más amplio posible: el conjunto de los números reales, como posiblemente lo *asume* el profesor, sin verificar si entre las significaciones de los estudiantes *aparece* esta noción. Similarmente, cuando se trabaja con letras, se *asume* también una interpretación adecuada por parte de los estudiantes de lo que ellas significan en el contexto mencionado.

Las letras aparecen, en general, ligadas a expresiones sintácticas que adquieren sentido en estructuras definidas a partir de relaciones como "igual que", "menor que", y de acuerdo con las interpretaciones que los muchachos tengan tanto de estas relaciones, como de los símbolos que las representan. Resulta conveniente resaltar, en particular, la importancia que tiene para el aprendizaje del álgebra, superar la interpretación del signo igual como orden de operar, si se quiere acceder a una interpretación de la letra que, además de ser representación de numero, considere el tipo (en este caso el conjunto numérico) al que ella pertenece, es decir, tanto su universo numérico como las relaciones que le dan a el estructura (algebraica, en este caso); y en relación con esto, tanto superar, en palabras de Matz y Davis(1980), el *dilema proceso-producto,* como aceptar lo que Collis(1975) llama

[2] Entre otras dificultades, podemos mencionar las relacionadas con el manejo de los universos numéricos y los procesos de simbolización. Para un análisis mas detallado ver: Grupo Pretexto(1999). Transición aritmética al álgebra. Bogotá: Gaia. 2ª Edición

aceptación de la falta de cierre[3]. *Reconocimiento y uso de estructuras* Después del trabajo con letras, particularmente orientado al uso de estas como representantes de números, se empieza a operar con ellas en el contexto de las expresiones algebraicas. Kieran (1989) reporta investigaciones relacionadas con la posibilidad de una aproximación geométrica para dar sentido a las dichas expresiones y descubrir obstáculos cognitivos asociados con esa aproximación; estas investigaciones sugieren que la construcción del sentido de tales expresiones no lleva necesariamente al desarrollo espontáneo de sentido para la simplificación de expresiones algebraicas. Sobre el particular, reporta investigaciones relacionadas con el conocimiento estructural que tienen los estudiantes de dichas expresiones, evidenciando a partir de los procesos que ellos usan para simplificarlas, y plantea que las dificultades de los estudiantes en la asimilación de la estructura de las expresiones algebraicas[4] influyen en su trabajo con ecuaciones.

La investigación sobre el proceso de aprender a enseñar: el conocimiento de los profesores en formación en la transición aritmética al álgebra. Si hay un tema que haya surgido con fuerza en los últimos cuatro años, y que haya obligado a replantear los estudios sobre las prácticas de enseñanza, seguramente que nos refiramos a las investigaciones que en torno al amplio descriptor de *aprender a enseñar* se han venido desarrollando. Enraizadas en lo que denominó el paradigma de "Pensamiento del Profesor", la investigación sobre *aprender a enseñar* ha ido evolucionando hacia la indagación de los procesos por los cuales los profesores generan conocimiento, además de qué tipos de conocimientos adquieren (Carter, 1990). *Conocimiento Didáctico del Contenido.* Los estudios en la línea del proceso de aprender a enseñar (Marcelo, 1993) se han centrado en tres grupos. En *primer lugar* los estudios sobre el *procesamiento de información y comparación expertos-principiantes* cuyo foco de atención ha sido los procesos mentales que los profesores llevan a cabo cuando identifican problemas, atienden aspectos del ambiente de la clase, elaboran planes, toman decisiones, y evalúan (Martínez Ruiz, 1991).
Una segunda línea de investigación se centra en el estudio sobre el *Conocimiento Práctico* de los profesores que "*se refiere de forma amplia al conocimiento que poseen los profesores sobre las situaciones de clase y los dilemas prácticos que se les plantean para llevar a cabo metas educativas en estas situaciones*" (Carter, 1990: 299). En relación a esta línea de investigación, Calderhead (1991) ha revisado las investigaciones en las que se aborda en desarrollo del conocimiento durante las prácticas de enseñanza, mostrando que los alumnos en prácticas poseen un conocimiento inicial acerca de la enseñanza, en la medida que han tenido experiencias con niños en clases. Además, afirma que el conocimiento que poseen los alumnos en prácticas puede que no sea el más adecuado para la enseñanza, ya que las investigaciones muestran que los alumnos en prácticas pueden poseer concepciones erróneas o basadas en modelos de enseñanza transmisivos. Estas concepciones pueden impedir que los profesores en formación adquieran conocimientos más sofisticados sobre la enseñanza, y que predomine lo que Doyle y Ponder (1977) denominaron la *ética de lo práctico*. Las investigaciones realizadas muestran que el conocimiento de los profesores en formación está asociado a situaciones de la práctica,

---

[3] Autores citados por Kieran(1989). Ibid.p.25.

[4] Reporta una investigación de Greeno(1982), según la cual el desempeño de los estudiantes novatos en álgebra parecía ser bastante al azar, por lo menos en un momento. Sus procedimientos contenían múltiples errores, que indicaban una carencia de conocimiento acerca de las características estructurales del álgebra. Por ejemplo, podían simplificar $4(6x - 3y) + 5x$ como $4(6x-3y+5y)$ en un intento, pero hacer algo diferente en otra ocasión. Ibid, p.25.

aunque las relaciones entre pensamiento y práctica sean aun poco claras y conocidas. Sí se ha mostrado que puede darse contradicción entre las teorías expuestas y las teorías implícitas, y que el cambio en el conocimiento de los profesores en formación no necesariamente conduce a cambios en su práctica. Por último, en orden cronológico Carter sitúa las investigaciones sobre *Conocimiento Didáctico del Contenido*, para referirse a aquéllos estudios en los que se analiza específicamente el conocimiento que los profesores poseen respecto al contenido que enseñan, así como -y esto es muy importante-, la forma en que los profesores trasladan ese conocimiento a un tipo de enseñanza que produzca comprensión en los alumnos. Como se puede observar, el cambio que se viene produciendo en la investigación sobre el "Pensamientos del Profesor" es hacia una investigación más comprometida con los contenidos que enseñan los profesores (Marcelo, 1993).

Creencias, imágenes y el proceso de socialización durante las prácticas. Junto o paralelamente a la investigación sobre el conocimiento de los profesores tanto en formación como en ejercicio, se han venido desarrollando trabajos que se han centrado en el análisis de las *creencias e imágenes* que los profesores en formación traen consigo cuando inician su formación. Pajares (1992) ha llamado la atención a la dispersión semántica que ha caracterizado estas investigaciones, en las que se han utilizado términos como: creencia, actitud, valores, juicios, axiomas, opiniones, ideología, percepciones, concepciones, sistema conceptual, preconcepciones, disposiciones, teorías implícitas, teorías explícitas, teorías personales, procesos mentales internos, reglas de la práctica, principios prácticos, etc. Desde esta diferenciación, las investigaciones sobre prácticas de enseñanza han venido mostrando que "*los profesores en formación entran en el programa de formación con creencias personales acerca de la enseñanza, con imágenes de buen profesor, imagen de sí mismos como profesores y la memoria de sí mismos como alumnos. Estas creencias e imágenes personales generalmente permanecen sin cambios a lo largo del programa de formación y acompaña a los profesores durante sus prácticas de enseñanza*" (Kagan, 1992:142).

El desarrollo de la reflexión durante las prácticas de enseñanza. Uno de los principales esfuerzos de las investigaciones sobre reflexión ha consistido en desarrollar instrumentos, escalas y o taxonomías para verificar y evaluar los cambios en los niveles reflexivos por parte de profesores, bien en formación o en ejercicio. Una de las clasificaciones más difundida corresponde a la desarrollada por Van Manen, que Zeichner y Liston (1985) aplicaron al análisis del discurso supervisor diferenciando entre discurso prudencial, factual, justificatorio y crítico. Otro programa de formación del profesorado basado en la reflexión es el denominado CITE (*Collaboration for the Improvement of Teacher Education*) que incluye prácticas de campo estructuradas, microenseñanza, diarios y tareas escritas para promover la capacidad de análisis, de formulación de preguntas y de reflexión en los profesores en formación. Para evaluar el desarrollo de la reflexividad de los profesores en formación elaboraron una taxonomía que incluye las siguientes categorías: 1) no descripción; 2) descripción simple; 3) denominación de sucesos a través de conceptos pedagógicos; 4) explicación utilizando solamente la tradición o las preferencias personales; 5) explicación utilizando principios pedagógicos; 6) explicación utilizando principios pedagógicos y el contexto; y 7) explicación con consideraciones éticas/morales. En la evaluación del programa los profesores en formación sólo alcanzaron el nivel 6 (Sparks-Langer y Colton, 1991). En general, las investigaciones que se desarrollan dentro de este ámbito toman la reflexividad como variable dependiente, analizando los cambios que se producen como consecuencia de programas completos, o bien de elementos programáticos más específicos, como pueden ser la redacción de casos, los diarios, la biografía, los registros pedagógicos, etc.

Descripción del curso "Transición aritmética al álgebra para formadores de/y profesores de básica"

Propósito del curso. En la perspectiva pedagógica que hemos asumido (compleja, constructiva y crítica) desde el contexto del aula como instancia de realización privilegiada del profesor, y dado que el espacio de formación de la práctica pedagógica es el eje articulador del currículo (documento CNA), proponemos un curso tendiente a: develar y transformar las concepciones e imágenes que sobre el hacer práctico del profesor, son asumidas por los EPPs; que concrete acciones curriculares conducentes a la formación de un profesor investigador en el aula; develar, analizar, investigar y transformar las tradicionales acciones y prácticas del profesor de matemáticas –las más de las veces segregadoras y generadoras de violencia- de manera que conviertan al profesor en un generador y gestionador de/en aulas democráticas; en particular un curso que permita el análisis, desde el aula de clase, del proceso de paso del aritmética al álgebra con alumnos de educación básica.

Objetivos del curso. En contextos concretos de aulas de educación básica, para el profesor universitario:

- Identificar, las concepciones, imágenes y representaciones que han construido los EPPs, del profesor de matemáticas, de cómo aprenden los niños los objetos matemáticos de fracción, igualdad y procesos de generalización y simbolización, y de los roles del profesor en el aula, en situaciones didácticas relativas a los objetos matemáticos mencionados.
- Identificar, analizar e indagar la red de relaciones e interacciones que se dan en el aula, de manera que se pueda tener miradas e interpretaciones de los "hechos de clase" más complejas, cuando los actores de dichas situaciones e interacciones trabajan con los objetos matemáticos.
- Estudiar enfoques de investigación y realizar actividades conducentes a la formación de un profesor investigador en el aula, con el análisis e indagación de instrumentos, de perspectivas de investigación en el aula.

Para el estudiante para profesor:

- Analizar a partir de la aplicación de instrumentos de indagación (fracciones, signo igual, interpretaciones de la letra; procesos de generalización y simbolización; universos numéricos) como aprenden los niños y jóvenes en las aulas a dar significado a los objetos matemáticos de la transición aritmética al álgebra.
- Analizar como se transforman sus prácticas pedagógicas cuando reflexiona sobre los tipos de conocimiento que pone en juego para resolver problemas de la profesión vinculados con la transición aritmética al álgebra.
- Analizar cambios en sus concepciones sobre el sentido de la profesión, del paso del aritmética al álgebra.

Ejes temáticos de referencia en el curso

- Indagación sobre el papel que juegan las representaciones cognitivas en la construcción del significado de numero racional (fracciones y números relativos) por parte de los alumnos de educación básica.
- Indagación sobre el uso de algoritmos mentales por parte de los niños en el proceso de resolución de problemas aditivos y multiplicativos en el universo numérico de los racionales.
- Indagación sobre formas de trabajo en el aula vinculadas a la comprensión de la variable y del pensamiento variacional del alumno de educación básica.
- Indagación sobre la enseñanza de la variable en el presente y el pasado y el lugar que esta ocupa en los currículos en la transición del aritmética al álgebra.
- Introducción al análisis y aplicación de instrumentos de observación, de recolección y análisis de información con relación a la variable en contextos matemáticos en el aula.
- Introducción a la discusión de algunas perspectivas y enfoques de investigación social y educativa que respaldan los instrumentos de indagación y observación
- Indagación sobre las concepciones propias sobre el profesor y la enseñabilidad, sobre el profesor como potenciador de aprendizaje en relación con los alumnos de educación básica, y sobre los roles del profesor como gestionador de aulas democráticas
- Indagación sobre las acciones del profesor que le permiten instaurarse como constructor de sociedad civil y de la comunidad de educadores matemáticos
- Análisis de las acciones del alumno de educación básica como potenciador y valorador de sí mismo y de los otros en sus dimensiones éticas y estéticas en el aula de clase y como miembro de una comunidad educativa
- Análisis e indagación de los elementos de la situación didáctica (alumno, maestro y saber) como potenciadores de aulas democráticas y no segregadoras

Tipo de evaluación para el curso

Se asume como un proceso formativo y participativo; hace parte de las concepciones que se pretender desarrollar, potenciar y/o transformar. Se define tres modalidades de evaluación: la *evaluación dirigida* que realizan sus profesores a sus EPPs; la *auto evaluación* que consiste en valoraciones personales acerca de sus procesos de formación; y la *coevaluacion* que son las valoraciones sociales de la producción de sus pares.

Criterios e indicadores de evaluación. *Indicadores de procesos. Relación de equivalencia*

- *Reconocimiento:* Identificar dificultades de aprendizaje y realizar análisis sobre la Relación de equivalencia y orden en diferentes contextos aritméticos y algebraicos de niños y jóvenes a partir de la aplicación de instrumentos de indagación y según autores.
- *Interpretación:* Dadas las descripciones de varios contextos aritméticos y algebraicos desde situaciones de aula o casos caracterizarlos a partir de la relación de equivalencia y orden.
- *Aplicación:* Diseñar talleres para niños y jóvenes en contextos escolares sobre significados de la relación de equivalencia en diferentes contextos. Analizar dificultades.

Fracciones

- *Reconocimiento:* Identificar dificultades y realizar análisis sobre el proceso de aprendizaje de las fracciones en contextos continuos y discretos en su interpretación como Parte-todo a partir de la aplicación de distintos instrumentos y según autores.
- *Interpretación:* Dadas varias descripciones sobre situaciones de aula y casos, en contextos matemáticos, caracterizar la fracción.
- *Aplicación:* Diseñar talleres para niños y jóvenes en contextos escolares sobre la fracción desde sus distintas interpretaciones. Analizar dificultades.

Procesos de generalización y simbolización

- *Reconocimiento:* Identificar dificultades y realizar análisis sobre los procesos de generalización y simbolización en contextos aritméticos y algebraicos que realizan los niños y jóvenes a partir de la aplicación de instrumentos de indagación y según autores.
- *Interpretación:* Dadas varias descripciones de tareas sobre procesos de generalización y simbolización descritas en casos de investigación o situaciones de aula identificar usos e interpretaciones de la letra, estructuras algebraicas, modelos.
- *Aplicación:* Diseñar talleres para niños y jóvenes en contextos escolares sobre procesos de generalización y simbolización. Analizar dificultades.

Bibliografía

Porlan, R. (1991). *El diario del profesor*. Sevilla: Ed. Diada

Grupo Matemáticas Escolares (1999). *La enseñanza de la aritmética escolar y la formación del profesor.* Universidad Distrital. Bogota:Gaia.

Bonilla, M. et al. (1999). *Como enseñamos la aritmética*. Bogotá: IDEP.

Castaño, J. (Mayo, 1996). La matemática en preescolar y básica primaria. En: Revista *Educación y cultura*, Bogotá, No 40.

Mesa, O. (Mayo, 1996). La evaluación del concepto de número. En Revista *Educación y cultura*, Bogotá # 40

Bonilla, M. y Sánchez, N. (1999). La investigación en el aula. En: *Serie Matemáticas escolares*. *Matemáticas asistidas por computador*. Bogotá, Universidad Distrital.

Grupo Matemáticas Escolares Universidad Distrital (1999). *Resolución de problemas aritméticos en la primaria*. SED Cundinamarca, Bogotá, 1999.

Soccas, M. y otros. (1986). Iniciación al álgebra. Colección Matemáticas: Cultura y Aprendizaje. Ed. Síntesis.

García, M. (1989). *Investigaciones sobre prácticas de enseñanza en los últimos años*. Tomado del sitio www.grupoideas.es.

GRUPO PRETEXTO (1999). *Transición aritmética al álgebra*. Bogota: Gaia.

Informe de Investigación (1996). *La variable como problema puntual: búsqueda de causas en grado octavo*. Colciencias-UD.Bogotá

FACTOREO DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS: UNA INNOVACIÓN EN SU ENSEÑANZA

María Rey Genicio; Graciela Lazarte; Clarisa Hernández y Silvia Forcinito
Universidad Nacional de Jujuy, Argentina
tresm@imagine.com.ar

Resumen

La propuesta didáctica que se presenta se sostiene en un Proyecto de Investigación que busca el desarrollo de estrategias innovadoras en la enseñanza de la matemática. Se apoya en una concepción de aprendizaje constructivo y significativo que adopta la «Ingeniería Didáctica» (Artigue, M. 1996), como metodología para la investigación. Ésta se sustenta en un conjunto de secuencias de clases concebidas y organizadas para efectuar un proyecto de aprendizaje que, una vez experimentado, es contrastado con los análisis a priori a fin de validar las hipótesis planteadas. Pretende brindar al profesor un material estructurado en forma clara, precisa y amena, elaborado con todos los elementos que consideramos necesarios para ser un instrumento eficaz para la enseñanza de Factoreo. Fue diseñado, no como algo prescriptivo sino, como una reflexión sobre la "buena receta", es decir, para que oriente el análisis y los criterios de acción, discuta y exprese los supuestos y permita al docente decidir entre alternativas y comprobar resultados (DAVINI, 1997, pag 132). Históricamente, la enseñanza de Factoreo de Expresiones Algebraicas ha presentado grandes dificultades. A nuestro criterio esto obedece a una enseñanza basada en la memorización y el mecanicismo. Es por ello que nos propusimos su abordaje a través de una serie de actividades mediante las cuales los alumnos podrán construir el concepto de factoreo, ya que se les propone una mayor implicación y razonamiento que en las propuestas tradicionales de enseñanza. En el desarrollo de las actividades se ha utilizado con frecuencia el marco geométrico, como una forma de darle mayor significación al concepto. Además de innovarse en la gestión de la clase por la formación de grupos de trabajo en los que los alumnos construyen el conocimiento y por la recuperación de sus saberes para la institucionalización de los conceptos, se han diseñado también una variedad de juegos que superan la ejercitación tradicional.

Consideraciones sobre la propuesta

En el marco de la investigación Estrategias Innovadoras en la Enseñanza de la Matemática en el Nivel Medio se ha desarrollado una propuesta didáctica para abordar el tema: Factoreo de Expresiones Algebraicas. Esta investigación se nutre teóricamente de los aportes de la psicología del aprendizaje y de la didáctica de la matemática. Sintetizamos a continuación los aportes más relevantes de cada una.

De la fuente psicológica tomamos las teorías cognitivas que entienden que el aprendizaje efectivo requiere participación activa del estudiante en la construcción del conocimiento, ya que este proceso está mediado por procesos de pensamiento, de comprensión y de dotación de significado. Entonces la actividad de los alumnos es base fundamental para el aprendizaje mientras que la acción del docente es aportar las ayudas necesarias, estableciendo esquemas básicos sobre los cuales explorar, observar, y reconstruir conocimientos. En esos esquemas se articulan la información (aportada por el docente, los textos, los materiales y los alumnos) con las acciones cognitivas de los sujetos.

Se toma también el concepto de Interacción Socio−Cognitiva: la cognición humana óptima se lleva a cabo con la colaboración de otras personas y de objetos físicos y simbólicos que potencian las capacidades individuales. Así los procesos grupales de construcción de conocimientos se constituyen en medios altamente eficaces para el logro de un aprendizaje significativo, aunque en ellos se hace necesaria una intervención del docente cuidadosa, optimizando las actividades, facilitando los intercambios cognitivos, supervisando recuperando oportunamente lo producido en cada grupo, y logrando la reorganización final de los conocimientos. Complementariamente, desde la didáctica de la matemática, en la "Teoría de las situaciones" de Brousseau, el rol del docente consiste en organizar la secuencia de problemas que entregará a los alumnos de modo que éstos la acepten y se responsabilicen por encontrar la solución, y debe ser la misma situación la que permita al alumno juzgar el resultado de su trabajo. Una vez que los alumnos hayan encontrado al menos alguna solución o soluciones parciales procederá a la "institucionalización" en la que dará un estatuto cultural a las producciones de los alumnos, desprendiéndolas de todo aquello que sea irrelevante.

Por otra parte, de la fuente didáctica general tomamos el concepto de estrategia didáctica de Bixio: conjunto de las acciones que realiza el docente con clara y conciente intencionalidad pedagógica, o sea, de lograr un aprendizaje en el alumno. Algunos de sus componentes son el estilo de enseñanza, la estructura comunicativa de la clase, el modo de presentar los contenidos, las consignas, los objetivos y su intencionalidad, la relación entre materiales y actividades, los criterios de evaluación, etc. Las estrategias deben apoyarse en las construcciones de sentido previas de los alumnos (significatividad), orientar la construcción de conocimientos a partir de materiales adecuados y ser factibles de desarrollarse en el tiempo planificado, con la cantidad de alumnos con que se cuenta y con la carga horaria destinada.

Ya en el campo de la didáctica de la matemática, la propuesta se apoya en la «ingeniería didáctica» (Douady, 1996): elaboración de un conjunto de secuencias de clases concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo para efectuar un proyecto de aprendizaje. En los análisis preliminares se tuvieron en cuenta las dificultades y los errores más frecuentes de estos aprendizajes, las prácticas habituales para el tratamiento de este tema y los diferentes enfoques que presentan los libros de texto sobre el mismo.

La concepción y el diseño de las actividades se encuadran dentro de «la teoría de las situaciones didácticas» de Guy Brousseau: proponer situaciones «adidácticas» en las que el docente no debe mostrar su intencionalidad ni intervenir indicando al alumno qué hacer; sino provocar que el alumno acepte la responsabilidad de la situación de aprendizaje. Así, la llamada «Situación fundamental», dada por las situaciones adidácticas, enfrenta a los alumnos a un conjunto de problemas que evolucionan de manera tal que el conocimiento que se quiere que aprendan es el único medio eficaz para resolverlos. Intervienen las «variables didácticas» para que el conocimiento evolucione en niveles crecientes de complejidad, y las «recontextualizaciones» de los conceptos tratados en los marcos geométrico y algebraico le otorgan significatividad a la propuesta.

En la resolución de los problemas, se espera que aparezcan distintas estrategias. También se sugieren puestas en común en las que se validen los resultados, se detecten los errores, se analicen las distintas propuestas y representaciones que se hayan utilizado, se elijan las más eficaces, se debatan las argumentaciones, se identifiquen los

conocimientos puestos en juego, etc. a fin de que esos conocimientos evolucionen en la totalidad del grupo de clase y converjan hacia el que se quiere construir.

Desde la «dialéctica instrumento – objeto» de Regine Douady, un concepto matemático funciona como «instrumento» cuando es la herramienta que permite resolver un problema; y funciona como «objeto» cuando es descontextualizado y aislado como objeto matemático. Los problemas diseñados responden a las «condiciones del buen problema» enunciadas por Douady; ya que: los enunciados tienen sentido en relación con los conocimientos previos; todos los alumnos están en condiciones de dar alguna respuesta, al menos para el problema inicial; admiten distintas estrategias de resolución y se pueden formular en distintos marcos (geométrico y algebraico). Y, principalmente, el conocimiento buscado es un conocimiento adaptativo en tanto es el medio científico de responder eficazmente a los problemas. Además se propone que en la puesta en marcha se cumplan las fases enunciadas por Douady en las que, dado el problema inicial: 1º– Se movilizan los objetos matemáticos conocidos para resolver el problema (Antigua). 2º– Se ponen en marcha instrumentos nuevos. Aparece el "nuevo implícito" (Búsqueda). 3º– Se hacen explícitos los conocimientos construidos en la fase anterior (Explicitación). 4º– El docente descontextualiza el conocimiento dándole la categoría de «objeto matemático» (Institucionalización). 5º– Se da a los alumnos diversos problemas destinados a provocar el funcionamiento como instrumentos explícitos de lo que ha sido institucionalizado (Familiarización – reinversión). 6º– El nuevo objeto es susceptible de convertirse en antiguo para un nuevo ciclo de la dialéctica instrumento-objeto (Complejidad de la tarea o nuevo problema).

Propuesta didáctica

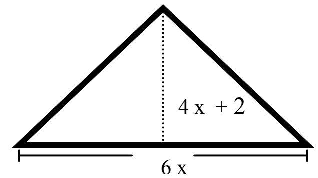
En esta propuesta se pretende que el alumno construya el concepto de Factoreo de Expresiones Algebraicas a través de una serie de actividades que proponen una mayor implicación y razonamiento que en las propuestas tradicionales de enseñanza.
Se comienza el abordaje del tema "Producto de monomios por polinomios", presentando al alumno las siguientes actividades:

Actividad 1: En un curso de un colegio secundario un grupo de alumnos quiere realizar un afiche para promocionar un festival. El afiche a confeccionar tiene forma rectangular y su superficie tiene un área dada por la expresión**:** A = (24 x + 12) . Cada alumno propone distintas medidas para la base (dada en dm.) del afiche, las que se indican a continuación**:**

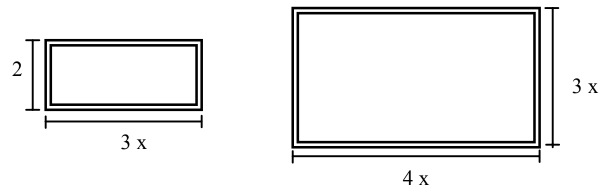
	Esteban	Marta	Estela	Leonardo	Emilio	Mónica
base	4	2	6	12	24	5
altura						

Escribe en la tabla la expresión algebraica para la altura b) ¿Qué procedimiento realizaste para obtener las distintas alturas? c) Propone una medida, para la base del afiche, que sea distinta a las indicadas en la tabla y encuentra la altura correspondiente.

d) ¿Cómo puedes verificar en cada caso que el valor hallado es correcto? e) Expresa el área $A = 24x + 12$ como un producto. ¿De cuantas formas distintas puedes hacerlo?



Actividad 2: Juan y Mirta van a organizar un baile de disfraces para Carnaval y al finalizar el mismo quieren otorgar un premio al mejor disfraz. Juan propone elaborar tarjetas de invitación de forma triangular con las siguientes medidas (dadas en cm) Mirta en cambio propone que sean dos tarjetas de forma rectangular, una donde se indique el horario y la dirección donde se llevará a cabo el baile y otra donde se especifiquen los elementos a tener en cuenta para la elección del mejor disfraz.



Después de una ardua discusión, deciden seleccionar la propuesta cuya tarjeta/s tenga menor superficie. a) ¿Con esta decisión se habrá solucionado la discusión?. b) Propone una sola tarjeta rectangular, cuyo base sea de: i) **6x** ; ii) **12x** y determina en ambos casos cuál deberá ser la altura para que el costo de confección sea el mismo que el que propone Mirta. c) Expresa $P(x) = 6x + 12x^2$ como un producto, de tres formas distintas. Encuentra los ceros de $P(x)$, es decir las raíces de la ecuación $6x + 12x^2 = 0$. Es el polinomio $P(x)$ divisible por $2x + 1$? y por $3x$?. Justifica tu respuesta.

Al incluir en la primera actividad factores que son divisores exactos de los coeficientes del polinomio y factores que no lo son, se introduce un aspecto innovador en la enseñanza de este tema en tanto supera el tratamiento habitual que focaliza la extracción del máximo común divisor, comúnmente denominado factor común. Se complejiza la actividad 2, al trabajar con factores que contienen una parte literal. Finalizadas las actividades, la puesta en común permitirá institucionalizar definiciones fundamentales como: factoreo, producto de monomios por polinomios y factor común.

A continuación se propone una serie variada de ejercicios con el objetivo de que el alumno reinvierta y se familiarice con el concepto recién construido, utilizando en alguno de ellos el marco geométrico. A través de distintos ejercicios se realiza la generalización al caso de Producto de expresiones algebraicas, ya que el procedimiento utilizado en el factoreo es similar al visto para los polinomios de una variable. Mediante las siguientes actividades se induce al alumno a construir el concepto de "Factor Común por grupo".

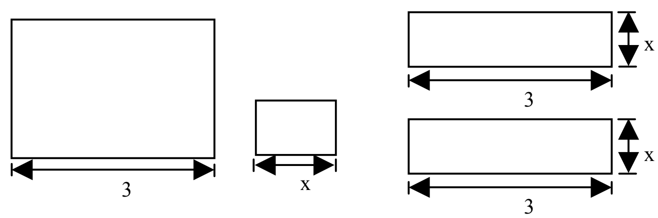
Actividad 3: Daniel desafía a Leonardo a factorear el polinomio $P(x) = x^3+5x+2x^2+10$. Daniel averiguó que el polinomio es divisible por $(x + 2)$ y realizó fácilmente el factoreo. Leonardo, que no tuvo acceso a esa información, no pudo realizarlo. Pero después de varios intentos, llegó a obtener la siguiente expresión $P(x) = x(x^2 + 5) + 2(x^2 + 5)$. a) ¿Podrías factorear el polinomio de la forma en que lo hizo Daniel?. b) ¿Qué operaciones realizó Leonardo para llegar a la expresión indicada? Te animas a ayudarlo y completar el factoreo?

Actividad 4: Ahora es Leonardo quien le propone a Daniel factorear el polinomio $P(x) = x^5 + x - 3x^4 - 3$. Daniel no pudo obtener ninguna información sobre la divisibilidad de P(x) y no supo realizar el factoreo. Sin embargo Leonardo, después de pensar un tiempo lo factoreó con la misma idea que usó antes. ¿Puedes decir cómo lo hizo?

En la puesta en común se analizarán las dos estrategias, considerando las ventajas y dificultades de cada una, los conocimientos sobre los que se apoyan (divisibilidad, factor común), las condiciones de aplicabilidad de cada una y el sentido de la denominación de este caso.
Nuevamente se presenta una serie de ejercicios, de carácter variado, a fin de que el alumno pueda familiarizarse con el concepto de factor común por grupo. Continuando con el desarrollo de la propuesta se presenta la siguiente actividad (utilizando el marco geométrico) para abordar el tema Trinomio cuadrado perfecto

Actividad 5

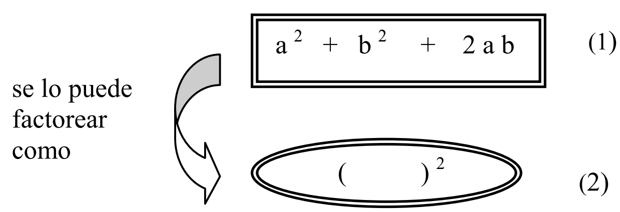
Susana le propone a Leonardo el siguiente desafío**:** Tengo dos rectángulos y dos cuadrados con las medidas dadas en el gráfico y quiero construir un cuadrado, utilizando todas las figuras y de forma que no haya solapamiento ni espacios libres entre ellas. Puedes ayudar a Leonardo a resolver el problema



a) Expresa el área total de la figura obtenida**:** 1º) como suma de las áreas de las figuras dadas y 2º) utilizando la fórmula del área de un cuadrado.

b) Realiza un procedimiento similar al del ítem a) para factorear la expresión**:** $a^2 + b^2 + 2\,a\,b$.

c) Completa y discute con tus compañeros porqué será que (1) recibe el nombre de Trinomio Cuadrado Perfecto y (2) el nombre de binomio al cuadrado. Indica qué características debe tener un trinomio para que sea Trinomio Cuadrado Perfecto

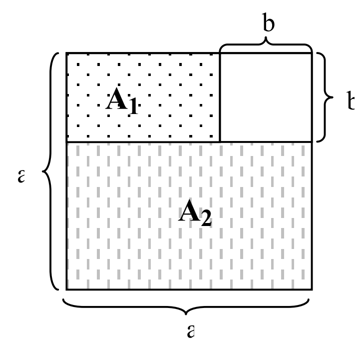


En esta Actividad, el ítem a) está pensado para que el alumno reconozca la igualdad de las dos expresiones (factoreada y polinómica). El ítem b) apunta a una generalización donde ya se incorpora el concepto de factoreo para este tipo de expresiones. El ítem c) tiene el propósito de que el alumno se desprenda del marco geométrico y trabaje en el algebraico.
Será conveniente llevar al alumno a que relacione este caso de factoreo con el desarrollo del cuadrado de un binomio, lo cual le permitirá enfrentar las situaciones en las que aparezcan términos negativos. En la ejercitación que se realiza a continuación, se incluye la siguiente actividad que tiene un doble propósito, por un lado por un lado profundiza el concepto de trinomio cuadrado perfecto y por otro, sienta las bases para trabajar el método de completar cuadrados**:**

Actividad 6: Determina el valor que debe tomar **h** para que la expresión dada sea un trinomio cuadrado perfecto. Luego reemplaza **h** por el valor obtenido y factorea la expresión**:** a) $y^2 + 10y + \mathbf{h}$ b) $9x^2 + \mathbf{h} - 36xt$ c) $\frac{1}{49}p^2 + 9q^2 - \mathbf{h}$

Luego se presentan actividades que plantean una forma alternativa al problema de factorear un trinomio (no cuadrado perfecto), con coeficientes enteros. Al mismo tiempo sienta las bases para cuando la factorización se realice a partir de las raíces de la ecuación cuadrática correspondiente y para establecer las propiedades de las raíces de dicha ecuación. Se da gran importancia al trabajo en el marco geométrico. Las conceptualizaciones logradas para el factoreo del trinomio cuadrado perfecto con vinculaciones algebraicas y geométricas permiten abordar, desde un inicio, el factoreo del cuatrinomio cubo perfecto a partir de lo algebraico, sin que por ello se descuide su desarrollo geométrico. Para construir el concepto de factoreo de una diferencia de cuadrados se plantean 2 actividades

Actividad 7



a) Ubica las figuras A_1 y A_2 de tal manera que obtengas un rectángulo y luego utiliza ambas construcciones para factorear la expresión $a^2 - b^2$

b) ¿Qué nombre le pondrías a la expresión**:** $a^2 - b^2$ de forma que te permita identificarla sin ambigüedades?

c) Enuncia con palabras la expresión factoreada de $a^2 - b^2$

d) Indica si es verdadero o falso que todo número positivo se lo puede expresar como el cuadrado de un número

Actividad 8: Escribe el o los factores que faltan

a) $4x^2 - 25 = (2x - 5)(\qquad)$

b) $x^8 - 16y^4 = (x^4 + 4y^2)(\qquad) = (x^2 - 2y)(\qquad)(\qquad)$

c) $y^8 - 1 = (y - 1)(\qquad)(\qquad)(\qquad)$

d) $36a^2 - 5 = (6a - \sqrt{5})(\qquad)$

c) $(x + 2)^2 - 9 = (x + 5)(\qquad)$

En la Actividad 6 el ítem d) busca desestructurar al alumno sobre la idea de que si un número no es cuadrado perfecto no puede ser expresado como cuadrado de otro. La Actividad 7 ítem a), b) y c) están pensados en una secuencia de complejidad creciente que los lleva a realizar sucesivas factorizaciones de 2, 3 y 4 factores. En el ítem d) se incorpora un término que no es cuadrado perfecto y en el e) aparece uno cuya base es un binomio.

Luego se plantea una variada ejercitación con un doble propósito**:** aplicar este caso de factoreo (diferencia de cuadrados), y favorecer el cálculo mental y la reversibilidad del pensamiento (Por ejemplo**:** Se pide calcular 12 x 8 de otra manera que no sea realizando el producto indicado). Otros ejercicios permiten vincular las nociones de área de distintas figuras, semejanza de triángulos y relación pitagórica con este caso de factoreo

El factoreo de la "Suma o diferencia de potencias de igual exponente" se plantea a partir de la divisibilidad de polinomios, tomando primero un caso particular y luego realizando la generalización correspondiente; trabajando el caso de factoreo tanto en el marco algebraico como geométrico. Finalmente se propone que el alumno analice un diagrama de flujo donde se sintetizan todos los casos de factoreo vistos, dado que es un buen recurso para que el docente integre todo lo trabajado y permite al alumno organizar su razonamiento y encontrar el procedimiento adecuado al enfrentarse al factoreo de una expresión algebraica dada.

Para aplicar los distintos conceptos, se introduce el juego matemático. Los juegos que promueven el descubrimiento y la construcción suponen, tanto en su diseño como en su práctica, una forma de actividad muy próxima a la "creación matemática", semejante a la del científico, y como consecuencia brindan grandes posibilidades de "hacer matemática". Los juegos de estrategias inducen a un tipo de actividad parecido a la resolución de problemas, núcleo central de las matemáticas. En definitiva el juego es un gran potenciador de la motivación y la integración de estrategias mentales.

Referencias Bibliográficas

Artigue, M. (1995) *Ingeniería didáctica en educación matemática*. G.E.I. México.

Douady, R. Dialéctica instrumento–objeto. Juego de encuadres. Cuaderno de Didáctica de la Matemática Nº3. Edición mecanografiada

Brousseau, G (1994) Los roles del maestro Cap. de PARRA, C, SAIZ, I, otros. *Didáctica de la Matemática.* Compilación. Paidos. Bs. As. 1994

Bixio, Cecilia (1998) *Enseñar y aprender. Homo Sapiens.* Bs. As

Socas, Martín y otros. (1996) Iniciación al álgebra. Síntesis. Madrid.

EXPLORANDO LA CONSTRUCCIÓN DE BASES PROPIAS Y NO PROPIAS

María Antonieta Aguilar Víquez
Instituto Tecnológico de Pachuca, CICATA- IPN; México
auva5404@prodigy.net.mx

Resumen

La presente investigación tiene como objetivo recopilar la información necesaria para el diseño de situaciones didácticas que permitan a los estudiantes de Álgebra Lineal establecer relaciones entre Bases propias y no propias, de tal forma que una vez identificada una base cualesquiera, el estudiante podrá caracterizarla a través de elementos como espacios y subespacios vectoriales, base canónica, dependencia e independencia lineal y dimensión de una base.

Las relaciones que los estudiantes pueden establecer las resumimos en la tabla #1

Tipo de Base	Relación	Reducción	Dimensión
Base propia	Espacio vectorial	Base Canónica	# de vectores linealmente independientes
Base no propia	Subespacio vectorial	Carece de base canónica	# de vectores linealmente independientes

La problemática que se presenta, es que a los estudiantes les resulta difícil establecer dichas relaciones, porque en los textos existentes no las ponderan, por ejemplo, no mencionan que una base no propia pertenece a un subespacio vectorial, esto aunado a la problemática de conceptos como espacios y subespacios vectoriales que resultan no tangibles para los alumnos. De acuerdo a Chargoy (2002) los estudiantes en general solo tienen la noción de base, ellos pueden escribir la definición e incluso recitarla, pero no poseen el entendimiento del concepto. Los conceptos de combinación lineal, independencia lineal y generación de un espacio vectorial se encuentran aislados en el estudiante.
Por eso enfatizamos en la necesidad de articular todos estos conceptos y procedimientos que le permitirá al estudiante la adquisición real y efectiva de los conocimientos del álgebra lineal. El marco teórico que utilizamos es el de la teoría de las situaciones didácticas, Por considerarlo acorde con nuestro objetivo principal en la investigación. La metodología a desarrollar es la Ingeniería Didáctica. El análisis a priori que se realizó en este marco estuvo fundamentado en considerar las dificultades que presentaron los estudiantes en la solución de problemas en los cuales se les solicitaba encontrar bases y espacios vectoriales, ello nos permitió establecer la problemática y por ende la necesidad de establecer relaciones por parte de los estudiantes y por ende la necesidad de diseñar situaciones didácticas para que los alumnos logren apropiarse de los conocimientos del álgebra lineal que son medulares en el tema de bases y dimensiones.

Introducción

La matemática educativa en términos generales, se ocupa del estudio de los fenómenos didácticos ligados al saber matemático, consideramos que ella juega un papel primordial para estos propósitos. Desde el enfoque de esta disciplina, en la presente investigación, nos interesa conocer y determinar cómo los estudiantes realizan construcciones que relacionan a las bases propias con las no propias, cuáles son los significados que ellos manejan y reconocen en el medio escolar, y después cómo los reconstruyen cuando interactúan en esos ambientes nuevamente.

Cabe hacer mención que en el medio escolar y particularmente en los textos de álgebra lineal, no se mencionan los términos base propia y base no propia, lo que se hace es dar la definición de base en general como lo establece Grossman, S. (1996):

Base Un conjunto de vectores $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es una base para un espacio vectorial V si

i) $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es linealmente independiente

ii) $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ genera a V

esto da lugar a la siguiente premisa:

Todo conjunto de vectores linealmente independiente en R^n es una base en R^n

Como podemos leer las características fundamentales de una base propia serían que los vectores que forman dicha base sean linealmente independientes, por un lado y por el otro, que tales vectores generen al espacio vectorial V. En el caso de una base no propia, se trata de encontrar bases para algún o algunos subespacios, que, finalmente cumplan con la definición. A lo largo de nuestra práctica docente, hemos percibido que hacer esta clasificación tiene un impacto benéfico en el aprendizaje de los estudiantes y mediante la implementación de situaciones didácticas, así como la articulación con una metodología apropiada, resulta pertinente para alcanzar nuestros propósitos: lograr que los conocimientos o saberes matemáticos sean accesibles a los estudiantes, es decir que ellos se apropien de dichos conocimientos de tal manera que sean capaces de enfrentar problemas y resolverlos en forma adecuada. Con lo anterior se pretende que los saberes adquieran nuevos significados, recuperen sus significantes iniciales o se profundice en ellos ya que es la nueva problemática que nos lleva a reflexionar sobre la reorganización de la obra matemática. Tenemos que considerar también, que en el sistema educativo nacional, existe una confrontación entre la obra matemática y la matemática escolar, Cordero (2001), puesto que como docentes e investigadores, nos hemos percatado de la presencia de prácticas sociales de la actividad humana tales como: modelar, aproximar, predecir, medir, buscar tendencias (Aguilar, 2001) y otras, que no han sido integradas a la currícula de las instituciones en donde se imparte Álgebra Lineal. Sin embargo estas prácticas sociales han permitido construir cierto tipo de conocimiento conducente a la reconstrucción de significados en otras áreas de la matemática , en particular del álgebra lineal, así como temas afines.

Nos interesa profundizar en el significado de base, para después establecer relaciones y diferencias entre bases propias y no propias; que perciben los estudiantes, para enriquecer dicho significados, y realizar una epistemología de las prácticas sociales, que se llevan a cabo alrededor de esos conceptos.

Pondremos en escena dos secuencias, una que corresponde a la generación de bases propias y la otra corresponde a la generación de bases no propias, en el marco de la aproximación socioepistemológica, para hacer ver la necesidad de ampliar los estudios de representaciones mentales, Aguilar(1999b) a la de las prácticas sociales.

La aproximación socioepistemológica como línea de investigación

Con la aproximación socioepistemológica, hacemos un énfasis especial en la dimensión social y en la diferencia con otras aproximaciones teóricas que también la incluyen.

La aproximación socioepistemológica en la investigación en Matemática Educativa busca construir una explicación sistémica de los fenómenos didácticos en el campo de las matemáticas por medio de cuatro componentes fundamentales del conocimiento matemático: se incorpora al estudio de la epistemología del conocimiento, la dimensión cognitiva, la didáctica y todo esto, dentro de la dimensión social (Cantoral, 2000).
Esta última dimensión permite enfocarnos en la organización social donde el conocimiento tiene significados propios y está conformado por versiones que se comparan y negocian durante el proceso mismo de la actividad. La argumentación, característica propia de una organización social, juega un papel central al intentar convencer de la validez de versiones particulares. Esto implica reconocer los recursos, versiones, argumentos y la construcción de consensos acerca de cierto contenido matemático que necesariamente se dan en los contextos interactivos de los estudiantes.
La componente social es reconocida por diversas aproximaciones teóricas que la han incorporado a sus marcos explicativos. Sin embargo, las consecuencias de esta incorporación varían según la base teórica que maneja cada una. Abordaremos, en particular, el caso de la cognición situada y de las aproximaciones socioculturales.
La cognición situada adopta como principio fundamental el constructivismo social, el cual toma en cuenta las dimensiones histórica, cultural y social de las interacciones humanas. El aprendizaje humano es entendido como un proceso de diálogo y de socialización (Cordero, 2001), pero sus explicaciones mantienen un corte cognitivo.
La socioepistemología pretende desarrollar estrategias de investigación de naturaleza sociales.
Elementos como argumento, consenso y herramienta, presentes en contextos socialmente organizados, conforman la plataforma que brinda explicaciones acerca de cómo se construye el conocimiento reconstruyendo significados, en la presente investigación será a través del establecimiento de relaciones entre bases propias y no propias.

La teoría de situaciones didácticas, como marco teórico

"La didáctica de las matemáticas" estudia las actividades didácticas, es decir, las actividades que tienen por objeto la enseñanza, evidentemente en lo que tienen de específicas respecto de las matemáticas. Los resultados, en este dominio, son cada vez más numerosos, se refieren a los comportamientos cognitivos de los alumnos, pero también a los tipos de situaciones puestas en juego para enseñarles y sobre todo los fenómenos a los cuales da lugar la comunicación del saber. La producción o la mejora de los medios de enseñanza encuentra en estos resultados más que objetivos o medios de evaluación, encuentra en ella un apoyo teórico, explicaciones, medios de previsión y de análisis, sugerencias, incluso dispositivos y métodos, Brosseau (1986).

La ingeniería didáctica como metodología

Se caracteriza por un esquema experimental basado en las realizaciones didácticas en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza. Su forma de validación es en esencia interna, basada en la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori Artigue (1995).

La ingeniería didáctica da como resultado diversos métodos y formas de implementación de una secuencia didáctica que a su vez forma parte de la situación.

El método

Consiste en el desarrollo de seis etapas:

La primera etapa parte de una experiencia epistemológica, estudiando el contenido matemático correspondiente al tópico del proyecto, ahí se organiza dicho contenido matemático con base a lo que significa entender el concepto y cómo el concepto puede ser construido por el que aprende.

En la segunda etapa, se trabajan ejemplos de diseño e implementación de situaciones, en la realización de actividades con estudiantes, que en nuestro caso serán entrevistados en grupos de tres.

Etapa tres, en ella se realizan análisis de los datos coleccionados y posteriormente se reconsidera la experiencia que fue punto de partida. Las interpretaciones de las respuestas dadas por los estudiantes ante las situaciones, estarán basadas en el marco de las construcciones mentales; y en el desarrollo de estas ante las situaciones. Aquí se estudian las bases para transformar los datos o hechos en fenómenos didácticos.

Etapa cuatro, consiste en la iteración con el resultado de la etapa tres. Es una revisión de la experiencia epistemológica de la cual se partió en la etapa uno. El resultado provee los fundamentos de la siguiente aplicación de situaciones diseñándolas e implementándolas en una base *socioepistemológica*.

Etapa cinco, en ella se aplican o implementan los rediseños y se coleccionan los datos. Se trabaja (en la investigación presente) con estudiantes en grupos de tres, ya que tenemos evidencias de que en forma grupal, los estudiantes, realizan mayor número de construcciones y con mayor rapidez (Aguilar, M y Martínez, M, 1998; Aguilar, 1999).

Etapa seis, se podría denominar "etapa del análisis de datos" y en ella se pretende alcanzar un refinamiento del recorte o amplitud del entendimiento del cual se partió. Las interpretaciones continúan dentro del marco de las construcciones mentales.

Momentos de la secuencia didáctica

- M1 Localización de fuentes para la construcción de bases
    - i) a partir de un conjunto de vectores **V** = $\{ v_1 , v_2 , \dots , v_n \}$
    - ii) a partir de un conjunto de polinomios **P** = $\{p_1 , p_2 , \dots , p_n\}$
    - iii) a partir de un conjunto de matrices **M**= $\{m_1 , m_2 , \dots , m_n\}$
    - iv) a partir de un sistema de ecuaciones lineales
- M2 Realización de combinaciones lineales
- M3 Generación de una matriz
- M4 realización de una reducción simplex
- M5 Establecimiento de criterios para determinar si la matriz original es una base propia o no propia.

Ejercicio #1 Caracterice a

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Ejercicio #2 caracterice a

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 6 \\ -6 & 3 & -9 \end{bmatrix}$$

*se inicia desde M3 la matriz generada es la misma

*M4 reducción simples para B1

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

*M5 Criterios para caracterizar a B1

a) el # de filas de la matriz original es igual al # de filas de la matriz reducida

b) rango (ρ)= 3, nulidad (ν)=0 dim.= 3

c) por los incisos a) y b) se trata de una **base propia**

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

*Se inicia desde M3 la matriz generada es la misma

* M4 reducción simplex para B2

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 6 \\ -6 & 3 & -9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

*M5 Criterios para caracterizar a B2

a) el # de filas de la matriz original igual al # de filas de la matriz red.

b) rango (ρ)=1, nulidad (ν)=2,dim=2

c) por los incisos a) y b) se trata de una **base no propia**

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Parámetros para la caracterización de una base

CARACTER	SIGNIFICADO	BASE PROPIA	BASE NO PROPIA
Dimensión dim.	Número de vectores linealmente independientes	Formada por los vectores de la matriz original	Formada por los vectores encontrados
Rango ρ	Número de filas de la matriz reducida	Es el mismo número de filas de la matriz original	Es diferente al número de filas de la matriz original
Nulidad ν	Número de filas nulas de la matriz reducida	No posee filas nulas	Posee filas nulas
Espacio nulo η	Espacio generado por los vectores linealmente independientes de una base no propia	No tiene espacio nulo	Tiene espacio nulo

Resultados y conclusiones

Algunos resultados obtenidos por los estudiantes son:

a) Resignificaron las nociones de base propia y base no propia

b) Encontraron que, si el número de filas de la matriz original es igual al número de filas de la matriz reducida, el valor del determinante de la matriz reducida es diferente de cero, la reducción total de la matriz original da como resultado una base canónica, se trata de una base propia. Por otro lado, si el número de filas de la matriz original es diferente al número de filas de la matriz reducida, el determinante de la matriz reducida es igual a cero, la reducción total de la matriz original da una matriz no canónica, se trata de una base no propia.

Podemos concluir que mediante la puesta en escena de una secuencia didáctica como la propuesta en este trabajo, los estudiantes logran resignificar conceptos acerca del álgebra lineal construyendo sus propios conocimientos, para lograr un aprendizaje efectivo.

Bibliografía

Aguilar, M. A. (1994 - 2000) Curso de Matemáticas III (Álgebra Lineal). Impartido a estudiantes de las carreras de Ingeniería en Sistemas, Civil, Eléctrica y Mecánica. ITP, México.

Aguilar, M. A. (2002)Relaciones entre la derivada y la primitiva; el papel del registro gráfico. Actas XV Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. ED. Cecilia Crespo, V. 15, pp 1004 – 1009.

Aguilar; M.A. y Martínez M.D., (1998) "Relaciones entre la derivada y su primitiva a la luz del comportamiento tendencial de las funciones; un estudio preliminar". Tesina. Trabajo de investigación presentado en el 2º. Seminario Nacional de Investigación de Didáctica de las Matemáticas. Monterrey, N.L. México.

Aguilar, M.A. (1999) "Construcciones Mentales en ambientes gráficos"; (Estudio de algunas relaciones entre la primera derivada y su función Primitiva), Tesis de especialidad en Didáctica de la Matemática. Instituto Superior de Ciencias y Tecnología Nucleares, la Habana, Cuba (no publicada).

Aguilar, M.A. (2000a) "Diseño de situaciones didácticas para la enseñanza de las Matemáticas con un enfoque Sociocultural" Curso impartido a profesores de Ingeniería en el Instituto Tecnológico de Pachuca, enero.

Aguilar, M. A. (2002)Relaciones entre F y F´ el papel del registro gráfico..." Reporte de Investigación publicado en Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Vol XV Tomo 2 pp 1004-1009.

Aguilar, M. A. (2003) "Reconstrucción de Significados que realizan los estudiantes entre F y F´, cuando interactúan en ambientes gráficos". Reporte de Investigación publicado en Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Vol XVI Tomo 2 pp 704-709.

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En P. Gómez (ed) *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.* (pp. 33-59) México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Brosseau, G. (1986), "Fundamentos y Métodos de la Didáctica de las Matemáticas"*Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol. 7, n. 2, pp. 33-115.

Cantoral, R. (2000). Pasado, presente y futuro de un paradigma de investigación en Matemática Educativa. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.* (Volumen 13, 54-62*).* Comité Latinoamericano de Matemática Educativa México: Grupo Editorial Iberoamérica .

Cordero, F. (2001), "La distinción entre construcciones del Cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana", Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, vol 4, núm. 2, pp 103-128

Grossman, S. (1996) Álgebra Lineal, V edición, Ed. Mcgraw Hill

Chargoy, R.M. (2002). "Diseño de una secuencia de actividades para el análisis conceptual de la base de un espacio vectorial". Actas Relme XV, pp. 259- 264.

EXPERIENCIA SOBRE UNA PROPUESTA METODOLÓGICA Y DIDÁCTICA PARA LA CAPACITACIÓN DE PROFESORES DE EGB 3 Y POLIMODAL

M. E. Ascheri - R. A. Pizarro
Universidad Nacional de La Pampa- Argentina
mavacheri@exactas.unlpam.edu.ar

Resumen

En este trabajo presentamos los resultados obtenidos como consecuencia del dictado de un Curso de Capacitación para Profesores de EGB 3 y Polimodal, llevado a cabo en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de La Pampa. Aprovechando las alternativas que ofrece la evolución tecnológica para propiciar cambios en el enfoque de enseñar y aprender matemática, teniendo en cuenta que la informática ocupa un lugar cada vez más importante en nuestra sociedad y resulta de gran utilidad en el campo educativo, les presentamos a los profesores una propuesta metodológica y didáctica complementaria para la enseñanza del tema *Resolución Numérica de Ecuaciones Polinómicas*. Esta propuesta consiste, básicamente, en utilizar métodos que usualmente no se enseñan en la Escuela de Nivel Polimodal, con el complemento de la computadora como herramienta colaboradora. Estos métodos permitirán que el alumno analice expresiones polinómicas que no tienen solución exacta, que son de orden elevado y, por consiguiente, son difíciles de tratar por medio de los métodos convencionales. Este tipo de expresiones provienen, por lo general, de problemas técnicos o de situaciones problemáticas de la vida real cuyo tratamiento puede motivar al alumno, facilitando de esta manera el proceso de enseñanza - aprendizaje relativo a la *Resolución Numérica de Ecuaciones Polinómicas de cualquier orden*. La motivación especial que nos condujo a la elaboración y dictado de este Curso fue la de intentar mejorar el proceso de enseñanza - aprendizaje referido a esta temática en los niveles educativos citados anteriormente. Los participantes respondieron activamente a las distintas propuestas de trabajo que se presentaron a lo largo del desarrollo del Curso. Es por ello que podemos concluir que esta experiencia resultó positiva.

Introducción

Buscar las raíces de una ecuación polinómica es uno de los problemas más antiguos de las matemáticas, y en aplicaciones prácticas es frecuente encontrarse con la necesidad de resolver esta dificultad. Sabemos que sólo las ecuaciones de orden bajo pueden resolverse por fórmulas directas y van a dar valores exactos sólo en ciertos casos. También algunas ecuaciones previamente "preparadas" por el profesor, podrán ser resueltas por fórmulas directas y darán resultados exactos. Pero las ecuaciones que resultan de problemas técnicos rara vez caen en esta situación. De aquí que necesitamos recurrir a otros métodos para resolver este tipo de problemas. Las técnicas numéricas que presentamos en este Curso de Capacitación para Profesores son adecuadas para solucionar estos problemas. El aprendizaje de los métodos numéricos no sólo aumenta nuestra habilidad para el uso de las computadoras, sino también amplía la pericia matemática y la comprensión de los principios científicos básicos. Cuando un profesor y alumnos se encuentran en clase, la regla es que el primero está ahí para enseñar un saber determinado y los alumnos para aprender este saber en concreto. El trabajo del profesor será el de elegir puestas en escena de saberes aceptables para los alumnos y eficaces respecto del objetivo de aprendizaje. Se deben brindar las herramientas para la comprensión del saber matemático, para ayudar a los alumnos en sus esfuerzos para conceptualizar la realidad, para desarrollar su agilidad mental y su espíritu crítico. Las situaciones problemáticas que surgen de las matemáticas y en otros contextos, constituyen un primer encuentro de los alumnos con los objetivos implícitos, en el que se les ofrece la oportunidad de investigar por sí mismos posibles soluciones, bien individualmente o en pequeños grupos. Pensamos que los alumnos se verán más motivados si les presentamos este tema a través de situaciones problemáticas de la vida real, relacionadas con otras asignaturas (física, química, etc.). Las ecuaciones que resulten, en la mayoría de los casos, deberán ser resueltas por las técnicas numéricas que desarrollamos en este Curso. Para resolver estas situaciones problemáticas, los alumnos deberán hacer un análisis a priori de los datos y a posteriori de los resultados obtenidos. Puede resultar productivo agregar actividades complementarias en donde tengan que resolver este tipo de problemas, utilizando además la computadora como herramienta de apoyo al docente y para fomentar el aprendizaje de los alumnos, provocar comportamientos de iniciativa, búsqueda de coherencia y espíritu crítico. El objetivo fundamental de esta propuesta metodológica y didáctica ha sido el de intentar mejorar el proceso de enseñanza - aprendizaje referido a esta temática, promoviendo el protagonismo del sujeto y facilitando el trabajo que, para alumno y profesor, supone la tarea de formación.

Desarrollo

La razón principal para resolver ecuaciones polinómicas por medio de métodos numéricos, es que esas ecuaciones no se pueden resolver por medio de fórmulas directas y carecen de solución exacta, excepto para muy pocos problemas. Los objetivos generales que nos planteamos para realizar este Curso de Capacitación para Profesores fueron los siguientes:

Introducir a los participantes en el estudio de los métodos numéricos para resolver ecuaciones polinómicas.

Proporcionar las herramientas para la solución de problemas que se relacionan con las raíces de ecuaciones polinómicas, y que a menudo son imposibles de resolver analíticamente.

Tener la suficiente información para aprovechar satisfactoriamente una amplia variedad de problemas que se relacionan con las raíces de ecuaciones polinómicas.

Dominar las distintas técnicas, valorar su confiabilidad y estar capacitado sobre la elección para escoger el mejor método (o métodos) para cualquier problema particular que involucre la determinación de las raíces de una ecuación polinómica.

Promover la comprensión de la importancia de los métodos numéricos en la resolución de problemas que involucren ecuaciones polinómicas, vinculados con otras disciplinas.

Comprender y valorar la importancia de utilizar la computadora como una herramienta de enseñanza - aprendizaje, para la determinación de las raíces de ecuaciones polinómicas.

Brindar herramientas teóricas y prácticas básicas para la elaboración de una clase de ensayo que incluya las distintas técnicas numéricas analizadas a lo largo del Curso.

y los objetivos particulares fueron:

Entender la interpretación gráfica de una raíz.

Conocer la interpretación gráfica de los distintos métodos de aproximación para la obtención de las raíces de ecuaciones polinómicas.

Saber las diferencias fundamentales entre las distintas técnicas existentes para la determinación de las raíces de ecuaciones polinómicas.

Aplicar los métodos de aproximación para la obtención de las raíces de ecuaciones polinómicas a situaciones problemáticas de la vida real.

Orientar a los participantes en el proceso de formulación y edición de una clase de ensayo en vinculación con la resolución numérica de ecuaciones polinómicas.

El Curso tenía una carga horaria total de 40 horas reloj, siendo 5 las reuniones presenciales de 3 horas reloj cada una. En estas reuniones se introdujeron a los participantes en los temas propuestos en el Curso, desarrollando la teoría básica necesaria para tal fin. Además, en cada una de estas reuniones los participantes debían resolver distintas situaciones problemáticas referidas al tema previamente desarrollado, bajo nuestra coordinación y orientación. Con esta etapa se logró una activa participación de los cursantes, y el trabajo colectivo y grupal de los mismos. En el último encuentro se plantearon las dudas e inquietudes referidas, fundamentalmente, a las diferentes propuestas de trabajo elaboradas por los participantes (clase de ensayo). Las consultas sobre las propuestas de trabajo se presentaron oralmente para su consideración colectiva y eventual revisión y / o corrección. Las mismas podían ser elaboradas de manera individual o grupal (no más de tres integrantes por grupo). Para aprobar este Curso, los participantes debían presentar y defender sus propuestas de trabajo (clase de ensayo).

A continuación, presentamos una versión sintética del Programa Analítico que desarrollamos durante el Curso:

- Determinación de las raíces de una ecuación polinómica. Distintos métodos (acotación, separación, Regla de Descartes, Teorema de Sturm, Regla de Hua, Regla de las lagunas). Desarrollo de ejemplos.
- Aproximación de las raíces de una ecuación polinómica. Distintos métodos (gráfico, bisección, regla falsa, iterativo de punto fijo, secante, Newton, Newton – Raphson, DC o de diferencia de cocientes). Desarrollo de ejemplos.

Si bien no se espera que todos los temas de este Programa sean tratados en un solo año del Nivel correspondiente, sí se propone que alguno de estos contenidos los alumnos deberían tener la oportunidad de aprender.

La estrategia utilizada para el análisis de cada uno de estos temas fue la de combinar la enseñanza tradicional y las técnicas grupales de aprendizaje activo, utilizando la computadora como herramienta colaboradora de las tareas a realizar.

En lo que respecta a la elaboración de las diferentes propuestas de trabajo (clase de ensayo) que debían presentar los participantes, hicimos hincapié en el hecho de que la implementación de las actividades debían tener como funcionalidad pretendida, facilitar el aprendizaje como apoyatura de la explicación del profesor. En la búsqueda de las actividades se debe tener en cuenta que cada alumno tiene sus propias necesidades, motivaciones, deseos, aspiraciones, las cuales dependen de su estructura cognitiva y varían por medio del aprendizaje. También es importante tener en cuenta las diferentes motivaciones con que el alumno puede acercarse y recibir estas actividades: aprendizaje básico de un tema, aprendizaje detallado, repaso de conocimientos, búsqueda de información “en profundidad” o en “amplitud”, autoevaluación, evaluación.

Además, las actividades deben estar basadas en problemas genuinos que atraigan el interés de los alumnos, a fin de que los asuman como propios y deseen resolverlos.

Para elaborar y llevar a la práctica (en un futuro) la clase de ensayo, se plantearon los siguientes objetivos:

- Que sea de fácil comprensión para los alumnos con un conocimiento mínimo de matemáticas.
- Proporcionar las herramientas para la solución de problemas que se relacionan con las raíces de ecuaciones polinómicas, y que a menudo son imposibles de resolver analíticamente.
- Promover la comprensión de la importancia de los métodos numéricos en la resolución de situaciones problemáticas que involucren ecuaciones polinómicas, vinculadas con otras disciplinas.
- Capacitar a los alumnos para que practiquen los métodos numéricos en una computadora, y comprueben la importancia de su utilización como una herramienta colaboradora para resolver distintas situaciones problemáticas de la vida real.
- Proporcionar software que resulte fácil de comprender.
- Fomentar el trabajo como miembro participante de una grupo para el desarrollo de las actividades, en función de favorecer la integración grupal.

Para alcanzar estos objetivos se deben tener en cuenta ciertos saberes previos:

El significado matemático de lo que es encontrar una raíz de una ecuación polinómica, sean reales o complejas, tanto gráfica como analíticamente.

Los métodos estándares para obtener las raíces de una ecuación polinómica, tanto con fórmulas directas como a través de casos de factoreo, del teorema del resto u otros.

Trazado de gráficos de funciones polinómicas, a partir de una tabla de valores.

Seguidamente presentamos algunas de las propuestas de trabajo (clase de ensayo) elaboradas por los participantes:

Grupo 1

Una fábrica decide envasar 385.84 cm^3 de jugo natural en envases de forma cúbica (tetrabrik) y cilíndrica (latitas), considerando que la base del cilindro es un círculo de 6.4 cm de diámetro. Determinar la altura de ambos envases, sabiendo que el cubo tiene 4.72 cm de altura menos que el cilindro.

La ecuación es $P(x) = x^3 - 14.16x^2 + 34.6852\, x - 105.15405$.

Aplica la Regla de Ruffini para acotar las raíces del polinomio.

Mediante la Regla de Hua verifica si el polinomio tiene raíces complejas.

Mediante el método de Newton aproxima el valor de la raíz del polinomio, utilizando como valor inicial, la cota inferior que hallaste en el punto nº 2, iterando 2 veces. La derivada del polinomio es $P'(x) = 3x^2 - 28.32\, x + 34.6852$.

Utilizando un software que realice gráficos de funciones, obtiene la gráfica para comprobar el resultado obtenido en el punto nº 4.

Solución

2) Regla de Ruffini

	1	-14.16	34.6852	-105.15
11.5		11.15	-30.59	47.0948
	1	-2.66	4.0952	-58.0552

Cota inferior = 11.5.

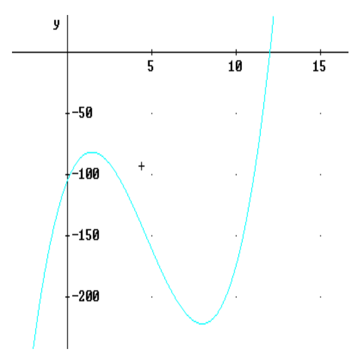
	1	-14.16	34.6852	-105.15
15		15	12.6	709.278
	1	0.84	47.2852	604.128

Cota superior = 15.

3) Regla de Hua

$14.16^2 > 1 * 34.6852$ $\qquad$ $34.685^2 > 14.16 * 105.15405$.

Por lo tanto, el polinomio tiene un par de raíces complejas.



4) Método de Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^{\,3} - 14.16x_n^{\,2} + 34.6852x_n - 105.15405}{3x_n^{\,2} - 28.32x_n + 34.6852}$$

$x_0 = 11.5$

$x_1 = 12.048997$

$x_2 = 12.000189$. Luego, $x \cong 12$.

5) Graficamos y obtuvimos una raíz real positiva en 12.

Respuesta.

La altura de la lata es de 12 cm y la altura del tetrabrik es de 12 cm - 4.72 cm = 7.28 cm.

Grupo 2

Se quiere estudiar la variación de la temperatura promedio de la superficie de un planeta, sabiendo que recibe radiaciones de una estrella cuya temperatura aumenta, aunque muy lentamente. La temperatura promedio del planeta se puede calcular a través de la siguiente fórmula: $T(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 5$*, con x en millones de años y T en ºC.*

Se desea averiguar si en un período de 4 millones de años, la temperatura promedio puede llegar a tomar el valor de 0º C.

Paso 1: Se explicará a los alumnos la regla de Descartes.

Sea P(x) un polinomio de raíces reales y considérese la ecuación P(x) = 0, donde P(x) está escrito en orden decreciente de las potencias de x. Aplicaremos el teorema de Descartes:

El número de raíces positivas no es más grande que el número de variaciones de signos de P(x).

El número de raíces negativas no es más grande que el número de variaciones de signos de P(-x).

Se dice que tiene lugar una variación de signo en P(x) si dos términos sucesivos tienen signos opuestos, los términos que faltan son ignorados.

En la situación:

$T(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 5$. Apliquemos la regla: +1 -6 +11 -5, luego hay tres o menos raíces reales positivas.

$T(-x) = -x^3 - 6x^2 - 11x - 5$. Apliquemos la regla: -1 -6 -11 -5, luego no hay raíces reales negativas.

Primera conclusión: Sabiendo que las raíces complejas aparecen de a pares, puede ocurrir: 1) Tres raíces reales positivas, o bien, 2) Una raíz real positiva y dos complejas.

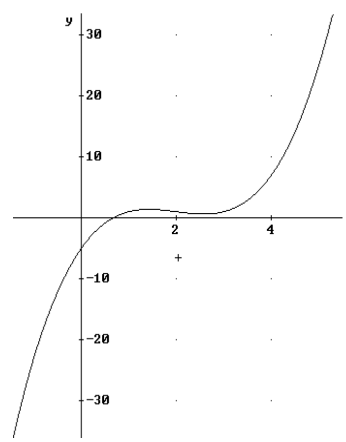
Paso 2: *Se aproximarán las raíces mediante el método gráfico. Se graficará la función T(x) para observar en este caso, donde cruza el eje x. Este punto proporcionará una aproximación inicial de la raíz.*

En la situación:

$T(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 5 = 0$.

Con esta tabla de valores se realiza la gráfica. La curva cruza el eje x entre 0 y 1, encontrando una aproximación de la raíz de 0.62, que se acerca a la raíz aproximada.

x	$T(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 5$
-1	-23
0	-5
0.5	-0.875
0.6	-0.344
0.62	-0.248072
1	1
1.5	1.375
2	1
2.5	0.625
2.8	0.712
3	1



Paso 3: *Se aproximarán las raíces mediante un método gráfico, pero en este caso usando herramientas computacionales como pueden ser los programas Derive, Winfun o Graphmat.*

Aclaración. Este trabajo se puede hacer en la sala de cómputos, donde los alumnos en grupo puedan verificar que la gráfica que realizaron manualmente se aproxima a la obtenida con la PC. Asimismo, se podrá obtener una mejor aproximación a la raíz buscada.

Paso 4: Se explicará a los alumnos el método de Newton y el método de Newton – Raphson. En cada iteración del método de Newton debemos evaluar no sólo f(x) sino también f'(x), lo cual suele ser tedioso de realizar. Surge así la siguiente variante del método de Newton que se conoce como método de Newton - Raphson, y que resulta de aproximar f'(x_n) con f'(x_0)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}, \quad n = 0,\ 1,\ \ldots.$$

En la situación:

Se sabe que el valor aproximado a una raíz de $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 5 = 0$ se encuentra en el intervalo [0, 1]. Se realizarán unas tantas iteraciones, teniendo en cuenta ciertas consideraciones: $f\,'(x) = 3x^2 - 12x + 11,\ x_0 = 0$

Se obtienen los datos presentados en la tabla. Mediante el método de Newton - Raphson se ha encontrado el valor aproximado de la raíz de la ecuación $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 5 = 0$. Este valor: **x = 0.67455474,** es el que nos da la solución del problema propuesto.

n	x_n	x_{n+1}	$f(x_{n+1})$
0	0	0.45454545	-1.14575507
1	0.45454545	0.55870501	-0.55275215
2	0.55870501	0.6089552	-0.30063472
3	0.6089552	0.63628563	-0.17240826
4	0.63628563	0.65195911	-0.10163822
5	0.65195911	0.66119895	-0.06085024
6	0.66119895	0.66673079	-0.0367592
7	0.66673079	0.67007253	-0.02232465
8	0.67007253	0.67210205	-0.01360174
9	0.67210205	0.67333857	-0.00830323
10	0.67333857	0.67409341	-0.00507471
11	0.67409341	0.67455474	-0.00310376
0.67455474			-0.00310376
Raíz aproximada:		**x =**	**0.67455474**

Paso 5: *Se aproximarán las raíces mediante el uso de un software específico. En este caso, se utiliza un programa hecho en MATLAB.*

Puesta en común. Esta se realizará mediante el debate entre los grupos de alumnos y la explicación pertinente del profesor a cargo. Mediante la misma se llegará a la solución del problema propuesto como disparador de este trabajo.

Conclusión. Se ha constatado que la temperatura promedio puede llegar a tomar el valor de 0° C, y como consideramos a x en millones de años, esto se producirá aproximadamente a 674555 años de comenzada la irradiación de calor de la estrella sobre el planeta

Resultados y conclusiones

Hubo una muy buena respuesta por parte de todos los grupos de trabajo. La experiencia resultó positiva. La presentación y discusión de las propuestas de trabajo (clase de ensayo) permitió aclarar algunas dudas que no se habían presentado durante el desarrollo del Curso.

Los participantes observaron además, que esta propuesta metodológica podían implementarla en los temas subsiguientes a ecuaciones polinómicas: ecuaciones exponenciales, logarítmicas, trigonométricas, con amplia aplicación en otras disciplinas (como física, química, estadística, etc.). Si bien algunos de los participantes no daban este tema en la actualidad (por ser docentes de otros Cursos) observaron y propusieron su aplicación en el área de Tecnología. Los principales aportes de este trabajo son:

La incorporación y contemplación de aspectos pedagógicos y educativos.

La aplicación de una variedad de estrategias apropiadas para resolver distintas situaciones problemáticas.

El incremento de la motivación y el desarrollo de las destrezas.

Bibliografía

Ausubel, D., Novak, J. (1997) *"Psicología Educativa. Un punto de vista cognitivo",* México, Trillas.

Brousseau, G. (1987) *"Fondements et méthodes de la didactique. Recherches en Didactique des Mathematiques"*, Vol. 7, Nº 2, pp. 33-115, La Pensée Sauvage, Grenoble France.

Chevallard, Y., Bosch, M. - GASCÓN, J. (2000) *"Estudiar Matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje",* 2º Ed., Barcelona: ICE, Universidad Autónoma de Barcelona, Horsori.

Gerald, C., Wheatley, P. (2000) *"Análisis Numérico con Aplicaciones",* México, Pearson Educación.

Kaczor, O., Schaposchnik, R. (1999) *"Matemática I"*, Argentina, Santillana.

Nakamura, S. (1992) *"Métodos Numéricos Aplicados con Software",* México, Prentice Hall Hispanoamericana, S.A.

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA SOBRE DIFERENTES RELACIONES DIDÁCTICAS EN EL PROCESO DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA EN CARRERAS DE INGENIERÍA.

Jorge Azpilicueta, Alicia Ledesma**
Universidad Nacional de Córdoba. Argentina.
e-mail: jorgeazpilicueta@arnet.com.ar

Resumen

Dada la relevancia que tiene en la actualidad el currículum de las Matemáticas en carreras de ingeniería, el CONFEDI (Consejo Federal de Decanos de Ingeniería) ha considerado y dejado establecido que en el proceso de modernización de la enseñanza es necesario formular adecuadamente los objetivos de la educación matemática, describir el papel que desempeña en la formación de los ingenieros y en su práctica profesional, seleccionar contenidos y distribuirlos correlativamente a lo largo de la carrera, precisar sus alcances y elegir de manera adecuada los aspectos metodológicos del trabajo en el aula, el que debe tener un fuerte acento en el planteo de situaciones problema vinculados con la profesión.

Estos propósitos docentes deben tener en cuenta en primer lugar cual es la preparación previa de los alumnos que deben cursar Matemática en el primer año de Ingeniería en la Universidad Nacional de Córdoba y en segunda instancia cuales son sus expectativas y el nivel de desempeño, al inicio y durante el desarrollo de dichos cursos.

Para conocer como se manifiestan las posibles relaciones didácticas entre docentes y alumnos durante el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, se plantea como objetivo de esta investigación realizar una evaluación diagnóstica sobre: el rendimiento escolar de los alumnos que ingresan en el Ciclo de Nivelación, las condiciones de enseñanza-aprendizaje en los cursos de Introducción al Análisis Matemático y Análisis Matemático I, y la opinión de los docentes que dictan estas materias en contextos educativos similares.

De los resultados de esta experiencia se puede inferir que la mayor parte de los alumnos que cursan Matemática, tienen cierto grado de dificultad en el aprendizaje de la misma, más por razones de índole metodológica, que por otras causas.

Una evaluación diagnóstica de este tipo es siempre un punto de partida muy útil para la toma de decisiones con el fin de elaborar un plan de acción metodológico que facilite el logro de los aprendizajes matemáticos en este nivel educativo y contribuir al desarrollo de la Didáctica de la Matemática como disciplina científica.

Introducción

Esta experiencia visualiza cuales son las relaciones didácticas que se establecen entre Profesor y Alumno en el Ciclo de Introducción a la Matemática y en el curso de Análisis Matemático I en la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de la UNC.

Se parte de la premisa general de que un profesor se encuentra con sus alumnos en el aula para enseñar un conocimiento matemático determinado que deberán aprender los alumnos. Enseñar significa crear las condiciones que producirá la apropiación del conocimiento por parte de los estudiantes. Para un estudiante "aprender" significa involucrarse en una actividad intelectual cuya consecuencia final es la disponibilidad del conocimiento en su doble condición de herramienta y objeto. Las realidades pueden ser otras y dependerán de las interacciones que se puedan establecer entre ambos protagonistas de este proceso.

La Matemática ayuda a pensar, a inducir y deducir, a analizar y sintetizar, a generalizar y abstraer y a realizar otras operaciones mentales que contribuyen al desarrollo de la inteligencia Nickerson, R. [8]; Resnick, L.[9]; Guzmán, M.[4]; Fernández, V. et al [3] y Kilpatrik, J.[6]. Para Artigue, M. [1] el conocimiento matemático puede ser una manifestación de la interacción antes mencionada para el profesor, pero no del todo para un cierto número de estudiantes. O al contrario ser una manifestación para algunos estudiantes y puede no serla para el profesor.

Sin importar cuales son las intenciones al llegar a la Facultad de Ingeniería, cada alumno va a tener más o menos éxito o a fracasar en su proyecto. Del otro lado, según la historia personal del profesor, su propia representación y conocimiento de la Matemática, su concepción del aprendizaje de la Matemática, su voluntad de conocer y la fuerza de las restricciones a la cuales esté sometido, intentará hacer valer y defender sus convicciones en el marco del currículum del Cálculo, según los objetivos y los aspectos metodológicos de la educación matemática en su Institución, González, J.[4]; Moitre,D. [7] y Azpilicueta, J. [2].
Para lograr un punto de partida con mayor conocimiento de la realidad de los alumnos ingresantes a la Facultad de Ingeniería, el objetivo de esta investigación es realizar una evaluación diagnóstica para conocer el grado de preparación, rendimiento y las expectativas que tienen los estudiantes en relación a la Matemática en los cursos iniciales, y la opinión de los docentes que enseñan esta materia en la UNC, a fin de optimizar las relaciones didácticas entre ambos protagonistas de este proceso de enseñanza-aprendizaje.

Metodología

Se trabaja en tres direcciones a través de encuestas a docentes y alumnos:
La encuesta Nº 1 se realiza a los alumnos que cursan el Ciclo de Nivelación 2001, en dos comisiones: la 116–Ingeniería Electrónica- y la 162–Ingeniería Industrial-, con un total de 100 alumnos (tamaño de la muestra igual al quince por ciento del total de alumnos). Se analiza en general la categoría rendimiento en el secundario y en particular las categorías en la materia Matemática, del curso de nivelación.
La encuesta Nº 2 está orientada a determinar cuales son las condiciones iniciales de los alumnos que cursarán Análisis Matemático I, habiendo cursado previamente, Introducción al Análisis Matemático. El tamaño de la muestra es igual a 62, de un total de 350 alumnos del curso regular.
La encuesta-entrevista Nº 3 se realiza a docentes que enseñan Matemática y/o Análisis Matemático tanto en carreras de ingeniería como en otras carreras que tienen Matemática en su currícula (Geología, Economía, Ciencias Químicas) en la Universidad Nacional de Córdoba. El objetivo de la misma es considerar distintos aspectos pedagógico-didácticos y específicos del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en carreras para no matemáticos.

Resultados

Respecto a la encuesta Nº 1 se observan los siguientes resultados:
A) Rendimiento académico en el último curso que realizó el alumno en el Secundario, según el grupo al cual considera pertenecer.

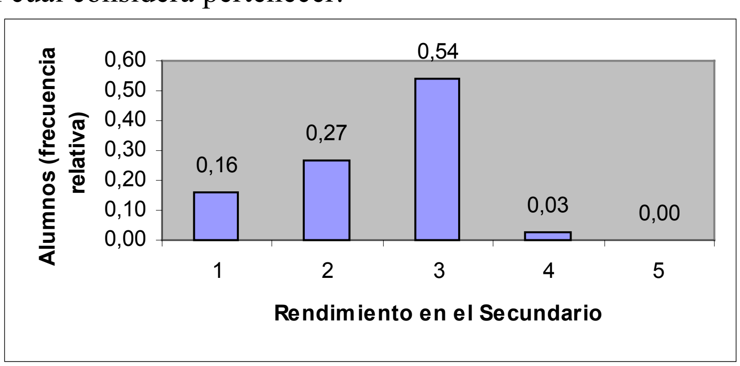


Fig. 1. Rendimiento académico del último curso del secundario categorizado como: 1: grupo de los mejores; 2: grupo de los destacados; 3: grupo de los normales; 4: grupo de los mediocres; 5: grupo de los peores.(Ajuste prueba de Chi-cuadrado).

B) Respecto a la asignatura Matemática la Tabla Nº1 muestra: aprendizaje de la materia, adecuación de carga horaria, contenidos desarrollados y actividades propuestas (cantidad y calidad).

	No opina	Muy bueno	Bueno	Aceptable	Pobre
Aprendizaje	0,05	0,36	0,38	0,21	0
Adecuación	0,06	0,2	0,34	0,31	0,09
Cantidad	0,06	0,18	0,48	0,24	0,04
Calidad	0,08	0,24	0,41	0,23	0,04

C) Distribución del tiempo en estudio dedicado a Matemática.

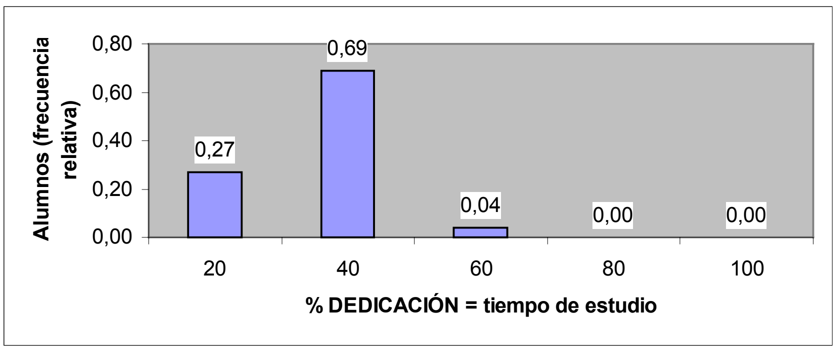


Fig. 2. Tiempo de los alumnos dedicado al estudio de la materia. (Ajuste prueba de Chi-cuadrado).

D) Grado de dificultad de los alumnos en Matemática.

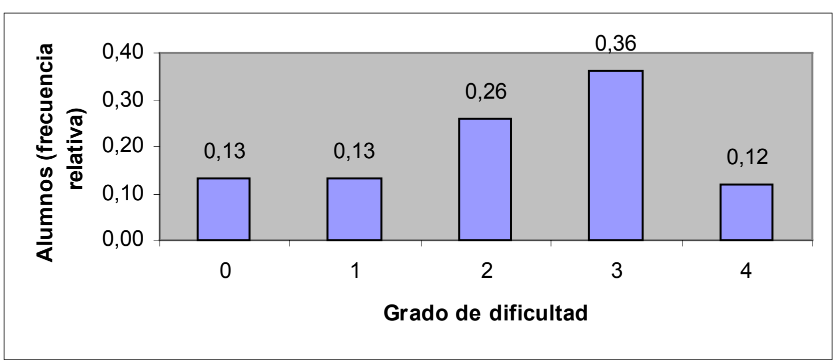


Fig. 3. Grado de dificultad categorizado como: 0: no opina; 1:muy alto; 2: alto; 3: medio; 4: bajo.

E) Desempeño del profesor de matemática en el curso introductorio ver Tabla Nº2.
Tabla Nº2: Respuesta de los alumnos a las actividades del Profesor.

	No opina	Muy bueno	Bueno	Aceptable	Pobre
Profesor (dictado)	0,05	0,65	0,16	0,14	0
Profesor (organización de contenidos)	0,05	0,42	0,41	0,12	0
Profesor (preguntas-respuestas)	0,06	0,61	0,22	0,09	0,02
Profesor (estímulo)	0,08	0,24	0,41	0,23	0,04

La encuesta Nº2 tiene tres items: A. Condiciones iniciales de los alumnos que cursarán Análisis Matemático I; B. Forma de estudio que realizan los alumnos y C. Expectativas al iniciar el curso de Análisis Matemático I.
Para el punto A se observa en la Tabla Nº3.
Tabla Nº3: El cumplimiento de las expectativas, las dificultades en el cursado de la materia y la comprensión e integración de contenidos por los alumnos.

	Totalmente	Parcialmente	Ninguno
Cumplimiento expectativas	40%	57%	3%
Dificultades en el cursado	32,78%	62,30%	4,92%
Comprensión e integración	14,00%	79,00%	7,00%

El punto B, resume algunas condiciones de estudio que realizan los alumnos en la clase de Análisis Matemático I (2001) y fuera de ella (Tabla Nº4).

Pregunta (Item B)	Si (%)	No (%)
1. Le gustaría poseer otra forma de estudio más eficaz	75,41	24,59
2. Le resulta fácil estudiar solo.	65,58	34,42
3. Le resulta fácil estudiar en grupo.	63,94	36,06
4. Le resulta más fácil que el profesor exponga siempre.	90,17	9,83
5. Le resulta fácil estudiar parte de los temas por libros.	32,79	67,21
6. Pone atención durante la explicación del profesor.	100,00	0,00
7. Realiza preguntas durante la clase si no entiende algo del tema.	57,38	42,62

Para el punto C se presentan en la Tabla Nº 5 las categorías de las expectativas que tienen los alumnos al iniciar el curso de Análisis Matemático I (2001) en una escala de 1 a 10

Categoría	Expectativa	Respuesta (%)
1	Finalizar el cursado sabiendo razonar y aplicar los conocimientos adquiridos en la Práctica Profesional.	24,15
2	Aprender e integrar conocimientos.	16,6
3	Recordar los contenidos aprendidos en Análisis Matemático I para no tener dificultades en las materias correlativas.	16,67
4	Entender los conceptos desarrollados en la clase.	9,38
5	Que todos los temas sean desarrollados durante el cursado.	6,25
6	Aprobar la materia.	5,20
7	Lograr comprender algún tema en particular (por ej. Integrales, Derivadas, Funciones, etc.)	4,17
8	Que se profundicen más los contenidos de la materia.	3,13
9	Que las explicaciones del docente sean claras.	3,13
10	Mejorar la relación docente/alumno.	3,00

La encuesta-entrevista Nº 3 realizada a docentes que enseñan Matemática o Análisis Matemático visualiza que:
existen múltiples causas por las cuales los alumnos tienen bajo rendimiento en la materia.
el nivel de los estudiantes, en Matemática al inicio de los cursos universitarios es regular o malo.
Las dificultades se pueden categorizar, de mayor a menor, en los siguientes niveles: 1:Mala base en el secundario; 2 :Escaso desarrollo del pensamiento lógico; 3:Dificultad lecto-comprensiva; 4: Dificultad en la aplicación de los conceptos matemáticos; 5: Aprendizaje memorístico; 6: Falta de interés de los alumnos por ser Matemática materia básica en la Carrera; 7: Falta de una metodología de enseñanza adecuada; 8: Falta de integración de los conceptos matemáticos con la carrera; 9: Clases tradicionales. Profesor conductista.

Exposición y Discusión de Resultados
En relación al rendimiento académico en el secundario, la mayoría de los alumnos se consideran situados en el grupo de los normales, seguido del grupo de los destacados, de los mejores y un bajo porcentaje en el grupo de los mediocres. Si se agrupan las tres primeras categorías se observa que prácticamente el 97% de los alumnos están en condiciones para comenzar un proceso de aprendizaje de la matemática sin mayores dificultades o al menos motivados para iniciarlo (Fig. 1).
Respecto de la asignatura Matemática que se dicta en el Ciclo de Nivelación (Tabla Nº1) se observa que el aprendizaje ha sido muy bueno y bueno en más del 70%; que la adecuación de los contenidos desarrollados y su carga horaria aproximadamente en un 70% ha sido buena y aceptable, y la relación cantidad y calidad de las actividades propuestas se han definido en casi un 70% como buena y aceptable, y un 20% muy buena. La mayoría de los alumnos ha dedicado alrededor de un 40% (promedio) del tiempo de estudio a Matemática, con un grado de dificultad alto y medio mayoritariamente (Fig. 2 y Fig. 3). Sin embargo su opinión en relación al desempeño del docente ha sido en general buena, tanto en el dictado de la clase y organización de la asignatura, como las respuestas del profesor para facilitar el razonamiento de los estudiantes (Tabla Nº2).
El análisis de los resultados de la encuesta Nº 2 muestra que para el 40% de los alumnos las expectativas se cumplieron totalmente, un 57% considera que se dieron parcialmente y sólo un 3% opina que no se cumplieron (Tabla Nº3).
Con respecto al grado de dificultad un 33% declara muchas dificultades, un 62% pocas y un 5% ninguna.
En relación a la forma de estudio, se observa en la Tabla Nº 4, gran interés en tener una metodología más eficaz para el aprendizaje de la materia, no obstante no les resulta fácil estudiar las temáticas por libros, les interesa que el profesor exponga siempre y sólo la mitad de los alumnos hacen preguntas en la clase si no comprendieron los temas.
De acuerdo a las expectativas de los alumnos que cursan Análisis Matemático I, la Tabla Nº 5 muestra que el mayor porcentaje (24,15%) se refiere a "finalizar el cursado de la materia sabiendo razonar y aplicar los conocimientos adquiridos en la práctica profesional". Luego siguen en orden decreciente con el 16%, dos categorías "aprender e integrar los conocimientos" y "recordar los contenidos de Análisis Matemático I, para no tener dificultades en las otras materias". Sobre otras categorías y hasta el quinto lugar, los alumnos expresan "entender los conceptos desarrollados en clase" (9,38%) y "que todos los temas sean desarrollados durante el cursado" (6,25%).

La entrevista con docentes que enseñan Análisis Matemático o Matemática General en carreras no matemáticas consideran la existencia de múltiples causas por las cuales los alumnos tienen bajos rendimientos en estas materias. Entre las que se pueden destacar: aprender “sin pensar”; preponderancia de lo visible sobre lo inteligible; falta de capacidad de abstracción (básico para Matemática); lenguaje conceptual sustituido por lenguaje perceptivo que es infinitamente más pobre; metodología de enseñanza en el nivel medio más inductiva y conductista, que impiden alcanzar niveles de comprensión abstracta; falta de preparación y conocimientos de los docentes de nivel medio; falta de interés por el aprendizaje de los educandos; falta de motivación por el aprendizaje o por el proceso de enseñanza-aprendizaje tanto de docentes como de alumnos.

Conclusiones: Como conclusión de esta investigación se puede decir, que los alumnos ingresantes a la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales UNC (2001), tienen afinidad y predisposición en aprender matemática, lo que facilita la relación didáctica profesor-alumno.

En el cursado de esta materia las expectativas de los estudiantes se cumplen parcialmente y la mayor parte de ellos tienen un grado alto y medio de dificultad, lo que impide la integración y comprensión de contenidos de la materia. Los problemas se suscitan en relación a la forma de estudio, expresando gran interés en tener metodologías que faciliten su aprendizaje.

Posibles soluciones se pueden dar al respecto teniendo en cuenta los roles que deben jugar tanto docentes como alumnos. Una de las soluciones es implementar metodologías de aprendizajes asociadas a la participación activa de los estudiantes como la resolución de problemas y otra la capacitación de los docentes en cursos de post-grado, con el propósito de facilitar y coordinar los procesos de enseñanza-aprendizaje de la matemática en contextos no tradicionales.

Bibliografía:

Artigue, M. et al. 1995. *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática*. Grupo Editorial Iberoamérica.

Azpilicueta, J. 2003. *Enseñanza de la Matemática para no matemáticos: una propuesta para considerar la resolución de problemas como metodología activa de aprendizaje de Análisis Matemático*. Tesis de Maestría en Docencia Universitaria. Universidad Tecnológica Nacional. Facultad Regional Córdoba.

Fernández, V. et al. 1999. *Educación Matemática para no Matemáticos*. Ed. Fundación. U.N. de San Juan. Argentina.

González, J. 1997. Unificación curricular: experiencia argentina. I *Encuentro Iberoamericano de Directivos de Enseñanzas de Ingeniería*. Madrid. España.

Guzmán, M. 1991. Para pensar mejor. Barcelona. Paidós.

Kilpatrich, J. 1985. *A retrospective account of the past twenty-five years of research on teaching mathematical problem solving*. In E.A. Silver (Ed.)(pp. 1-15). Hillsdale NY: Lawrence Erlbaum.

Moitre, D. 2000. *Tercer Congreso* Argentino de Enseñanza de la Ingeniería.Tomo I. Bahía Blanca. CONFEDI.

Nickerson, R. et al. 1985. Enseñar a pensar. Aspectos de la aptitud intelectual. Barcelona. Piados. 1987.

Resnick, L. 1987. *Education and learning to think*. Washington, D.C.. National Academy Press

ESTRATEGIAS PARA INTRODUCIR LA TEORÍA DE GRAFOSEN LA ESCUELA MEDIA

Patricia Lestón y Daniela Cecilia Veiga
Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González"
Buenos Aires, Argentina
patricialeston@uolsinectis.com.ar; veigadaniela@yahoo.com.ar

Resumen
El presente trabajo tiene por objetivo presentar a los docentes de la escuela media una propuesta para llevar la teoría de grafos al aula. Dicha rama de la matemática proporciona una variedad de ejercicios y problemas que, por su simpleza, llaman la atención de muchos alumnos, quienes se ven atraídos a resolverlos; por lo que resulta más ameno el aprendizaje de los conocimientos básicos de la teoría de grafos. Es así como se propone trabajar en el *el concepto de 'número', lo que da origen a la aritmética, y sobre el concepto de 'forma', la que da origen a la geometría. Muchas veces, sin embargo, se combinan ambos conceptos dando lugar a propiedades de los números vinculados con las formas de figuras geométricas. Un ejemplo de ello es la Teoría de Grafos que se inauguró con Leonardo Euler (1707-1783) y que ha tenido muchas aplicaciones teóricas y prácticas referentes a figuras de la geometría".*

Esta teoría proporciona una variedad de ejercicios y problemas que, por su simplicidad, llaman la atención de muchos alumnos, quienes se ven atraídos a resolverlos; por lo que resulta más ameno el aprendizaje de los conocimientos básicos de la teoría de grafos.

Es así, como las autoras de este trabajo, proponen llevar al aula algunos problemas que por su importancia histórica o por la facilidad en su resolución permitirán a la vez iniciar a los alumnos en un terreno poco habitual de la matemática. Al mismo tiempo, desarrollar y perfeccionar en los alumnos una manera de pensar matemáticamente bastante alejada de los procedimientos mecánicos que muchas veces invaden nuestras aulas.
"En la situación de cambios en que nos encontramos, es claro que los procesos verdaderamente eficaces de pensamiento, que no se vuelven obsoletos con tanta rapidez, es lo más valioso que podemos proporcionar a nuestros alumnos. En nuestro mundo científico e intelectual tan rápidamente mutante vale mucho más hacer acopio de procesos de pensamiento útiles que de contenidos que rápidamente se convierten en lo que Whitehead llamó "ideas inertes", ideas que forman un pesado lastre, que no son capaces de combinarse con otras para formar constelaciones dinámicas, capaces de abordar los problemas del presente." (de Guzmán, 1994)

Marco Teórico

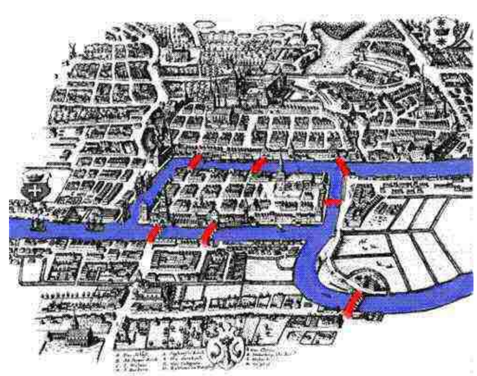
El trabajo se realiza sobre la base de las nuevas teorías de enseñanza-aprendizaje de la matemática; en estas se considera a la resolución de problemas como el eje central de esta disciplina.
Como se dijo anteriormente, la teoría de grafos proporciona una herramienta que permite estimular en los alumnos el razonamiento matemático. Como sugiere Miguel de Guzmán: *"lo que sobre todo deberíamos proporcionar a nuestros alumnos a través de las matemáticas es la posibilidad de hacerse con hábitos de pensamiento adecuados para la resolución de problemas, matemáticos y no matemáticos. ¿De qué les puede servir hacer*

un hueco en su mente en que quepan unos cuantos teoremas y propiedades relativas a entes con poco significado si luego van a dejarlos allí herméticamente emparedados? ... Del enfrentamiento con problemas adecuados es de donde pueden resultar motivaciones, actitudes, hábitos, ideas para el desarrollo de herramientas apropiadas, en una palabra la vida propia de las matemáticas” (Corbalán, 1998).

De la misma forma, se sabe que la sociedad actual exige personas cada vez más creativas, por lo cual , el docente, se ve obligado a dejar de lado los ejercicios rutinarios y las clases puramente expositivas con los que sólo se consigue el desinterés y se impide el desarrollo intelectual de los alumnos; para, finalmente, adoptar una nueva forma de trabajo que fomenta la creatividad, la discusión y la experimentación. En 1965, Polya expresó que si un profesor de matemática *“pone a prueba la curiosidad de sus alumnos planteándoles problemas adecuados a sus conocimientos, y les ayuda a resolverlos por medio de preguntas estimulantes, podrá despertarles el gusto por el pensamiento independiente y proporcionarles ciertos recursos para ello”* (Santaló, 1986).

Es así como surgen los problemas como primeros protagonistas en la educación actual y lo que se propone en este trabajo, no es reemplazar esta nueva metodología, sino complementarla. Esto significa que los problemas que se resuelven con conceptos de la Teoría de Grafos no son más que eso, *problemas*; y como tales, permiten que el aprendizaje de los alumnos sea *significativo*. Sin embargo, muchos ejemplos se pueden acompañar por preguntas sencillas a partir de las cuales es posible definir conceptos básicos de este rama de la matemática que, por otro lado tiene múltiples aplicaciones, por ejemplo, en las ciencias sociales y en medicina; entre otras disciplinas. Al mismo tiempo son útiles para estudiar las relaciones familiares en una sociedad trivial y la difusión de una enfermedad contagiosa, entre otros numerosos ejemplos de situaciones provenientes de diversas áreas.

En general, existen muchos problemas en la Teoría de Grafos que pueden ser resueltos aún sin tener conocimiento de esta rama de la matemática; de hecho, muchos de los problemas aparecen en revistas de entretenimiento al alcance de cualquier persona, y en general, se los resuelve aplicando conceptos básicos de esta disciplina. Es evidente que esto constituye una ventaja para su enseñanza. No obstante, el docente debe aprovechar este beneficio para enseñar conceptos nuevos y perfeccionar los procedimientos que los alumnos utilizan en su resolución; sobre esto Santaló (1986) señaló: *“Enseñar matemáticas debe ser equivalente a enseñar a resolver problemas. Estudiar matemáticas debe ser lo mismo que pensar en la solución de algún problema... Naturalmente que se trata de problemas en el sentido amplio, no solamente de problemas reducibles a cálculos numéricos. Lo importante es que haya algo que buscar, o un enigma que aclarar dentro de un contexto bien planteado. Solamente hay que enseñar, como requisito previo, el lenguaje o la nomenclatura usual en matemáticas, para poder plantear los problemas correctamente y para entender la bibliografía corriente”.*



Anteriormente, se mencionó que gran parte de los alumnos, resuelven problemas de la Teoría de Grafos aún antes de conocerla y la ventaja que esto representa para su enseñanza. Sin embargo, es importante aclarar que el docente debe aprovechar esto para acercar a los alumnos, nuevas y mejores herramientas para la resolución de problemas; Schoenfeld explica esto advirtiendo que "*una de las diferencias entre los expertos matemáticos y los alumnos en la resolución de problemas estriba en que estos últimos carecen de metaconocimiento o control de sus propios recursos de solución. En ese sentido, el profesor debe ayudar mediante diversas técnicas a hacer explícitas las estrategias de las que dispone el alumno y su utilidad en la solución del problema*". (Echeverría, 1997).

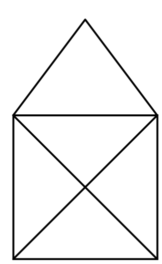
Actividades propuestas

A continuación se proponen una serie de problemas, dentro de los que se encuentran algunos de los problemas más conocidos y otros que ayudan a complementar la enseñanza de la Teoría de Grafos.aula una serie de problemas, que por su importancia histórica o por la facilidad en su resolución permitirán a la vez iniciar a los alumnos en un terreno poco habitual de la matemática. Al mismo tiempo, desarrollar y perfeccionar en ellos una manera de pensar matemáticamente bastante alejada de los procedimientos mecánicos que muchas veces invaden nuestras aulas. De la misma forma, se sabe que la sociedad actual exige personas cada vez más creativas, por lo cual, el docente, se ve obligado a dejar de lado los ejercicios rutinarios y las clases puramente expositivas con los que sólo se consigue el desinterés y se impide el desarrollo intelectual de los alumnos; para, finalmente, adoptar una nueva forma de trabajo que fomenta la creatividad, la discusión y la experimentación. Muchos de los problemas aquí presentados se pueden acompañar por preguntas sencillas a partir de las cuales es posible definir conceptos básicos de este rama de la matemática. En general, existen muchos problemas en la Teoría de Grafos que pueden ser resueltos aún sin tener conocimiento de esta rama de la matemática; de hecho, muchos de los problemas aparecen en revistas de entretenimientos al alcance de todos, y en general, se los resuelven aplicando conceptos básicos de esta disciplina. Es evidente que esto constituye una ventaja para su enseñanza. No obstante, el docente debe aprovechar este beneficio para enseñar conceptos nuevos y perfeccionar los procedimientos que los alumnos utilizan en su resolución

Introducción

¿Quién no se ha encontrado alguna vez frente a un problema como el siguiente y ha pasado horas intentado resolverlo?

Dibujar el siguiente esquema sin levantar el lápiz y sin pasar dos veces por la misma línea.



Es casi cotidiano la resolución de este tipo de problemas de ingenio en los que, sin darse cuenta, se aplican conceptos básicos de la teoría de grafos.

La elección de esta rama de la matemática para realizar un trabajo se debe a sus características tan particulares. Ya en 1995 Santaló afirmó: "*La matemática se edifica sobre*

Problema 1: Los siete puentes de Königsberg

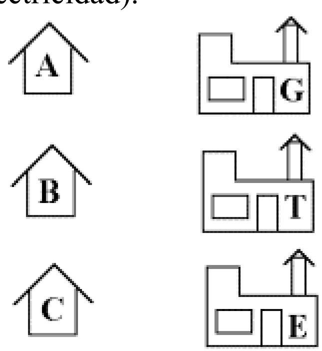
Sin duda, uno de los problemas más conocidos históricamente es el llamado: *Los siete puentes de Königsberg*; la resolución de este problema, se debe a Euler quién presentó su ingeniosa solución en la Academia rusa de San Petersburgo en 1735. Newman, comenta que *Euler trabajaba con tanta facilidad que se decía que escribía memorias durante la media hora entre la primera y la segunda llamada para la comida... El problema –cruzar los sietes puentes en un paseo continuo, sin volver a cruzar ninguno de ellos- se consideraba como una pequeña diversión de los ciudadanos de Königsberg. Euler, sin embargo, descubrió un importante principio científico escondido en este acertijo.*

En pocas palabras, el problema es el siguiente:
La ciudad de Königsberg está situada a orillas del río Pregel y sobre dos de sus islas, las diversas partes de la ciudad se conectan entre sí por medio de siete puentes. Un turista quiere dar un paseo por la ciudad , pero desea partir de un punto cualquiera , atravesar una sola vez por cada uno de los puentes, y regresar al punto de partida. ¿Es posible realizar este paseo?

El trabajo completo de Euler se puede encontrar en Newman, volumen 4 de *Sigma, el mundo de las matemáticas*, Grijalbo, 1997. No obstante, si se realiza un estudio del trabajo realizado por Euler, resulta admirable el análisis que realiza a lo largo de toda la resolución. Se observan con claridad todas las características propias de un problema: análisis de datos, clasificación, aplicación de algoritmos, etc.

Problema 2: Las tres casas (Versión tomada de *Piñeiro*, 2000)

Otro problema muy conocido es el que se describe a continuación:
Tenemos tres casas (A, B y C) y tres centrales de servicios (de gas, de teléfonos y de electricidad).



El objetivo es conectar cada una de las casas con cada una de las centrales de modo tal que ninguna de las nueve líneas de conexión se cruce con otra.

La incertidumbre que crea este problema en los alumnos se debe a que no pueden "separarse del plano". Es decir, tener una idea espacial del problema.

Problema 3: El cartero chino

Otro problema histórico es el conocido como *El problema del cartero chino*. En este problema se desea minimizar el recorrido que debe hacer un cartero para cumplir con el reparto del correo. Una de las variantes posibles para trasladarlo al aula es plantear este problema para un cartero de la ciudad en la que se vive, tomando por ejemplo, la porción de mapa que corresponde a la escuela.

Problema 4:Coloreo de mapas

Un problema famoso es el conocido como problema de los cuatro colores. Se trata de probar que cualquier mapa plano coloreado con sólo cuatro colores teniendo en cuenta la región externa y que dos regiones fronterizas no pueden ser coloreadas con el mismo color. Otra opción posible para el trabajo en el aula, es pedirles a los alumnos un mapa de su país y que lo coloreen con la cantidad mínima de colores.

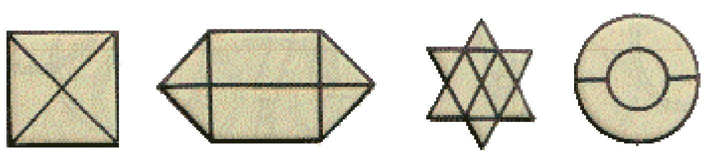
Otros problemas posibles:

1) En un país hay 7 lagos conectados por 10 canales de forma que se puede ir de cualquier lago a cualquier otro lago nadando, ¿cuántas islas hay?

2) Un barquero debe cruzar un río con un lobo, una cabra y un repollo. Su pequeño bote de remos no puede cargar más de una cosa en cada viaje; además no puede dejar al lobo solo con la cabra ni a la cabra con el repollo.
Represente la situación mediante un grafo, indicando en cada vértice del mismo lo que queda en la primera orilla y en la arista lo que viaja en la barca.
Indique una solución posible del problema a partir del grafo.

3) En una reunión familiar, la dueña de casa decide ubicar a los cinco invitados en una mesa redonda para cenar. Los invitados eran: Ana, la dueña de casa; Berta, actual esposa del ex marido de Filomena, Clara, íntima amiga de Filomena; Dorotea, suegra de Ana y hermana de Berta; Elsa, cuñada de Ana y finalmente, Filomena.
Esta tarea se presentaba como un dolor de cabeza dadas las enemistades entre ellas existentes. Por lo que se sabe, se ha podido determinar que Ana suele siempre discutir agriamente con Dorotea y con Elsa. Por su parte Berta no soporta la cercanía de Clara ni de Filomena; mientras que Dorotea está sumamente disgustada con Filomena. ¿Es posible sentar a las invitadas alrededor de la mesa redonda de modo tal que reine la paz? Por su parte, Elsa solamente aceptaría sentarse con sus amigas Berta y Filomena.

4) Intenta dibujar sin levantar el lápiz de la hoja ni pasar dos veces por la misma línea los siguientes grafos.



Conclusiones

La Teoría de Grafos presenta tanto a docentes como a alumnos un material que permite hacer que las clases de matemática pierdan la excesiva formalidad con la que se las trataba años atrás.
El interés que los alumnos pueden presentar hacia este tipo de actividades debe ser uno de los objetivos de los docentes. Generar en los adolescentes una atracción hacia un tema

puramente matemático es un logro con el que los docentes actuales pueden contar al hacer uso de este tipo de trabajo.

Cualquier aporte que pueda hacerse a las clases con temas que permitan el trabajo grupal, la discusión y el razonamiento debe considerarse como un avance en la enseñanza actual de la matemática. No debe olvidarse que uno de los principales objetivos de la enseñanza es desarrollar y perfeccionar el razonamiento lógico-matemático, la utilización del lenguaje propio de la matemática y, a la vez, crear en los alumnos una actitud crítica frente a los distintos desafíos que se propongan.

Es cierto que para muchos docentes puede ser más fácil trabajar con clases expositivas y que los alumnos sean simples espectadores. Sin embargo, es sabido que para que un aprendizaje sea significativo, el alumno tiene que generar sus propios conocimientos. A esto apunta la propuesta de utilizar problemas para enseñar la Teoría de Grafos y permitir el acercamiento entre la Matemática y la vida cotidiana.

Bibliografía

Corbalán, F. (1998). *Juegos Matemáticos para secundario y bachillerato*. Madrid, España: Editorial Síntesis.

Crespo Crespo, C. (2001). Cruzando puentes, pintado mapas, ... Una introducción a la teoría de grafos. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. Volumen 14, pp 89-92, México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Crespo Crespo, C. (2002). Guía de ejercicios Matemática Discreta – Teoría de Grafos. Especialidad en Computación – ISP "Dr. Joaquín V. González". Buenos Aires, Argentina.

de Guzmán, M. (1994). Tendencias Innovadoras en Educación Matemática, JAEM. En http://www.minedu.gob.pe/dinesst/udcrees/material_docentes/amatematica/edumatematica_sxxi.doc

Echeverría, M. (1997). *La solución de problemas en matemática*. En Pozo, J., Echeverría, M. y otros. La solución de problemas. En *54-83.* Buenos Aires, Argentina: Editorial Santillana.

Euler, L. (1736). Los siete puentes de Königsberg. En Newman, J. (Ed.) *Sigma. El mundo de las matemáticas.* Volumen 4, pp 164-171. Barcelona, España: Editorial Grijalbo.

Santaló, L. (1986). *La enseñanza de la matemática en la escuela media.* Buenos Aires, Argentina: Editorial Docencia.

Santaló, L. (1995). *Matemática 3. Iniciación a la creatividad.* Argentina: Editorial Kapelusz.

Piñeiro, G. (2000, Marzo). Curiosidades Matemáticas: Los puentes sobre el río Pregel. *Axioma en línea*

ENSEÑANZA DE LA ESTADÍSTICA, INTERACTUANDO CON OTRAS DISCIPLINAS.

María Inés Rodríguez
Universidad Nacional de Río Cuarto.- Argentina.
mrodriguez@exa.unrc.edu.ar

Resumen

La sociedad actual demanda a su sistema educativo una formación estadística que capacite a sus ciudadanos para entender, comprender y resolver, la diversidad de información y problemas surgidos desde diversos ámbitos e interpretarlos en los contextos culturales que se presenten. En consecuencia, las curriculas educativas han incrementado sus contenidos estadísticos, desde la enseñanza primaria, hasta la universitaria, destacando la necesidad de la enseñanza de la estadística como una valiosa herramienta de la metodología científica. Un buen ejemplo lo constituye la estructura curricular del Sistema Educativo Argentino que a partir de 1995 establece la escolaridad obligatoria en 10 años, incluyendo la estadística desde los primeros cursos del nivel inicial. La formación básica en estadística ha sido encomendada, en los niveles no universitarios, a los profesores de matemáticas que generalmente no han recibido capacitación específica en el área. Para los profesores que se encuentran en esta situación, la enseñanza de la estadística supone un problema debido a que se requieren conocimientos, destrezas y experiencias en el tratamiento y elaboración de información que demanda: la selección de técnicas e instrumentos que mejor se adapten a los datos, la flexibilización para cambiar procedimientos, la interpretación adecuada de los resultados y la capacidad para evaluar la validez y fiabilidad de las conclusiones extraídas. Ser capaz de dominar esta actividad o enseñarla a un grupo de estudiantes no es una tarea simple, necesita de preparación previa y cierta experiencia. Holmes (2002) indica que, puesto que las lecciones de estadística, dentro de los libros de matemática han sido generalmente escritas por matemáticos, el objetivo preferente de las mismas es la actividad matemática y no la actividad estadística. Esta puede ser la razón por la cual prevalece la idea de que la estadística que se enseña en las escuelas o niveles básicos universitarios no refleja suficientemente la naturaleza eminentemente práctica de esta disciplina.

Considerando como alternativa superadora de este inconveniente, su enseñanza a través de actividades en las que, los alumnos "descubran" conceptos estadísticos al resolver problemas del mundo real, y esperando brindar un aporte que pueda estimular la reflexión acerca de la educación estadística, se presenta en este trabajo una experiencia implementada en nivel medio y que se puede realizar también en cursos universitarios, para la enseñanza de la estadística a través de la realización de proyectos asequibles al nivel del alumno, tratando de integrar la estadística dentro del proceso más general de investigación en diversas disciplinas.

Introducción

La estadística es hoy día necesaria a un número creciente de personas, provocando, en consecuencia, una gran demanda de formación básica en esta materia, formación que ha sido encomendada, en los niveles no universitarios, a los profesores de matemáticas. Al respecto es sumamente importante resaltar las diferencias metodológicas con que se deben enfrentar estos profesores al impartir temas de estadística, ya que el pensamiento estadístico dista mucho del pensamiento determinista que prevalece en la clase de matemática. Una manera recomendable de encarar la enseñanza de temas estadísticos es mediante la realización de proyectos desarrollados en contextos reales. Snee (citado por Smith, 1998) afirma que *"la colección y el análisis de datos están en el corazón del pensamiento estadístico. La colección de datos promueve el aprendizaje por la experiencia y conecta el proceso de aprendizaje a la realidad"*

Es así muy compartida la idea de estimular la enseñanza de la estadística mediante la realización de proyectos, los cuales aportan al alumno, experiencia con la definición de problemas, la formulación de hipótesis, el diseño de un ensayo. También lo hace enfrentar con el problema de la selección y determinación de la muestra, la obtención de datos y el tratamiento del error de medida. Por otra parte y aprovechando las ventajas que brinda la informática, con la posibilidad de realizar gran variedad de gráficos y cálculos estadísticos, los proyectos son el medio adecuado para introducir una nueva filosofía en la enseñanza de la estadística, como es el análisis exploratoio de datos, introducido por Tukey, para quien, *"El análisis exploratorio de datos no puede ser visto como el total de la historia, pero si puede ser visto como la piedra fundamental-primer paso" ... " el análisis exploratorio de datos es el trabajo de detective numérico"*

También cabe destacar que la realización de proyectos, contribuye al desarrollo del estudio cooperativo e interdisciplinario, en los cuales no es muy frecuente que interactúe el profesor de matemática.

Por otra parte las actividades que permiten a los alumnos obtener sus propios datos tienen las siguientes ventajas:

- Despiertan el interés por el análisis de los datos.
- Contribuyen a apreciar la fiabilidad que brindan los datos y a comprender su variabilidad.
- Introducen conceptos y terminología básica en Estadística y Probabilidad.
- Ayudan a comprender la importancia de una selección adecuada de la muestra.
- Inician a los alumnos en las actividades implicadas en el proceso de investigación.

Por tal motivo, y considerando como un aporte que puede estimular la reflexión acerca de la educación estadística, se presenta a continuación las etapas de un proyecto realizado en forma conjunta con docentes y alumnos de nivel medio (ciclo de especialización, 16 y 17 años) de dos colegios de la localidad de Jovita (Córdoba). Este proyecto se puede concebir como verdadera investigación asequible al nivel de los alumnos, en el cual se ha integrado la estadística dentro de un proceso más general de investigación en diversas disciplinas, ya que en el mismo participan docentes de Ciencias Sociales, Naturales, Matemáticas, Lengua, Educación para la Salud, Física, Química, Biotecnología, Informática y Educación Física, quienes desarrollaron en sus correspondientes currículas los temas relacionados con la salud y el proyecto de investigación de acuerdo a planes previamente trazados.

Título del proyecto: hipercolesterolemia en la población estudiantil de jovita 2003.

Desarrollo del Proyecto

- **Etapa 1:**

Los alumnos participantes en el proyecto redactaron, distribuyeron y recogieron los permisos firmados por los padres con el consentimiento para la realización del dosaje de colesterol y confeccionaron la base de datos de la población escolar de instituciones educativas de Jovita urbanos y rurales. Además, docentes y alumnos, se ocuparon de poner a punto las técnicas de medición de las variables.

- **Etapa 2:** Obtención de los datos.

En la tabla siguiente se detallan los centros educativos en los que se trabajó y los porcentajes de población evaluada en cada uno.

Centro educativo	Total Matrícula	No autorizados	Se niegan	Excede edad	Faltaron	Evaluados	Porcentaje
IEMJO	184	10	3	2		169	91,85
IPEM	382	43	4	10	4	321	84,03
Sarmiento	371	11	1	1	9	349	94,07
Tovagliari	122	5	3		5	109	89,34
Jardín Sarmiento	48	1	2			45	93,75
Jardín Tovagliari	15	1			2	12	80,00
Alas	13	3	1	2	2	5	38,46
CENPA	6				3	3	50,00
San Jose	16					16	100,00
Jonas Salk	14					14	100,00
Santiago Derqui	6					6	100,00
Total general	**1177**	74	14	15	25	**1049**	**89,12**

- **Etapa 3: Curso -Taller : *Análisis Exploratorio de datos***

Con la participación de 12 profesores de distintas disciplinas y algunos alumnos interesados en el procesamiento de los datos, se brindaron las herramientas necesarias para que ellos pudieran realizar los cálculos de medidas y gráficos estadísticos, que permitieran resumir la información registrada y conocer la prevalencia de hipercolesterolemia de la población en estudio.

1- Objetivo del Proyecto

Determinar la prevalencia de hipercolesterolemia en la población estudiantil.

2- Procedencia de los datos.

Población en estudio: la totalidad de estudiantes entre 5 y 18 años de edad, que asisten a alguna institución educativa de la localidad.

***Variables**:* determinación de colesterol, mediciones de talla, peso, perímetro pélvico, abdominal y de la tensión arterial

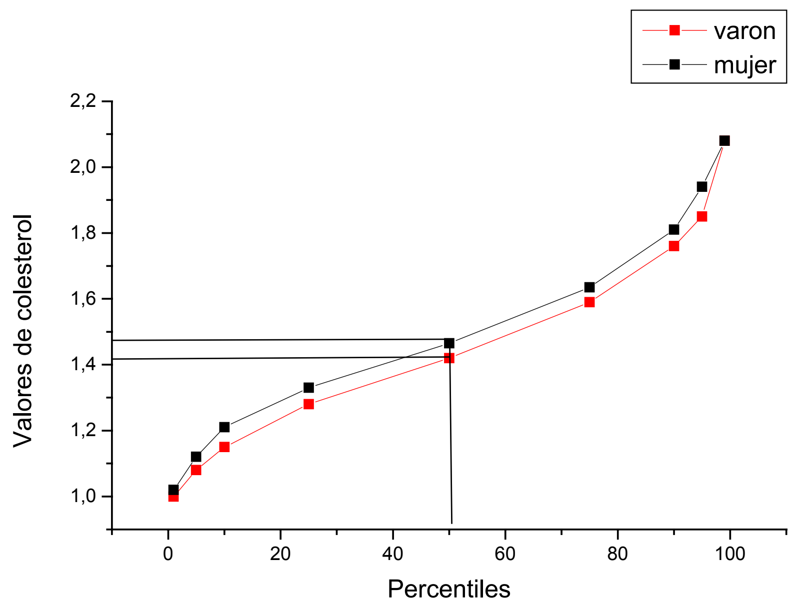
3- Conceptos y Procedimientos estadísticos desarrollados en el Proyecto.

- Los alumnos se encargaron de redactar la nota solicitando la autorización de los padres para realizar el dosaje de colesterol de sus hijos, como así también la encuesta para la obtención de los datos.
- Identificación de tipos de variables y covariables. Escala de medición.
- Elaboración de tablas de frecuencias
- Elaboración de tablas de doble entrada y cálculo de frecuencias condicionadas y marginales.
- Elaboración de gráficos.
- Interpretación de tablas y gráficos.
- Selección de muestras aleatorias extraídas de la población. Importancia del tamaño y representatividad de la muestra.
- Elaboración de argumentos y conclusiones a partir del análisis de datos

4- Algunas actividades realizadas

Acordando con la idea de Bieler quien sostiene que *"El currículum tradicional de Estadística Descriptiva debiera transformarse en dirección al Análisis Exploratorio de datos. Sería esencial dar apoyo sustancial a la actitud investigadora, contra la tendencia de la mayor parte de las transposiciones didácticas de reducir el conocimiento a la técnica"*. Presentamos a continuación algunos gráficos realizados por los alumnos, que muestran los resultados obtenidos.

PERCENTILADO DE COLESTEROL SEGÚN SEXO



GRÀFICO DE CAJAS PARA MASA CORPORAL SEGÚN SEXO

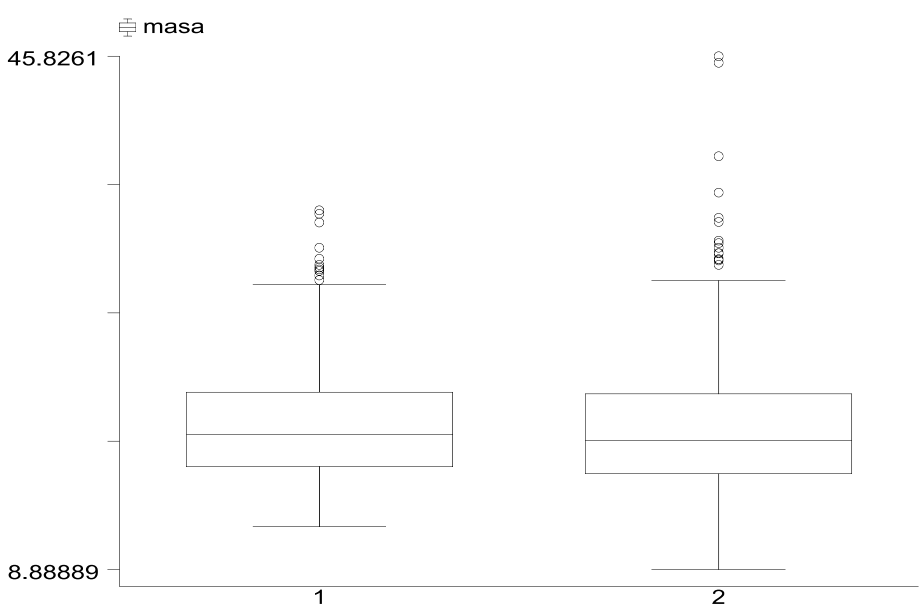


GRÁFICO DE TALLO Y HOJAS DEL COLESTEROL EN MUJERES

```
10* | 00123
10.  | 77888999
11* | 00122234
11.  | 5556678899
12* | 00000111112223333344
12.  | 55555666677777889999
13* | 00000111111222222333333334444444
13.  | 555556666677778888889999999
14* | 00000000000111111111122222222233333444444
14.  | 5555556666677778888999999
15* | 000001111111222222222333344444
15.  | 5556666667777777778888999
16* | 000000011112223333333334444
16.  | 555555566667788888899
17* | 000111222223334
17.  | 55688889
18* | 0000011112233
18.  | 556788
19* | 00334
19.  | 55567778
20* | 01233
20.  | 68
21* | 3
21.  |
22* | 2
22.  |
23* |
23.  |
24* | 3
```

5- Resultados

El haber evaluado a un 90 % de la población estudiantil revela el grado de interés que despertó esta actividad y en ello mucho tiene que ver la actitud de docentes y directivos, que desempeñaron un rol muy importante.

Datos del screening	
Población escolar total	1177
Población evaluada	1054
Porcentaje de alumnos evaluados	89,55%

Resultados	En números	En porcentaje
Población evaluada	1054	100%
Alumnos con Colesterolemia		
Inferior a **176** mg/dl	705	66.88%
Entre **176** y **199** mg/dl inclusive	**219**	**20.78%**
Superior a **199** mg/dl	**129**	**12.24%**

Algunos resultados iniciales revelan que se detectó un 12 % de la población estudiantil de Jovita con colesterol elevado (Superior a **199** mg/dl) . Si discriminamos por sexo, ésto representaría un 13,19% de las mujeres y un 10,17% aproximadamente de los varones.
Haciendo referencia a la presión arterial, vemos que el 50% de los estudiantes posee presión mínima menor o igual a 65, y máxima menor o igual a 110. Sin embargo, el 50% de las mujeres posee presión mínima más alta que el 50% de los varones, mientras que la máxima es igual para el 50% de ambos sexos.
Alrededor del 26,60% de la población estudiantil posee masa corporal adecuada; un 6,38% está excedido de peso; pero lo que resulta interesante destacar es el alto índice de bajo peso, constituido por el 67,02% de los estudiantes, lo que representaría el 61,03% de las mujeres y el 65,12% de los varones.

Conclusiones

Tradicionalmente en la enseñanza de la estadística se ha dado gran importancia al cálculo y a las demostraciones de propiedades, que ahora pierden importancia debido a las posibilidades que brindan las nuevas tecnologías. En la actualidad en lugar de tener que ejercitarse en la realización con lápiz y papel de cálculos y gráficos, el alumno debe aprender el uso de algunas herramientas informáticas, como ser hoja de cálculo, y centrar la atención en la interpretación y significado de los gráficos y cálculos obtenidos. Estamos comprobando con la ejecución de este proyecto capacidades de los alumnos tanto para generar ideas, como para interpretar resultados y conclusiones, que no se habían manifestado anteriormente. Cabe destacar que este trabajo interdisciplinario ha despertado interés por el conocimiento de nociones de estadística no sólo en los alumnos sino también en la generalidad de los docentes, motivando la realización de talleres a los que concurren docentes de distintas disciplinas interesados por mejorar su cultura estadística para poder aplicarla mejor en sus tareas del aula y en su vida cotidiana.

Bibliografía

Batanero C. (2001**).** *Didáctica de la Estadística.* GEEUG- Universidad de Granada. . ISBN 84-699-4295-6 Pag.Internet

Batanero C.,(2000) *¿Hacia dónde va la Educación Estadística*?. Blaix, 15, 2 - 13

Biehler R. (1988) Educational perspectives on exploratory data analysis. *Sixth International Congress on Mathematical Eduction*.

Doran J. y Hernández E (1999) *Las Matemáticas en la vida cotidiana*. Addison-Wesley. Universidad Autónoma de Madrid.

Godino,J. y Batanero C (1998) Construcción y experimentación de un modelo para una instrucción significativa sobre análisis de datos. En L.Pereira-Mendoza et al. (Eds.) Proceedings of the Fifth International Conference on Teaching Statistics (Vol. 2: 905 - 912). Singapur. International Statistics Institute

Tukey J.W. (1972) *Exploratory data analysis***.** N.Y.Addison Wesley

EL DISEÑO Y DESARROLLO DE UN CURSO DE CÁLCULO EN UN SISTEMA DE EDUCACIÓN VIRTUAL.

Ramiro Ávila Godoy
Universidad de Sonora. México
ravilag@gauss.mat.uson.mx

Resumen

Este es un segundo reporte de resultados obtenidos en el desarrollo de un proyecto de investigación, financiado por CONACYT, diseñado para indagar las ventajas y dificultades que se presentan al desarrollar un programa de educación virtual para la formación a distancia de profesores de matemáticas utilizando tecnología de redes (internet, páginas Web, correo electrónico, multimedia, videos). En RELME-16 se presentó un primer reporte (que deberá aparecer en las memorias de dicho evento) en el que se muestran nuestras observaciones y reflexiones relativas a la *asincronía* y la *no presencialidad* del proceso comunicativo en la educación virtual.

En esta ocasión reportamos las observaciones y reflexiones hechas durante la planeación, diseño de materiales y desarrollo del curso de Cálculo correspondiente al Programa de Maestría en Ciencias en Enseñanza de las Ciencias que ofrece el Sistema Tecnológico Nacional mexicano a sus profesores en todo el país, por medio de un Sistema Virtual de Educación a Distancia, gracias al cual ha sido posible llevar a cabo el proyecto de investigación mencionado (ver reporte en las memorias de RELME-16). Tales observaciones y reflexiones constituyen un avance en la dirección del propósito fundamental del proyecto: de investigar la forma de mejorar el uso de la tecnología de redes en el diseño y operación de programas de formación a distancia de profesores de matemáticas en servicio.

La planeación del curso y el diseño de materiales.

Nuestra experiencia previa en la planeación, diseño e instrumentación de cursos de matemáticas en general y de Cálculo en particular fueron nuestra base al disponernos a planear éste, lo mismo que al diseñar las actividades de enseñanza y materiales de apoyo; aunque de inmediato nos surgieron las primeras interrogantes derivadas del hecho de tratarse de un curso para desarrollarse en un sistema virtual de educación, dirigido a una comunidad de estudiantes demasiado numerosa. Algunas de tales interrogantes fueron:
¿Qué diferencia existe entre diseñar actividades para enseñar matemáticas en un sistema virtual y diseñarlas para un sistema presencial?, ¿Qué modificaciones requieren las actividades que han sido diseñadas para ser utilizadas en un sistema presencial, para usarse en un sistema virtual?, ¿Cómo organizar, coordinar y conducir el trabajo de un grupo de estudiantes tan numeroso sabiendo que constituyen una comunidad virtual?

De acuerdo con la experiencia previa mencionada, el punto de partida de nuestra planeación fue la determinación de los propósitos generales, los que establecimos tomando en cuenta las características del mismo, esto es, tomando en cuenta que se trataba de un curso de Cálculo que forma parte de la currícula de un Programa de Maestría en Ciencias en Enseñanza de las Ciencias ofrecido en un Sistema Virtual de Educación a Distancia, dirigido a aproximadamente mil profesores de matemáticas en servicio con la finalidad de que mejoren su desempeño como docentes.
Establecidos los propósitos y de nueva cuenta considerando las características del curso, nos dimos a la tarea de elegir los tópicos que constituirían el contenido disciplinario del mismo, así como los aspectos que sobre dichos tópicos habrían de abordarse.

El siguiente paso en la planeación fue la determinación de los medios a utilizar para el desarrollo del curso. Esta determinación está basada en nuestra concepción de la enseñanza como la actividad a través de la cual se provoca y conduce la actividad de aprendizaje; y del aprendizaje como el resultado de la actividad cognitiva del sujeto que aprende, denominada precisamente, actividad de aprendizaje.

La actividad de aprendizaje (actividad cognitiva) la concebimos como la actividad intelectual que se realiza al identificar, comparar, ordenar, establecer analogías y diferencias, deducir, inducir, conjeturar, verbalizar, contrastar, refutar, demostrar, etc.; mientras que la actividad de enseñanza es la actividad diseñada por el profesor con el propósito de provocar, conducir, controlar y evaluar la actividad de aprendizaje.

En el diseño de las actividades de enseñanza asumimos que para activar intelectualmente a los estudiantes es necesario propiciar, o la ejecución de tareas que denominamos problémicas, o la reflexión sobre ciertos cuestionamientos que denominamos preguntas problémicas. Tanto las tareas como las preguntas problémicas se proponen referidas a una cierta situación elegida o diseñada para el caso. También a estas situaciones las denominamos problémicas. Ejemplos de tareas problémicas son: el análisis de información, el diseño de estrategias de solución, la ejecución de acciones planeadas, la evaluación de resultados, la comunicación oral y escrita, etc.

Con base en estas concepciones nos dimos a la tarea de diseñar las situaciones problémicas a utilizarse en el desarrollo del curso y a seleccionar los materiales bibliográficos complementarios.

El diseño de estos materiales nos obligó a reflexionar y tomar decisiones sobre varias cuestiones importantes que surgieron como consecuencia de saber que los materiales que nos disponíamos a diseñar eran para utilizarse en un curso dirigido a una comunidad muy numerosa de estudiantes en un sistema virtual de educación.

Una primera reflexión nos permitió hacernos conscientes de que al planear y diseñar actividades de enseñanza para ser utilizadas en el sistema presencial, lo hacemos sin precisar la forma en que las desarrollaremos en el aula, quizás por considerar que, estando presentes, podemos decidir qué hacer en el momento justo de presentarla a los estudiantes; es decir, la presentación e instrumentación de la actividad no es usual que la pongamos por escrito e, incluso, con frecuencia la utilizamos de manera diferente en diferentes grupos ya sea porque al instrumentarla en un grupo, nos percatamos de la conveniencia de algún cambio; o por el simple hecho de que reconocemos la conveniencia de cambiar algo por tratarse de un grupo diferente.

Por el contrario, al diseñar actividades de enseñanza para un sistema virtual, una preocupación permanente fue el hacer explícito con el mayor detalle posible, lo que estamos proponiendo que el estudiante haga. Esto es consecuencia de la toma de conciencia de que en este sistema, cuando el alumno se dispone a estudiar, enciende su máquina y no sólo debe aparecer el material con el que queremos que trabaje, sino las instrucciones precisas de lo que queremos que haga con él. A manera de ejemplo, si le presentamos un artículo, es necesario indicar lo que habrá de hacer (leerlo, analizarlo, comentarlo con otros compañeros, contestar algún cuestionario, hacer un resumen, escribir un ensayo, relacionarlo con algún otro documento, etc. Lo mismo si le presentamos una situación problémica o una serie de ellas, es necesario que le indiquemos de manera precisa qué queremos que haga: analizarla, identificar sus elementos, ejecutar alguna o algunas tareas, contestar algunas preguntas, etc.).

Esta concepción de la manera en que un estudiante participa en “una clase” en un sistema virtual, muestra una diferencia con la concepción de la manera en que lo hace un estudiante en el sistema presencial, ya que los motivos por los cuales éste asiste a clases pueden ser muy diversos: puede ser que asista con la disposición de estudiar y aún en este caso esto puede significar escuchar la exposición del profesor, aunque no necesariamente, también puede asistir para que no le pongan falta, porque es su costumbre, porque asistió algún otro compañero o compañera, etc.; en cambio, no podemos imaginar a un estudiante en un sistema no presencial, encendiendo su máquina con otro motivo que no sea realizar alguna actividad.

Esta primera reflexión, que nos mostró una diferencia entre ser estudiante en un sistema presencial y serlo en un sistema virtual, nos condujo a otras más generales, sobre qué significa ser estudiante en un sistema de educación virtual, qué características tiene que lo distinguen de un estudiante en un sistema de educación presencial y en particular, qué características tienen los estudiantes de este programa, considerando que es para ellos para quienes nos disponíamos a diseñar las actividades; y relacionada con éstas surgieron otras: sobre el papel que debe jugar el docente en este sistema de educción, sobre el papel de los medios tecnológicos, etc.

Estas reflexiones, originadas por la necesidad de planear el curso y diseñar actividades para su desarrollo, nos llevaron a la siguiente caracterización del estudiante: es una persona que, por diversos motivos, tiene interés en aprender y considera que está en condiciones de hacerlo. Considera también, que lo que en este programa se le ofrece y en particular en este curso se le ofrecerá como objeto de aprendizaje, responde a sus expectativas de formación.

Esta concepción del estudiante nos llevó a asumir la necesidad de que los materiales que se diseñaran tuvieran características compatibles con las de los estudiantes. Por ejemplo: deberían ser materiales que respondieran a las que, en nuestra opinión, eran sus expectativas: profundizar en el conocimiento de la disciplina y conocer nuevas alternativas para su enseñanza utilizando las nuevas tecnologías; deberían ser motivadores para que reforzaran el interés inicial por aprender que atribuimos a los estudiantes como una de sus características.

Al diseñar las actividades de enseñanza nos surgieron otras interrogantes, tales como las siguientes: ¿Cómo deben diseñarse las actividades para propiciar que los estudiantes realicen procesos interactivos con el objeto de estudio, es decir, para conseguir que observen, exploren, conjeturen, experimenten, analicen, etc.? o ¿cómo propiciar la interacción comunicativa entre los estudiantes?, esto es, ¿cómo conseguir que formulen planteamientos o emitan opiniones acerca de la situación problémica, objeto de estudio?, ¿cómo lograr que se interesen en conocer lo que dicen u opinan sus compañeros y lo contrasten con lo que ellos piensan y, cuando haya diferencias, cómo estimular a que refuten?

Para ilustrar el resultado de estas inquietudes a la hora de diseñar las actividades de enseñanza, mostramos a continuación la primera situación planteada a los estudiantes al iniciar el curso (desgraciadamente el espacio disponible para este reporte es muy breve y, en consecuencia, hace imposible mostrar más de un ejemplo de las actividades diseñadas y aún ésta que mostraremos, la mostraremos incompleta).

“Problema No. 1.Supongamos que al observar un hecho (por ejemplo dos partículas que están girando como puede verse al hacer clic aquí) nos percatamos de la variación de una cierta magnitud (en este caso, la distancia entre las partículas) a medida que transcurre el tiempo. Supongamos también que habiéndonos percatado de lo dicho, nos interesamos en ver cómo está variando dicha distancia. Así que decidimos observar el hecho, fijando nuestra atención en la variable de interés (en nuestro caso podemos observar el fenómeno las veces que queramos, pues es suficiente hacer clic de nuevo en donde hemos indicado para que vuelva a producirse). Hazlo las veces que consideres necesario y luego *describe verbalmente cómo fue variando la distancia entre las partículas a medida que transcurría el tiempo*. Después de haber hecho la descripción de lo observado, intenta *representar gráficamente* (utilizando un sistema de coordenadas cartesianas) la variación. Si ya hiciste las dos cosas propuestas, reflexiona sobre las siguientes cuestiones y contéstalas:

a) ¿De qué factores dependió el que la distancia entre las partículas haya variado como lo observaste? (Señale al menos tres)
b) ¿Cómo hubiera variado la distancia entre las partículas si el período (tiempo en el que dan una vuelta completa) de ambas hubiera sido el mismo? (Describe verbalmente dicha variación y luego represéntala gráficamente)…" (aquí siguen cuatro preguntas problémicas más que no anotamos por falta de espacio).

Esta parte del diseño corresponde a lo que denominamos la etapa de interacción del estudiante con el objeto de estudio. Luego continúa la actividad de la siguiente manera:
"…Ahora estás en condiciones de contrastar con tus compañeros de equipo lo que has aprendido. *Comenten lo que cada quien observó, la manera en que lo hizo, la descripción verbal y la representación gráfica que generaron; los factores que señalaron como determinantes de lo sucedido y las interpretaciones que hicieron respecto a los cambios que en el fenómeno originarían los modificaciones de las condiciones iniciales del mismo*…". (Aquí siguen otras consideraciones, luego continúa) "…Formulen por escrito la versión común que el equipo tiene ahora del fenómeno pues con ella participarán en la discusión del grupo…"
Esta parte del diseño corresponde a lo que denominamos la etapa de interacción comunicativa entre estudiantes.
Por otra parte, las reflexiones señaladas sobre lo que significa ser estudiante en un sistema virtual, también nos llevaron a decidir que era necesario que el "programa" del curso contuviera, además de los objetivos generales y particulares y los contenidos, un apartado en el que se indicara de forma explícita y muy clara, lo que se espera que hagan los estudiantes en cada momento del desarrollo del curso. Esto con dos propósitos: uno, ayudar al estudiante a planear, regular y llevar a cabo las actividades propuestas como necesarias para lograr el aprendizaje requerido para alcanzar los objetivos del curso; y otro, procurar una cierta homogeneidad en la acciones de los estudiantes.
El primer propósito responde al hecho de que consideramos que, en el sistema virtual, cada estudiante decide cómo, cuándo, dónde, de qué manera y durante cuánto tiempo "va a estudiar"; el segundo propósito es resultado de la importancia que le atribuimos a las actividades de verbalización, contrastación y refutación (que forman parte del proceso comunicativo) de las ideas en el proceso de aprendizaje y al hecho de considerar que la homogeneidad de la acciones es condición necesaria para llevar a cabo esta interacción comunicativa entre los estudiantes.
A este apartado, que formó parte del "programa" lo denominamos "organización del curso" y en él se hizo una descripción pormenorizada de la totalidad de las actividades a realizar por los estudiantes, incluidas las de interacción comunicativa, con señalamiento preciso de

los tiempos en que habrían de realizarse. Este apartado ocasionó que el "programa" resultara un documento de aproximadamente cuarenta páginas.

La organización de los estudiantes.
Dado el número de estudiantes, aproximadamente mil, la estrategia consistió en la formación de treinta y tres grupos de, aproximadamente treinta alumnos cada grupo, a los que se les asignó un profesor adjunto, que previamente fue capacitado para desempeñar su labor como orientador, motivador, asesor, coordinador y evaluador de las actividades de los estudiantes. Estos profesores adjuntos, a su vez, fueron coordinados por dos profesores titulares que fuimos los encargados de planear el curso, diseñar los materiales, capacitar (en un curso presencial) a los profesores adjuntos y apoyar a éstos en el desempeño de su labor de apoyo a los profesores estudiantes.

El desarrollo del curso.
En este apartado, el propósito es mostrar las observaciones hechas durante el desarrollo del curso y las reflexiones que dichas observaciones originaron en la dirección ya indicada de investigar la forma de mejorar el uso de la tecnología de redes en el diseño y operación de programas de formación a distancia de profesores de matemáticas en servicio
Durante el desarrollo del curso la atención estuvo centrada en observar la pertinencia o no de la metodología utilizada en el diseño, las dificultades que se presentan al desarrollar las actividades diseñadas, las diferencias, respecto a la educación presencial, que se manifestaran en el sistema virtual. Esto, por su parte, originó nuevas interrogantes, entre otras la siguiente: ¿Cómo podrán observarse los acontecimientos que se presenten durante el desarrollo del curso, de forma que permitan aprovechar esta experiencia para tratar de mejorar la metodología empleada?

Las observaciones.
Las observaciones de lo sucedido durante el desarrollo del curso se hicieron analizando las participaciones de los estudiantes en los diversos foros de discusión que se organizaron para llevar a cabo la interacción comunicativa entre los estudiantes: hubo foros de equipo, en los que interactuaban de tres a seis personas, foros de grupo para la interacción entre los equipos e, incluso, un foro nacional para la interacción entre los diversos grupos; encuestando a una muestra de los estudiantes y a algunos profesores adjuntos; revisando los trabajos presentados por los estudiantes que formaron parte de las exigencias establecidas para acreditar el curso. A continuación se enlistan algunas de las observaciones:
a) Las expectativas de los profesores respecto a este curso fueron satisfechas, en más del ochenta por ciento de los casos. En varios de ellos, manifestaron que fueron rebasadas.
b) El enfoque del curso les resultó novedoso y motivador a la mayoría de los estudiantes.
Muchos de ellos manifestaron que lo consideraban un buen ejemplo de lo que significa diseñar actividades de enseñanza con un enfoque constructivista. Otros expresaron que les había llamado la atención el hecho de que el curso se hubiera desarrollado totalmente a través de la resolución de problemas. También les llamó la atención la manera en que se utilizaron los diversos registros de representación (verbal, numérico, gráfico y analítico) en el planteamiento y análisis de las situaciones problémicas.

c) Respecto al trabajo en equipo la mayoría de los estudiantes manifestaron que no se logró una buena interacción cuando el equipo era virtual. Algunos intentaron justificar su dicho con argumentos como falta de costumbre a trabajar en equipo, exceso de trabajo, participaciones de poca calidad de parte de algunos de los integrantes. En algunas escuelas o localidades, en las que había más de un estudiante dentro del Programa, se organizaron equipos presenciales. En estos casos la opinión sobre el trabajo en equipo es muy favorable, esto también manifestaron algunos equipos virtuales.

d) Los foros de grupo y nacional no se desarrollaron de acuerdo con lo establecido, esto es, los foros de grupo fueron concebidos para la participación de los equipos y el foro nacional para la participación de los grupos. Esto no sucedió, salvo en contados casos. Por lo general, las participaciones en ambos tipos de foro, fueron a nivel individual.

e) Las opiniones respecto al curso resultan más o menos homogéneas entre los estudiantes de un mismo grupo; mientras que las opiniones analizadas por grupo, pueden resultar no sólo diversas, sino heterogéneas.

Reflexión final.

Las observaciones y reflexiones hechas al diseñar los materiales que se utilizaron en el curso de Cálculo, así como al planearlo y durante su desarrollo, junto con las observaciones y reflexiones que habíamos venido haciendo durante la planeación y desarrollo de los otros cursos de matemáticas (Álgebra y Geometría) del Programa de Maestría en Ciencias en Enseñanza de las Ciencias que ofrece el Sistema Tecnológico Nacional mexicano a sus profesores en todo el país, por medio de un Sistema Virtual de Educación a Distancia, nos llevan a afirmar que el uso de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación para diseñar programas de enseñanza en línea, en particular programas de formación y actualización, a distancia, de profesores de matemáticas en servicio, además del beneficio que pueda traer por reducir los costos de operación de dichos programas y por la posibilidad de llegar a personas que, por diversas razones, no tienen posibilidades de acceso a otro tipo de programas, está originando un proceso de reflexión social sobre la educación en general que habrá de traducirse en un salto cualitativo.

La reflexión sobre cómo usar de mejor manera estas nuevas tecnologías en el diseño de la enseñanza, da lugar a reflexiones sobre prácticamente todos los elementos que entran en juego en el proceso educativo: el papel del estudiante, el papel del profesor, los objetivos y contenidos de la enseñanza, los métodos, el entorno en el que se lleva a cabo la acción educativa, el proceso comunicativo, los materiales de apoyo, etc. De estas reflexiones empiezan a emerger nuevas conceptualizaciones sobre cada uno de estos elementos y como consecuencia del proceso educativo como totalidad.

Desde luego que este proceso de reflexión apenas empieza, pero el ritmo con el que se está llevando a cabo es, como prácticamente todo lo actual, acelerado; de tal manera que las transformaciones pueden ser profundas, al menos en el mediano plazo.

Bibliografía.

Duart Joseph – Sangrà Albert. (2000) *Aprender en la Virtualidad*. Editorial Gedisa.
Harasim Linda – Hiltz Starr Roxanne. (2000) *Redes de aprendizaje*. Editorial Gedisa
Salvat Begoña Gros. (2000) E*l ordenador Invisible*. Editorial Gedisa.
Páginas consultadas
http://www.uabc.mx/dgaa/edudiste.html, http://www.udg.mx/informe/index.html
http://www.ocv.org.mx/ , http://www.virtual-educa.net/
http://www.cuaed.unam.mx/www/index.html, http://www.distancia.unam.mx/

EL CÁLCULO DE LA INTEGRAL INDEFINIDA Y LA EVALUACIÓN DEL APRENDIZAJE

Olga Lidia Pérez González
Universidad de Camagüey, Cuba
olgapg@inf.redu.edu.cu, olguitapg@yahoo.com

Resumen

Tradicionalmente el cálculo de la integral indefinida constituye unos de los contenidos en el que los estudiantes presentan muchas dificultades, algunas de ellas están dadas pues el enfoque dado en las clases para calcular integrales hacen pensar en aprenderse “muchos” métodos sin existir un hilo conductor entre ellos, por otro lado los maestros por lo general llegan evalúan si sabe o no calcular estas integrales y en este sentido en la enseñanza de esta temática no se logra la unidad entre la lógica de la ciencia, la lógica de la asimilación y la lógica del contenido. El objetivo de este trabajo es discutir una propuesta didáctica para la enseñanza del cálculo de la integral indefinida, donde se asumen como referentes teóricos, el propiciar el desarrollo del pensamiento lógico de los alumnos, considerando como habilidades generalizadoras a lograr en esta unidad a la identificación del modelo del integrando y la clasificación de las técnicas para reexpresar el integrando y los métodos de integración, además se asume que la evaluación del aprendizaje, en la unidad de integrales indefinidas, no debe estar dirigida a valorar si el alumno domina cada método en específico, sino el proceso general para integrar, evaluando si se hacen diferencias entre las diferentes técnicas de reexpresión del integrando y las posibles formas de integrar, donde se debe insistir en las generalidades de las diferentes formas de integrar. En la primera sesión de trabajo se presentará una caracterización de los enfoques tradicionales de la integral indefinida en la literatura especializada y de las principales dificultades en la evaluación del aprendizaje de la Integral Indefinida. Se hará la propuesta del proceso general de Integración. En la segunda sesión de trabajo se presentará una propuesta didáctica para la enseñanza de la Integral Indefinida basada en el proceso general de integración, así como el sistema de tareas y las habilidades esenciales en la integral indefinida. En la tercera sesión de trabajo se presentará una propuesta didáctica sobre la evaluación del aprendizaje en la integral indefinida con un enfoque constructivita. Experiencias de su aplicación en la educación superior cubana.

Introducción

Tradicionalmente el cálculo integral constituye unos de los contenidos en los que los estudiantes presentan más dificultades para su aprendizaje y corresponde al maestro trabajar didácticamente dicho curso. En este trabajo se propone un nuevo enfoque en el contenido para la enseñanza del cálculo de la integral indefinida el que conduce a desarrollar una enseñanza más efectiva. Esta propuesta permite establecer estrategias didácticas que propician una mayor motivación y aprovechamiento de los alumnos, integrando elementos teóricos, disciplinarios metodológicos y técnicos en la enseñanza de esta ciencia, además brinda las herramientas necesarias para el diseño de estrategias y proyectos didácticos que posibiliten en el alumno el aprendizaje conceptual y significativo.

Desarrollo

Cuando el maestro tiene que enseñar a sus alumnos cómo calcular una integral indefinida se encuentra ante el dilema de que en los textos de matemáticas esta temática se expone desde diferentes puntos de vistas, no en su concepto ni en su interpretación geométrica ni en sus propiedades pero si se dan varios enfoques en los métodos analíticos que se proponen para su cálculo. Por ejemplo, hay autores que consideran a la sustitución y/o cambio de variables como un método de integración cuando este caso es realmente una de las técnicas que se utilizan para reexpresar el integrando a una función elemental de la cual se puede hallar su primitiva, otro ejemplo es considerar la descomposición de funciones racionales en funciones racionales simples como un método de integración pues este es un caso similar al anterior. Es obvio que el maestro debe enseñar al alumno todas las variantes que se le pueden presentar teniendo en cuenta que uno de los objetivos educativos del cálculo integral es: que los alumnos desarrollen hábitos de proceder reflexivamente, de evaluar los resultados de su trabajo y utilización de diversa literatura, además de, contribuir a la capacidad de razonamiento, de pensar lógicamente y contribuir a la formación computacional de los estudiantes. Además se debe buscar una estrategia didáctica para la enseñanza y el aprendizaje de manera tal que la evaluación del aprendizaje de los alumnos pueda deslindar las dificultades esenciales de este contenido, pues tradicionalmente estas dificultades están fundamentalmente en las técnicas para reexpresar el modelo del integrando y no en la aplicación de los diferentes métodos.

Inicialmente consideramos necesario que el maestro tenga presente que las habilidades esenciales que debe desarrollar en los estudiantes son las de *identificación* y la de *clasificación*, la de identificación dirigida a que el alumno ante una integral indefinida identifique cual es el modelo que tiene el integrando, para esto se le debe orientar al alumno que el integrando puede estar dado por una función del tipo: Elemental, F(g(x))g(x), Racional, u.dv o con primitivas no elementales. Por tanto, al inicio de la unidad las tareas no deben estar dirigidas a calcular integrales, por el contrario el maestro debe dirigir la atención del alumno a que identifiquen el modelo del integrando, considerando que ya ha trabajado con las integrales inmediatas obteniéndolas como proceso de antiderivación. La habilidad de clasificación estará dirigida a que una vez identificado el integrando, clasifiquen que técnicas puede utilizar para reexpresar el mismo, las cuales pueden ser:

- Aplicar las propiedades de las integrales.
- Desarrollar y simplificar algebraicamente el integrando, utilizando:
  - Completamiento de cuadrados
  - Simplificación de fracciones
  - Descomponer fracciones racionales en fracciones simples.
  - Multiplicar y dividir por el conjugado pitagórico.
- Completamiento del diferencial.
- Sustitución y/o cambio de variables.

Luego los métodos de integración se pueden agrupar realmente en cuatro, ellos son: *uso de colección de integrales inmediatas, uso de las integrales inmediatas generalizadas, método de integración por partes y uso de las tablas de integrales.*

En consecuencia con lo anterior, se propone para la estructuración del contenido, trabajar con la base orientadora de las acciones (BOA) para el proceso general de integración, la cual se define como el conjunto de condiciones en las que realmente se apoya el alumno para ejecutar las acciones. Esta BOA contiene 4 pasos: Identificar las características del modelo del integrando, Reexpresión del integrando, Simplificar y por último Calcular la integral. Esta BOA se utiliza como orientación, para el cálculo, permitiéndole al alumno identificar el modelo del integrando, y clasificando de esta forma la vía a seguir para resolverla.

Para el cálculo de primitivas en las integrales indefinidas se propone un proceso general (Ver Anexo), esto permite que la evaluación no esté dirigida a valorar si se domina cada método en específico, sino el proceso general para integrar. Para lograr esto la unidad se diseñó utilizando el proceso general de integración, entonces, la evaluación estará dirigida a valorar si se hacen diferencias entre las diferentes técnicas de reexpresión del integrando y las posibles formas de integrar, donde se debe insistir en las generalidades de las diferentes formas de integrar. Por ejemplo, una de las técnicas de reexpresión del integrando es el cambio de variables. Aquí se debe valorar las operaciones que incluye esta acción, que son:

- Definir que sustitución se hará.
- Calcular el diferencial de la variable a sustituir, y por último,
- Sustituir la variable y el diferencial en la integral.

Y todo lo que queda por hacer para resolver dicha integral corresponde al 4to.paso del proceso general de integración y donde la solución general debe corresponderse con la variable inicial que se da, cuestión ésta que no está contenida en los pasos del método, sino en la autovaloración que el estudiante hace de la respuesta obtenida según el problema planteado.

De especial importancia consideramos, en esta propuesta didáctica, a la utilización del proceso general de integración propuesto anteriormente, ya que éste permite darle un enfoque sistémico a la unidad y es más fácil para el aprendizaje y la evaluación, pues el enfoque dado por muchos autores para calcular integrales hacen pensar en aprenderse "muchos" métodos sin existir un hilo conductor entre ellos y en este sentido se propone buscar la *unidad entre la lógica de la ciencia, de la asimilación y del contenido.* Se propone utilizar una tarjeta de estudio donde se refleje el proceso general de integración, orientando la evaluación del aprendizaje a que el estudiante valore el proceso general y que valoren el tratamiento que le dan otros autores, clasificando varios métodos. A partir de esto los estudiantes pueden hacer un trabajo de búsqueda donde tengan que valorar esta situación. El sistema de tarea que sugiere es el siguiente:

- Dada un grupo de integrales indefinidas:

  Identificar el modelo del integrando, Identifique en cuál de ellas se puede reexpresar el integrando, aplicando las propiedades de la integral indefinida, Calcule, si utiliza las tablas de integrales especifique que fórmula utilizó.

- Dada un grupo de integrales indefinidas:

  Identificar el modelo del integrando, Identifique en cuál de ellas se puede reexpresar el integrando utilizando completamiento de cuadrados, simplificación de fracciones, multiplicando y dividiendo por el conjugado pitagórico o descomponiendo fracciones racionales en fracciones simples, Calcule cada caso y si utiliza las tablas de integrales especifique que fórmula utilizó.

- Dada un grupo de integrales indefinidas.

  Identifique las que tengan en el modelo del integrando una función de la forma F(g(x))g´(x), Identifique, quién es f(x) y quién g(x), clasifique, la fórmula de las tablas de integrales inmediatas con la que se puede resolver, calcule.

Dada un grupo de integrales indefinidas.
Identifique las que tengan en el modelo del integrando una función de la forma u.dv, Identifique, quién es u y quién es dv, Aplique la fórmula de integración por partes, Calcule, si utiliza las tablas de integrales especifique que fórmula utilizó.

Dada un grupo de integrales indefinidas,
Identifique las que tengan en el modelo del integrando una función racional, Identifique si la fracción racional es propia o impropia, Descomponga la fracción racional en fracciones simples, Calcule la integral, si utiliza las tablas de integrales especifique que fórmula utilizó.
Dada un grupo de integrales indefinidas:
Identifique, en cuáles de ellas, es necesario hacer sustitución y/o cambio de variables, Qué sustitución o cambio de variables usted haría, Calcule la integral, si utiliza las tablas de integrales especifique que fórmula utilizó. .
Dada un grupo de integrales indefinidas:
Identifique, en cuáles de ellas, es necesario completar el diferencial para obtener una integral inmediata generalizada, Complete el diferencial, Calcule, si utiliza las tablas de integrales especifique que fórmula utilizó.
Dada un grupo de integrales indefinidas:
Identifique el modelo del integrando, Reexprese el integrando, Integre, si utiliza las tablas de integrales especifique que fórmula utilizó.
Tareas con las características anteriores pero exigiendo la justificación de las acciones realizadas.
Dada un grupo de integrales indefinidas, Calcúlelas.
Las demás tareas estarán referidas a la resolución de problemas sobre diversas aplicaciones de la integral indefinida.

Observe como el sistema de tareas anterior va orientando el alumno tanto a las técnicas de reexpresar al integrando como a los métodos de integración. Con el mismo, es posible dirigir la evaluación, en las primeras clases prácticas y autopreparación, a valorar el desarrollo práctico de cada una de las operaciones que involucran el proceso general de integración, donde el estudiante se enfrenta a este grupo de tareas con una tarjeta de estudio en la cual aparecen todos los elementos esenciales del proceso de integración y los modelos de las acciones a ejecutar, lo que permite valorar si se asimila la BOA dada a un nivel reproductivo. Posteriormente, la actividad se basa en un sistema de tareas con estas mismas características, pero dirigido fundamentalmente a ejercitar el racionamiento teórico, de forma que la acción se transforma de la lógica de la acción a la lógica del concepto, donde el estudiante pueda justificar lo que hizo y porqué lo hizo.

En algunas de estas tareas se orienta cada operación a desarrollar, y se pide en cada una de ellas las integrales que no se corresponden a las que se orientan resolver y darles solución, explicando el procedimiento seguido en cada caso. Otras están dirigidas directamente al cálculo de integrales, sin especificar en su enunciado las posibles acciones a realizar para su resolución. Obsérvese que en las tareas anteriormente descritas se destacan las acciones esenciales a desarrollar: identificación y clasificación. Por tanto, en el proceso de asimilación de este contenido, es importante valorar si el estudiante identifica el modelo del integrando y si clasifica la(s) técnica(s) para reexpresar el integrando, así como la fórmula para resolver la integral.

En este tema, por ser un tema básico fundamental dentro del cálculo integral y de la disciplina matemática, la evaluación parcial debe estar dirigida a las acciones esenciales: Identificación y clasificación y a la asimilación del proceso general de integración.

Conclusiones

Esta propuesta didáctica propicia que el estudiante sepa diferenciar entre las técnicas para reexpresar el integrando y el proceso de integrar, además, permite al profesor incidir realmente en los métodos de integración y poder valorar si los errores de sus estudiantes están precisamente en dichas técnicas y no en los métodos de integración. Se insiste en que se le debe orientar a los estudiantes, en las últimas clases de la unidad, que se haga un análisis comparativo y critico del enfoque que dan varios autores clásicos a la integral indefinida y que ellos vean que realmente es lo mismo, sólo que muchos de ellos desglosan las técnicas de reexpresar el integrando como métodos, por ejemplo muchos autores llaman *método de sustitución y método de descomposición de fracciones racionales en fracciones simples*, cuando realmente estas son técnicas como se relaciona en el trabajo.

Bibliografía

Blanco, R. (1997). La determinación de la Efectividad del uso de los ciclos temáticos. Cuba. Centro de Ediciones Electrónicas del MES.

Pérez, O. L. (2000). La evaluación del aprendizaje como elemento del sistema de dirección del proceso de enseñanza aprendizaje en la enseñanza de las matemáticas para ciencia técnicas. Universidad de Camagüey. Cuba. Tesis de Doctorado.

Talízina N., F. (1992). La formación de la actividad cognoscitiva de los estudiantes. México. Ángeles.

National council Teachers of Mathematics (NCTM) (1995). Assesment standards for school Mathematics.

Blanco, R. (1997). Subsistema didáctico con carácter sistémico para la enseñanza de las matemáticas en Ciencias Técnicas fundamentado en la Teoría del conocimiento y la Teoría de la asimilación. Taller de doctorado. IV Conferencia Ciencias de la Educación. Universidad de Camagüey.

Calderón, R. (1994). Perfeccionamiento de la enseñanza del cálculo integral en Ingeniería Mecánica. Informe de investigación. ISPJAE. Ciudad Habana.

DISEÑO CURRICULAR Y METODOLOGÍA DIDÁCTICA PARA UN CURSO ESPECIAL DE MATEMÁTICA

Caraballo, H; González, C; Dapoto, M.S; Parker, A.C; Barranqueras, F; Durán, P.
Universidad Nacional de La Plata. Argentina.
horacio@netverk.com.ar

Resumen

En este artículo se muestra el diseño curricular, la estrategia didáctica y la evaluación de un curso optativo de matemática dirigido a los alumnos del ultimo año (cuarto de Polimodal) del Bachillerato de Bellas Artes dependiente de la Universidad Nacional de La Plata.
La novedad en este diseño es su fuerte motivación propedéutica, es decir, está construido para que sirva de base para emprender un estudio posterior
Los objetivos generales son: actualizar, reforzar y, en alguna medida, resignificar conocimientos ya adquiridos por los alumnos a lo largo de toda su instrucción, integrándolos de tal modo que formen un conocimiento de fondo, una base, que permita enfrentar las exigencias del nivel superior.
Presentamos además una síntesis de la evaluación del curso. Esta nos permitió corroborar una serie de hipótesis referidas al refuerzo e integración de los conocimientos adquiridos a lo largo de todo el nivel medio y a la posibilidad de enfrentar con éxito problemas y aplicaciones.
De la evaluación surge también un aspecto que no estaba en nuestros planes iniciales. Este aspecto está referido a considerar a este curso como cierre de un ciclo. Estamos hablando de construir un espacio curricular donde se resignifique, refuerce y se le de una nueva perspectiva a la educación matemática adquirida a través de varios años.

Introducción

En el Bachillerato de Bellas Artes de la Universidad Nacional de La Plata (BBA UNLP) se cursa el tercer ciclo de la Educación General Básica (séptimo, octavo y noveno años, de doce a catorce años de edad), y el ciclo Superior (Polimodal, primero a cuarto año, de quince a dieciocho años de edad). En el plan de estudios del ciclo Superior, además de las materias regulares, los alumnos eligen dos optativas cuatrimestrales por año.
Las materias optativas correspondientes al último año del ciclo Superior tienen un carácter propedéutico, por lo cual uno de los motivos de la elección de las mismas es el proyecto futuro de los interesados.
En el primer cuatrimestre de 2001 y de 2002 el Departamento de Ciencias Exactas y Experimentales propuso un curso optativo de matemática para cuarto año, simultáneamente con la asignatura anual de Matemática. Este curso estuvo destinado a aquellos que pensaran emprender estudios posteriores que requirieran conocimientos matemáticos. En 2002 fue elegido por aproximadamente el 35% de los alumnos, estos se orientaban hacia carreras como Ingeniería, Informática, Arquitectura, Medicina, Ciencias Económicas, etc.

Diseño curricular

La primera decisión que se tomó cuando se empezaron a trazar los lineamientos generales del curso fue la de no incluir ningún contenido nuevo en el mismo. Esta afirmación parece paradojal en dos sentidos, el primero es obvio, no se diseña un curso para no decir nada nuevo, el segundo está relacionado con el hecho de que la materia es propedéutica. Aclaremos estas aparentes contradicciones, que no haya contenidos nuevos no significa que no se haga nada nuevo con ellos, se trata en nuestro caso, de darles otro contexto. Con el desarrollo de este curso se buscó actualizar, reforzar y darle un nuevo marco a los

conocimientos ya adquiridos por los alumnos a lo largo de toda su instrucción media. El hecho de que la materia sea propedéutica significa en nuestro caso que prepara una base sólida a partir de la cual se puede emprender una nueva etapa en el estudio de la matemática.
Reiteremos entonces que decidimos construir una materia cuatrimestral con los contenidos estudiados a lo largo de toda la instrucción media, esto es, durante primero, segundo y tercer año ya cursados por los alumnos y articulando, en alguna medida, con el cuarto año de la matemática regular que se desarrolló simultáneamente.

Contenidos:
Para seleccionar los contenidos se revisaron las currículas de primero, segundo, tercero y cuarto año de matemática y los cursos de ingreso de distintas facultades. Al analizar los cursos de ingreso se encontró una gran coincidencia entre ellos. Los contenidos de estos últimos estaban incluidos en la unión de las currículas antes mencionadas
En particular fueron consultados los cursos de ingreso a:
Facultad de Ingeniería. UNLP. (www.ing.unlp.edu.ar)
Facultad de Ciencias Exactas. UNLP. (www.exactas.unlp.edu.ar)
Facultad de Informática. UNLP. (www.info.unlp.edu.ar)
Facultad de Ciencias Agrarias y Forestales. UNLP. (www.agro.unlp.edu.ar)
Facultad de Ciencias Médicas UNLP. (www.atlas.med.unlp.edu.ar)
CBC Universidad de Buenos Aires. Area Matemática. (www.cbc.uba.edu.ar)
Curso de ingreso de la Universidad Nacional de Quilmes. (www.unq.edu.ar)

Material de estudio:
Se les proporcionó a los alumnos como material de estudio una selección de las guías de los cursos de ingreso a las facultades mencionadas. Este material es libre y se puede adquirir en las facultades y en algunos casos descargar del sitio web correspondiente. En el caso de la facultad de Ciencias Agrarias y Forestales de la UNLP se tomó directamente una simulación del curso de ingreso, donde además del material se proporcionan también los exámenes tomados con su correspondiente criterio de corrección .
El hecho de utilizar los apuntes y las evaluaciones originadas en las facultades generó gran interés y sirvió como elemento motivador.

Características:
Este diseño curricular tiene como característica especial el hecho de manejar contenidos ya conocidos por los alumnos a través de varios cursos. Uno de los ejes que permitió abordar esta situación es el referido a la estructura del conocimiento disciplinar, en este sentido nos encontramos recreando las recomendaciones de Jerome Bruner en su libro "El proceso de la educación". En él se propone como un aspecto central presentar "*una comprensión de la estructura fundamental de las materias que elijamos enseñar*", esto conduce a formular cuatro resultados, que en nuestra experiencia hemos corroborado en gran medida:

"*Comprender lo fundamental permite que una materia sea mas comprensible*"

"*Aprender principios generales o fundamentales asegura que la pérdida de memoria no signifique una pérdida total, y que lo que quede nos permita reconstruir los detalles que necesitamos conocer*".

En nuestro caso este resultado predicho por Bruner presentó un carácter dual. Por un lado trabajamos sobre el remanente cognitivo que tenían los alumnos de los diversos temas y por otro nos ocupamos del que produciría nuestro curso a futuro.

"*Comprender algo como un caso especifico de un caso mas general (que es el significado de comprender un principio o estructura mas fundamental) es haber aprendido no solo algo especifico, sino también un modelo para comprender otras cosas con las que podemos encontrarnos*"

"*Al reexaminar constantemente el material enseñado en las escuelas elementales y secundarias, para comprobar su carácter fundamental, podremos estrechar el vacío entre conocimiento avanzado y conocimiento elemental*"

Estrategia Didáctica

Dada la cantidad de temas en relación al tiempo disponible (podríamos decir que se comprimieron, prácticamente, cuatro años en medio año) se los presentó de una manera sintética en forma de resultados. Esto es, como un conjunto de definiciones, propiedades y teoremas. La madurez cognitiva de los alumnos permitió que se presentara la teoría, se reforzara a través de una ejercitación referida a los aspectos formales y se le dieran significados a los resultados matemáticos en el marco de las aplicaciones fácticas. De ninguna manera estamos refriéndonos a un esquema simplista de "explico-aplico" tan mal usado cuando se trata de la formación de conceptos nuevos. En nuestro caso, partimos de conceptos ya instalados en los alumnos, los reforzamos y los resignificamos. Este conjunto de actividades genera un producto que en el caso de este curso consiste en una cantidad de conocimientos matemáticos, una cantidad de relaciones entre las partes de éste y un reconocimiento de que estos conocimientos y relaciones puedan ser utilizados como herramientas. Estas últimas son de dos tipos: las formales que son internas a la matemática propiamente dicha y las de aplicación que surgen de las anteriores cuando se les agregan una serie de enlaces a una situación fáctica.

Los temas fueron explicados sucintamente, se seleccionaron un conjunto de trabajos prácticos tomando los más adecuados de entre los ingresos consultados, y se propusieron aplicaciones tratando de integrar varios temas a la vez.

Las clases fueron divididas en dos momentos, en el primero se desarrollaron las explicaciones correspondientes a cada tema y en el segundo se resolvieron los trabajos prácticos y las aplicaciones propuestas.

Por tratarse de una materia optativa el compromiso de los alumnos fue significativo esto posibilitó un eficiente uso del tiempo

Evaluación

Para la evaluación del curso se usaron tres instrumentos diferentes.

1. El análisis de los resultados de los exámenes tomados en el curso.

La evaluación de los alumnos se realizó en las ultimas clases. Se tomaron una serie de exámenes escritos. Estos fueron los exámenes de ingreso originales de matemática tomados en marzo de 2002 en:

Facultad de Ingeniería UNLP.

Facultad de Ciencias Agrarias y Forestales UNLP.

Facultad de Ciencias Médicas UNLP.

En general la mayoría de los participantes aprobaron sin dificultad y en muchos casos con desempeño sobresaliente. El hecho de que los exámenes fueron los originales que tomaron las facultades mencionadas en sus ingresos sirvió de motivación y permitió la comparación de resultados.

2. Reunión final con los alumnos:

La última clase del curso consistió en una reunión en la que se discutió el desarrollo y la metodología, a través del diálogo informal se recabaron las distintas opiniones, críticas y aportes de los alumnos. La conclusión más importante está referida a la percepción de algunos alumnos de un efecto de "condensación" de los conocimientos. Este efecto es percibido por alumnos de nivel universitario luego de rendir el examen final de una materia. Esta última parece sufrir una disminución de "tamaño" muy marcado relativo al momento de la cursada. En nuestro caso varios participantes se refirieron a este hecho. Correspondería preguntarse si esto es señal de una consolidación ordenada que perdurará en el tiempo o no.

3. Encuesta:

Este instrumento forma parte del proceso de orientación comenzado en el primer año por el Departamento de Orientación Educativa del Ciclo Superior. Ha sido diseñado a fin de indagar los motivos por los cuales los alumnos han elegido las materias optativas para 4º, cuál es su evaluación respecto de ellas, y si estas elecciones se correlacionan con el proyecto vocacional futuro.

El siguiente es un resumen de una parte del modelo de la encuesta que se le realizó a los alumnos:

¿Qué materias optativas elegiste para este año?

¿Por qué elegiste la materia (indica con una cruz el/los motivos)?

Para completar conocimientos generales __. Por la articulación con la carrera que pensas seguir __. Por los horarios __. Para completar conocimientos sobre tu especialidad

Por descarte __. Por la propuesta que realiza el Departamento a cargo de la misma __.Otros

¿La optativa cursada cumplió con tus expectativas? SI __ NO__ ¿Por qué?

Luego de haber cursado esa materia optativa, ¿pensas que se relaciona con la carrera/ proyecto que pensas hacer? SI __ NO__ ¿Por qué?

¿Cómo evalúas la optativa en relación a contenidos (complejos, nuevos, repetidos, etc.), la metodología de enseñanza (adecuada o no a lo universitario, teórica/práctica, etc.), bibliografía dada, etc.?

¿Cuál es tu proyecto para el año que viene?

Si dentro de tu proyecto se incluye estudiar, ¿qué carrera o área de conocimiento te interesa?

Del análisis que el Departamento de Orientación Educativa hizo sobre las encuestas surgen los siguientes puntos:

Motivos de elección: Por la articulación con la carrera que piensan seguir. Para completar conocimientos generales. Por la propuesta departamental

Expectativas: La mayoría de los alumnos manifiesta que esta asignatura ha cumplido con sus expectativas, dicen:

"Fue un repaso de todo lo que se vio en años anteriores". "Pude conocer la materia y las aplicaciones en la facultad". "Dimos todo lo que se pensaba dar". "Aclaró la base de matemática que tenía, sobre la que se volcaron nuevos conceptos". "Fue introductoria para

temas de la facultad". "Los contenidos fueron bastante completos". "Fue suficientemente exigente para prepararse para los ingresos"
Evaluación general: Contenidos: en general dicen que han sido útiles y que han servido de repaso.
Metodología: muy buena, universitaria, adecuada para rendir un examen de ingreso en la facultad.
Bibliografía: adecuada, de gran ayuda.
Relación entre materia optativa y carrera universitaria:
La mayor parte de los alumnos opina que existe una relación entre la materia y carrera a seguir lo cual se correlaciona con los motivos de la elección. Cabe aclarar que es la única materia optativa cuyo motivo de elección fue la articulación con el proyecto futuro en primer término. Esto se confirma al notar que las carreras que eligen son: Ingeniería, Informática, Medicina, Arquitectura, Veterinaria, Economía, Astronomía.

Resultados

Describiremos algunos resultados que se obtuvieron luego de desarrollar este curso que surgen de la evaluación del mismo:
Se produjo un refuerzo importante de conocimientos adquiridos a lo largo de toda la instrucción media. Esto surge del análisis de las evaluaciones que mencionábamos antes, ya que los exámenes que se les propusieron a los alumnos cubrían la casi totalidad de los temas tratados y los resultados en estos fueron muy satisfactorios.
Los conocimientos fueron reacomodados, dándose una síntesis integradora. Los alumnos lograron relacionar distintos temas entre si y utilizarlos para resolver aplicaciones. Este resultado parecería estar relacionado con el efecto de "condensación" al que aludíamos antes, aunque esta afirmación sería motivo de una investigación posterior en este sentido.
El aumento en la velocidad de presentación de los temas, mas que un escollo, se convirtió en un elemento motivador; el descubrir que se abordan temas, que en su momento llevaron varios meses, en pocas clases sorprendió gratamente a los alumnos.
La posibilidad de enfrentar con éxito problemas y aplicaciones creció significativamente. En este caso debemos reconocer que los alumnos en esta etapa tienen un grado de madurez que les permite evaluar situaciones e interpretar enunciados aparte de haber mejorado su pericia matemática concerniente a estos problemas.
El punto anterior implica como resultado un cambio de perspectiva respecto del conocimiento matemático. Se ve este último como una herramienta que puede ser aplicada en distintos contextos, y no solamente como un "juego formal"

Conclusiones

Este curso fue diseñado pensando en una etapa posterior (terciaria o universitaria) con la intención de consolidar un "background" que permitiera enfrentar los estudios posteriores con éxito. Creemos haber logrado este propósito. En alguna medida queda confirmado en el seguimiento parcial de los alumnos que cursaron en el año 2001.
Nos parece novedoso el hecho de haber construido un curso en el que se trabaje sobre la estructura disciplinar, el refuerzo y la resignificación de contenidos abordados con anterioridad y no en la construcción de los mismos.
Sin embargo la conclusión más importante a la que arribamos no tiene que ver con el motivo que mencionamos en el párrafo anterior. Por el contrario, un espacio curricular de

esta naturaleza parece ser el cierre necesario para el ciclo de la enseñanza media en lo que respecta a educación matemática.
Perfectamente cumpliría el doble papel, de ser preparatorio para una etapa posterior y de funcionar como cierre de un ciclo. Nos parece importante estudiar este último punto.
Una construcción curricular que abarque todos los temas garantizaría la actualización de los conocimientos adquiridos en todo el ciclo medio, y la mera existencia de una instancia como esta cambiaría, en alguna medida, las expectativas de docentes y alumnos. Además se abrirían una serie de cuestiones, dignas de discutirse, evaluación final, diagnóstico general, realimentación a mediano plazo, etc.

Bibliografía

Bruner, J (1960). The Process of Education. Harvard University Press.

Hernández Fernández, H. et. al. (1997). Cuestiones de didáctica de la matemática. Conceptos y Procedimientos en la educación polimodal y superior. Homo Sapiens editores.

Tyler, R (1986). Principios básicos del currículo. Ediciones Troquel.

Caraballo H., González C (2000). Proyecto de Articulación. Matemática Ingreso 2000. Facultad de Ciencias Agrarias y Forestales. En IX Encuentro Nacional – I Internacional Sobre Enseñanza de la Matemática en Carreras de Ingeniería. Facultad Regional Concepción del Uruguay UTN, Entre Ríos, República Argentina.

BBA UNLP (2002). Departamento de Orientación Educativa. Informe sobre evaluación de materias optativas. Universidad Nacional de La Plata. República Argentina.

UNQUI (2002). Baragatti, M. I. Curso de ingreso. Lógica y Matemática. Universidad Nacional de Quilmes. Republica Argentina.

UNLP (2002). Carboni, L, García, N. Material didáctico para el ingreso a la Facultad de Ingeniería. Universidad Nacional de La Plata. República Argentina.

UNLP (2002) Curso de Ingreso Matemática I. Matemática II. Facultad de Ciencias Exactas. Universidad Nacional de La Plata. República Argentina.

UNLP (2002). González, C. Guía de ingreso- Matemática. Facultad de Ciencias Agrarias y Forestales. Universidad Nacional de La Plata. República Argentina.

UNLP (2002). Matemática para Informática. Curso de ingreso a la Facultad de Informática. Universidad Nacional de La Plata. República Argentina.

UNLP C.E.Ci.Me (2002).Módulo de Admisibilidad 2002 a la carrera de Medicina. Matemática.. Secretaría de Prensa Facultad de Ciencias Medicas. Universidad Nacional de La Plata. República Argentina.

DESARROLLO DE CAPACIDADES COGNITIVAS GENERALES EN EL MARCO DE LOS CURSOS DE MATEMÁTICA

Magdalena Pagano, Alejandra Pollio, Eduardo Lacués
Universidad católica del uruguay, uruguay
mapagano@ucu.edu.uy; apollio@ucu.edu.uy; elacues@ucu.edu.uy

Resumen

el proceso de aprendizaje y, sus relaciones con el proceso de la enseñanza, es complejo pero, sin pretender reducir o simplificar lo que dichos procesos suponen, debemos reconocer que para la apropiación del conocimiento son imprescindibles ciertas capacidades cognitivas generales. estimular el desarrollo de estas capacidades a través de planteos didácticos adecuados debería, en nuestra opinión, ser considerado como una prioridad a lo largo del proceso de escolarización.

en matemáticas se encuentra un campo particularmente propicio para identificar algunas de esas capacidades. entre éstas se cuentan: la de manejar distintos registros simbólicos (verbales, gráficos, simbólicos, numéricos, etc.) y traducir la información dada en uno de los registros a otros; la de construir modelos de la realidad utilizando entes matemáticos, obtener conclusiones mediante un manejo matemáticamente adecuado del modelo y reinterpretar estas conclusiones en la realidad, a los efectos de la toma de decisiones o de la descripción o predicción de fenómenos; la de calcular tanto numérica como simbólicamente; la de concretar formulaciones generales a casos particulares o inducir generalizaciones a partir de casos particulares; la de reconocer y utilizar correctamente diversas estructuras lógicas; la de proponer conjeturas y explorarlas, produciendo o bien pruebas o bien refutaciones.

Introducción

El proceso de aprendizaje y sus relaciones con el de la enseñanza es complejo pero sin pretender reducir o simplificar lo que dichos procesos suponen, debemos reconocer que para la apropiación del conocimiento son imprescindibles ciertas capacidades cognitivas generales. Estimular el desarrollo de estas capacidades a través de planteos didácticos adecuados debería, en nuestra opinión, ser considerado como una prioridad a lo largo del proceso de escolarización.

El proceso de cambio que actualmente se da en nuestros países en la educación secundaria, en los que incluso de discute el tradicional papel propedéutico de su ciclo superior en relación con la universidad, ha contribuido al debate acerca de qué contenidos enseñar y qué competencias ayudar a desarrollar.

En este trabajo presentamos en primer término una descripción breve de las reformas en enseñanza secundaria, para pasar a discutir el tema del desarrollo de capacidades, y presentar finalmente dos secuencias didácticas en las que analizamos cómo planificar actividades sobre diferentes contenidos que tengan la intención explícita de promover ciertas capacidades.

PROCESOS DE CAMBIO EN ENSEÑANZA SECUNDARIA

Entre los múltiples puntos de debate que actualmente se dan en torno a la enseñanza secundaria, queremos referirnos a tres, que consideramos pertinentes para este trabajo. Éstos son: cuáles han de ser los objetivos de la enseñanza secundaria superior o post-obligatoria, qué conocimientos deberán adquirir los alumnos en su tránsito por el sistema si se quiere cumplir con esos objetivos y cómo debe organizarse la enseñanza secundaria para atender a los dos problemas anteriores.

Entre los objetivos que con frecuencia se enumeran se cuentan conseguir para los jóvenes una capacitación para insertarse en el mundo del trabajo y proporcionarles una formación que permita su participación como ciudadano competente en una sociedad democrática. De estas declaraciones se desprende que la finalidad única que antes se atribuía a este ciclo, la de preparar para el ingreso a la universidad, si bien no se abandona queda considerada como una entre otras igualmente importantes.

La formulación de estos nuevos objetivos en parte responde a los cambios que en la población estudiantil se han ido dando en el transcurso de las últimas décadas. En efecto, no sólo sectores sociales anteriormente excluidos comenzaron a tener acceso a la educación secundaria, generando con ello una mayor diversidad de perfiles afectivos, motivacionales y cognitivos entre los estudiantes, sino que además la generalización en el uso y el acceso a nuevas tecnologías ha tenido entre sus consecuencias la aparición y extensión de fuentes de información no formales, que nutren gran parte de los conocimientos de los alumnos y contribuyen a elaborar sus concepciones y a generar sus actitudes.

Ante esta situación, nuestros países han reaccionado con la introducción de cambios en el sistema secundario. Macedo y Katzkowitz (Macedo, B. y Katzkowicz, R., 2002), al referirse a este asunto señalan cinco formas de organización que se reconocen en diferentes experiencias nacionales que se han puesto en práctica:

- Un ciclo único, flexible y contextualizado;
- Dos o tres años finales claramente diversificados;
- Estructuras modulares que cada alumno cursa de acuerdo a su tiempo e interés;
- Estructuras distintas a las actuales en cuanto a los períodos de clase, divisiones del año escolar y práctica en el mundo laboral;
- Dos ciclos, uno obligatorio y otro no obligatorio, y luego opciones claramente diferenciadas.

Cada una de estas posibles formas de organización responde a diferentes objetivos, algunas enfatizando las posibilidades de formación para el trabajo y otras manteniendo el fin propedéutico como uno de los principales. No es el caso aquí discutir este aspecto de la cuestión, pero sí hay que señalar que, en cualquier caso, el problema de qué conocimiento se considera necesario y cómo enseñar para que se propicien los aprendizajes buscados no se resuelve con la forma de organización del sistema de enseñanza secundaria.

el desafío que se presenta, entonces, es encontrar formas de enseñanza que, con la mayor independencia del contexto organizacional que sea posible lograr, facilite conseguir los objetivos buscados. una posible respuesta a esta situación es atender a desarrollar la enseñanza considerando no sólo los contenidos disciplinares a tratar, sino además, y de manera especial, a las capacidades o competencias que pueden desarrollarse en el proceso de aprendizaje de esos contenidos, haciendo explícito a los alumnos que se pretende de ellos no sólo la adquisición de los conocimientos disciplinares, sino también que procuren lograr esos desarrollos. En la siguiente sección nos extendemos un poco sobre este aspecto.

Desarrollo de capacidades

Es frecuente encontrar como significado de "competencia" el de "saber hacer". Una definición más elaborada establece que competencia es un "saber hacer, con saber y con conciencia", poniendo énfasis en que no se está significando sólo un saber práctico, sino además uno que está informado por otros saberes y motivado por la intención de conseguir cierto logro.

Existe un aparente debate entre los significados de "competencia" y "capacidad". Por ejemplo, en uno de los documentos de la Comisión T.E.M.S. (Comisión T.E.M.S., 2002) se plantea que una competencia es un "indicador de capacidades más complejas que involucran un saber, un saber hacer, y un pensamiento orientado a la construcción de conocimientos". Según esta postura, una competencia es indicio de la integración de conocimientos conceptuales, con capacidades (en cuanto habilidades para desempeñar una tarea), y con la disposición para organizar la tarea estratégicamente con la finalidad de conseguir aprendizajes.

Una manera de aclarar esta ausencia de definición clara es dar una lista de competencias. Una clasificación de ellas es la que proporciona la Comisión T.E.M.S. (Comisión T.E.M.S., 2002):

- Personales: afectivas, éticas.
- Sociales: comunicación, trabajo en equipo, cooperación, solidaridad, participación democrática, creatividad, innovación.
- Técnicas: capacidad de organización y aplicación sistemática de conocimientos científicos y tecnológicos; generar, modelar y usar ideas y recursos matemáticos básicos para la resolución de problemas.
- Metodológicas: obtención, procesamiento, análisis crítico de la información, organización y presentación de ideas con variadas técnicas metodológicas y recursos tecnológicos, proposición y resolución de problemas.
- Cognitivas: análisis, síntesis, planificación, seguimiento y evaluación.
- Metacognitivas: autoevaluación, autorregulación, autoconocimiento.
-

En otro orden, Martín y Coll (Martín, E. y Coll, C., 2003), proporcionan otra clasificación de capacidades:

- Cognitivas: percepción, atención, uso del lenguaje, procesos de razonamiento.
- Motrices: corporalidad (motricidad fina, movimientos, posturas, etc); el cuerpo como instrumento de relación con el entorno y de comunicación.
- Equilibrio personal: desarrollo emocional, desarrollo afectivo.
- Relación interpersonal: procesos de interacción con quienes constituyen el entorno próximo.
- Inserción y actuación social: participación con el grupo social, integración en ambientes laborales, responsabilidad ante temas de interés general.

Como se ve, a pesar de las diferencias de criterios de clasificación y términos para designar competencias o capacidades, ambas listas tienen gran cantidad de coincidencias, como para poder sostener que en esencia se está hablando de lo mismo. Por eso, nosotros usaremos competencia y capacidad como sinónimos.

Al referirse a la relación entre la resolución de problemas y el desarrollo de capacidades, García (García, J.E.; 2002) señala que entre otras competencias, puede atenderse a las que tienen que ver con organizar información sistemáticamente, describir procedimientos o métodos usados y resultados obtenidos en un cierto proceso. En un sentido diferente, al analizar la relación entre competencias y comprensión matemática, Godino (Godino, J.; 2002) muestra ejemplos en los que se plantea cómo el tratamiento de ciertos contenidos es ocasión de trabajar con la intención de capacitar a los estudiantes en habilidades matemáticas.

Para concretar esta discusión al ámbito de la enseñanza y del aprendizaje de Matemáticas, presentamos una lista de capacidades cuyo desarrollo puede propiciarse a través del trabajo con contenidos Matemáticos. No pretendemos ser exhaustivos, sino solamente señalar que en casi cualquier actividad pueden encontrarse oportunidades de trabajar algunas de estas competencias:

- Manejar distintos registros simbólicos (verbales, gráficos, lógicos, numéricos, etc.) y traducir la información dada en uno de los registros a otros.
- Construir modelos de la realidad utilizando entes matemáticos, obtener conclusiones mediante un manejo matemáticamente adecuado del modelo y reinterpretar estas conclusiones en la realidad, a los efectos de la toma de decisiones o de la descripción o predicción de fenómenos.
- Concretar formulaciones generales a casos particulares o inducir generalizaciones a partir de casos particulares.
- Reconocer y utilizar correctamente diversas estructuras lógicas.
- Proponer conjeturas y explorarlas, produciendo o bien pruebas o bien refutaciones.
- Generar confianza en las propias posibilidades, a partir de constatar la posibilidad de realizar construcciones personales.
- Manejar un repertorio de estrategias de abordaje de problemas.
- Flexibilizar la forma de ver la realidad, reconociendo que los modelos matemáticos son una, entre otras, de las posibles aproximaciones a ella.
- Persistir en la búsqueda de soluciones, perseverando en el trabajo aún cuando se perciban distantes los resultados.
- Trabajar en equipo, cooperando con otros a través de la discusión fundamentada en argumentos.

En la siguiente sección presentamos a modo de ejemplo dos actividades, a las que analizamos con esta perspectiva de prestar atención al desarrollo de capacidades y no solamente a los contenidos a enseñar.

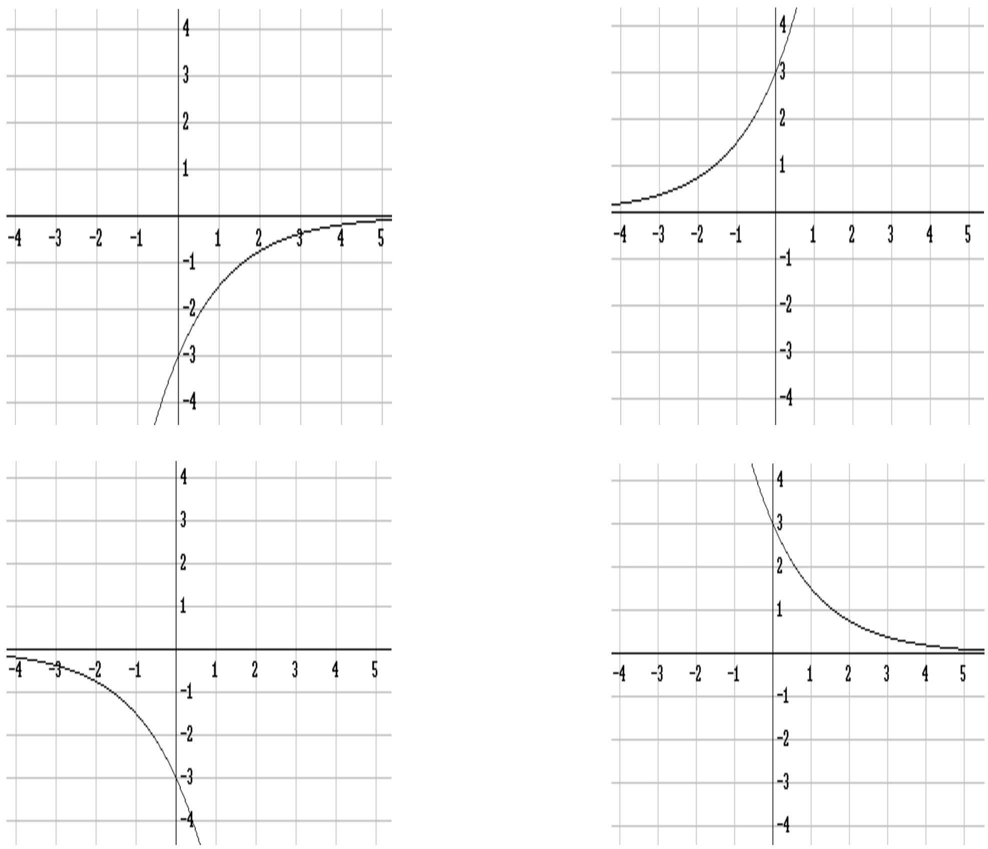
El Desarrollo De Capacidades En El Aula

las siguientes actividades han sido diseñadas para el desarrollo de algunas capacidades específicas. fueron propuestas a un grupo de estudiantes universitarios de primer semestre en el marco de un curso de cálculo en el cual se retoman algunos de los contenidos ya tratados en el bachillerato, en la búsqueda de detectar y corregir algunas de sus preconcepciones así como profundizar luego en el desarrollo de estos contenidos.

En el caso particular de las dos que se han seleccionado se busca, con la primera de ellas detectar y corregir algunas preconcepciones erróneas en relación con el crecimiento y el signo de las funciones exponenciales. Con la segunda evidenciar la utilidad de los conocimientos matemáticos para la construcción de modelos así como la dificultad que tal actividad puede traer aparejada. Ambas fueron propuestas como actividades grupales en la búsqueda de fomentar el trabajo en equipo como un ámbito de discusión e intercambio de saberes.

Actividad I:

Sea $f(t) = C \cdot a^t$ con $a > 0$.
i) Analice en cada gráfico si $C > 0$, $C < 0$, $a > 1$, $a < 1$.



ii) Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) f tiene siempre el mismo signo.
b) f es monótona.
c) f es positiva.
d) f es creciente.
e) El dominio de f es R.
f) El recorrido de f es R.
g) $f(t+1) = f(t) + 1$.
h) $f(t+1) = C \cdot f(t)$.
i) $f(t+1) = a \cdot f(t)$.
j) Si $C > 0$ y $a > 1$ entonces $f(t) \geq f(t+1)$.

Ambas partes de la actividad apelan al análisis más que a la evocación de ejercicios tipificados o rutinarios.

En la resolución de la parte i) se ponen en juego capacidades como:

- Manejar de cambio entre registros gráficos y numéricos, así como la traducir de un registro a otro
- Seleccionar una estrategia de abordaje de problemas que se considere apropiada, de entre un repertorio de posibles estrategias disponibles, a partir de la forma de organizar y relacionar la información disponible[5].

En la resolución de la parte ii) se ponen en juego capacidades como:

- Concretar de formulaciones generales a casos particulares o inducir de generalizaciones a partir de casos particulares.
- Proponer y explorar conjeturas, produciendo o bien pruebas o bien refutaciones.
- Construir de argumentos que apoyen las pruebas o las refutaciones
- Reconocer y utilizar correctamente la notación simbólica.

Actividad II[6].:
muchos tipos de seres unicelulares se reproducen por bipartición, es decir cuando pasa un cierto tiempo, el individuo se parte y da lugar a dos individuos. cada uno de ellos, a su vez transcurrido un cierto tiempo, repite el proceso. partiendo de que en el tiempo inicial (0) existía un solo individuo y si ese "cierto tiempo" del que se habla es de 2 días, calcule cuántos individuos habrá al pasar:

a) 1 día. b) 2 días. c) 7 días (explique como calcularlo).
d) 10 días. (explique como calcularlo). e) t días.

Entre las capacidades involucradas en esta segunda actividad podemos destacar[7]:

- Construir modelos de la realidad utilizando entes matemáticos, obtener conclusiones mediante un manejo matemáticamente adecuado del modelo y reinterpretar estas conclusiones en la realidad, a los efectos de la toma de decisiones o de la descripción o predicción de fenómenos.
- Generar confianza en las propias posibilidades, a partir de constatar la posibilidad de realizar construcciones personales.
- Manejar un repertorio de estrategias de abordaje de problemas.
- Experimentar y manipular los datos con la finalidad de llegar a una fórmula luego de la observación de regularidades
- Flexibilizar la forma de ver la realidad, reconociendo que los modelos matemáticos son una, entre otras, de las posibles aproximaciones a ella.

El hecho de que las dos actividades fueran propuestas como grupales, permitió fomentar el desarrollo de capacidades como la de trabajo en equipo y la de mantener discusiones fundamentadas.

[5] Esto quedó evidenciado en la puesta en práctica de esta tarea en el aula: se formaron equipos para realizar el trabajo, y pudimos observar en los diferentes grupos que algunos integrantes determinaron el valor de C a partir del corte con el eje Oy y luego compararon con el gráfico de a^x, para determinar el valor de a, en tanto otros alumnos del mismo grupo utilizaron herramientas del cálculo y a partir del signo de la derivada obtuvieron signo de C y posibles valores de a.

[6] Agradecemos la colaboración del profesor Javier Villarmarzo quien trabajó en la propuesta de alguno de los ejercicios y en su implementación en los cursos a su cargo

[7]En primer lugar es interesante señalar que esta actividad resultó sumamente motivadora: despertó la curiosidad de los estudiantes , que trabajaron con gran concentración.

Reflexiones finales

Hemos presentado dos actividades en las que pretendemos ejemplificar de qué manera pueden utilizarse la enseñanza de los contenidos matemáticos, no sólo para favorecer los aprendizajes disciplinares, sino además para tender al desarrollo de capacidades en los estudiantes.

con esto, queremos llamar la atención acerca de que casi en cualquier nivel de enseñanza y con cualquier contenido, el docente puede diseñar su actividad con el doble objetivo de ayudar a sus alumnos a apropiarse del conocimiento y a desarrollar sus competencias. nos parece que esto es particularmente importante en el momento del tránsito entre la secundaria y la universidad, donde algunas de las características propias del trabajo universitario pueden presentarse fácilmente a los alumnos a partir de una propuesta como ésta.

es interesante resaltar que hacer notar a los estudiantes cuáles son las capacidades necesarias para la realización de una tarea puede ayudarles a que evaluar su grado personal de desarrollo. En otro orden, indicarles que se esperaba que hicieran, detallando los procesos que podrían haber seguido, es una manera de ayudarles a buscar medios para poder desarrollar las competencias necesarias. En cualquier caso, no alcanza con la propuesta de las tareas, sino que es necesario referirse explícitamente a estos aspectos en la consigna que se entrega a los estudiantes.

Esperamos que la exposición que hemos hecho constituya un aporte a una discusión que está empezando y que consideramos de gran importancia para nuestra tarea educativa.

Bibliografía

Comisión T.E.M.S., (2002) Propuesta de diseño curricular para la educación media superior, www.comisiontems.edu.uy.

García, J.E.; (2002) Resolución de problemas y desarrollo de capacidades, *Revista Uno*, 29, 20-37.

Godino, J.; (2002) Competencia y comprensión matemática: ¿qué son y cómo se consiguen?, *Revista Uno*, 29, 9-19

Macedo, B. y Katzkowicz, R. (2002) Educación secundaria: balance y perspectiva, en *¿Qué educación secundaria para el siglo XXI?* (pp. 123-162) UNESCO/OREALC, Santiago de Chile.

Martín, E. y Coll, C. (2003) La Educación Escolar y el Desarrollo de Capacidades, en Martín, E. y Coll, C. (Coords.) *Enseñar contenidos, aprender capacidades*, Barcelona: Edebé.

DESARROLLO DE SITUACIONES DE APRENDIZAJE EN UN ESCENARIO A DISTANCIA INCORPORANDO OBJETOS VIRTUALES DE APRENDIZAJE

Apolo Castañeda Alonso
CICATA –IPN · México
acastane@ipn.mx

Resumen

Al introducir las nuevas tecnologías a los escenarios escolares se provocan reacciones (Chevallard, 1992) debido a que altera la armonía del Sistema Didáctico (el cual está compuesto por tres componentes; estudiantes, profesor y el saber). La relación entre los componentes del sistema didáctico se modifican debido a que existe un instrumento mediador que participa transformando las prácticas. Este proceso de integración requiere establecer las condiciones de equilibrio del Sistema Didáctico, al replantear el dominio del conocimiento, al caracterizar la interacción entre los estudiantes y el profesor, al ubicar el papel de la tecnología en el currículo, Laborde, (2001) y desde la perspectiva socioepistemológica, (Cantoral, 2004; Castañeda, 2004) explicar cómo se modifican las prácticas y cómo se construyen nuevos escenarios para el estudio de las matemáticas. Este trabajo de investigación propone describir las prácticas asociadas al estudio de la *derivada* en un ambiente tecnológico en las que se ponen en juego diversas situaciones interrelacionadas utilizando *objetos java.* Estos objetos, cuyo escenario natural de aplicación es en la red de Internet, se caracterizan por la disponibilidad de manipulación.

Introducción

El acelerado desarrollo de la tecnología ocurrido en los últimos años, así como la reducción de los costos en los equipos electrónicos han favorecido a que nuestra cotidianidad se vea impactada por una gran cantidad de productos. Esta paulatina pero incesante incursión tecnológica en varios espacios de nuestra vida, ha traído consigo una inevitablemente modificación de nuestras usuales prácticas. En el ámbito educativo, esta evolución tecnológica ha perturbado el habitual equilibrio en las instituciones educativas; por una parte el fácil acceso a la tecnología de los estudiantes desafía los tradicionales planteamientos didácticos que hacen los profesores. Este primer diagnóstico describe la exigencia de la noosfera (Chevallard, 1991) para mantener las prácticas educativas acordes con la evolución de la sociedad y sus prácticas., en particular de ámbito tecnológico.

Lejos de ser presiones externas las que modifiquen la actual dinámica de las instituciones educativas, la investigación educativa ha reportado la viabilidad en el uso de la tecnología, Laborde (2001) explica que las tecnologías, como por ejemplo las computadoras, favorecen los procesos de abstracción al permitir múltiples experimentos en el estudio de las ideas matemáticas. Sin embargo tal como lo explica Chevallard, (1992), al intentar introducir las nuevas tecnologías a los escenarios escolares se provocan reacciones debido a que alteran la armonía del Sistema Didáctico. La interacción de las tres componentes, se modifican debido a que existe un instrumento mediador que participa transformando las prácticas. Por ejemplo en Artigue, (2002) se reporta que …*cuando los estudiantes usan la función "graficar" en un ambiente computacional (o en calculadoras gráficas) ellos observan el hecho de que la gráfica de una función es windows-dependent…* (ventana-dependiente). Este hecho expresa que se ha construido una noción de *función* a partir de la representación en la pantalla, mostrando las limitaciones de representación que tiene el instrumento.

El proceso de integración de la tecnología al ámbito educativo es lento, porque hay que establecer las condiciones de equilibrio del Sistema Didáctico, al replantear el dominio del conocimiento, al caracterizar la interacción entre los estudiantes y el profesor, al ubicar el papel de la tecnología en el currículo, Laborde, (2001) y desde la perspectiva socioepistemológica, (Cantoral, 2004; Castañeda, 2004) explicar cómo se modifican las prácticas y cómo se construyen nuevos escenarios para el estudio de las matemáticas. Respecto al dominio del conocimiento, identificar cómo afecta la tecnología a los objetos matemáticos y sus relaciones así como identificar los aspectos que se conservan y los que cambian. En cuanto a la interacción de los estudiantes y profesor determinar las condiciones de la interacción a partir de caracterizar el uso del instrumento, es decir, definir los propósitos de su uso. En lo que se refiere al papel de la tecnología dentro del currículo, explicar cómo y para qué se usa la tecnología dentro de un programa de estudio. Finalmente como cuarta componente, analizar las prácticas que se derivan de la integración de la tecnología con el fin de identificar y caracterizar el funcionamiento de la tecnología cuando se ponen en juego para el estudio de la matemática.

Exploración en un ambiente computacional

Ubicados en esta última línea de estudio, este trabajo de investigación propone describir las prácticas asociadas al estudio de la *derivada* en un ambiente tecnológico en las que se ponen en juego diversas situaciones interrelacionadas utilizando *objetos java.* Estos objetos, cuyo escenario natural de aplicación es en la red de Internet, se caracterizan por la disponibilidad de manipulación. Todo objeto *java* tiene un propósito específico pues su creación responde a un objetivo específico. Con el fin de caracterizar los objetos *applets java* en un escenario didáctico, los denominamos "objetos virtuales de aprendizaje". Esta nomenclatura responde a su propia estructura funcional pues permiten la manipulación del evento. Estos objetos no poseen perfil educativo ni responden a orientaciones pedagógicas específicas, se trata de representaciones funcionales de ideas matemáticas por lo que poseen una lógica de funcionamiento que se apega a la misma coherencia del concepto matemático que ejemplifica. En la red Internet existen varios tipos de objetos virtuales de aprendizaje, su origen depende del programa que permite su construcción y compilación. Describimos brevemente tres tipos de objetos virtuales de aprendizaje.

El caso del proyecto Descartes. http://descartes.cnice.mecd.es/index.html

Descartes es un entorno de aplicación de objetos virtuales de aprendizaje desarrollada por el Programa de Nuevas Tecnologías de la Información y la Comunicación (PNTIC) del Ministerio de Educación y Cultura de España. Este proyecto educativo se encuentra en una plataforma web cuyo contenido está organizado en unidades didácticas, cada una de ellas contiene lecciones de matemáticas en las que se hace uso de los objetos java (Cfr. Fig. 1).

Applets Java de contenido matemático. http://www.ies.co.jp/math/java/ En la red existen varios sitios que tienen publicados *applets java* con contenido matemático, los cuales en su mayoría están organizados por áreas generales de estudio, pero de forma aislada (Cfr. Fig. 2).

El proyecto Cabri Java. http://www.cabrijava.net/ Cabri Géomètre II es un programa que permite la construcción de objetos geométricos euclidianos a través de la manipulación de varios tipos de herramientas. El programa permite hacer experimentaciones, analizar situaciones geométricas, comprobar resultados, inferir, refutar y demostrar ciertos teoremas de la geometría clásica. Recientemente se le ha agregado una nueva herramienta al programa, se trata de la utilidad de *Cabri Java*. Este es un compilador de las animaciones de Cabri y las transformándolos en objetos *java*, esto permite su publicación en internet (Cfr. Fig. 3).

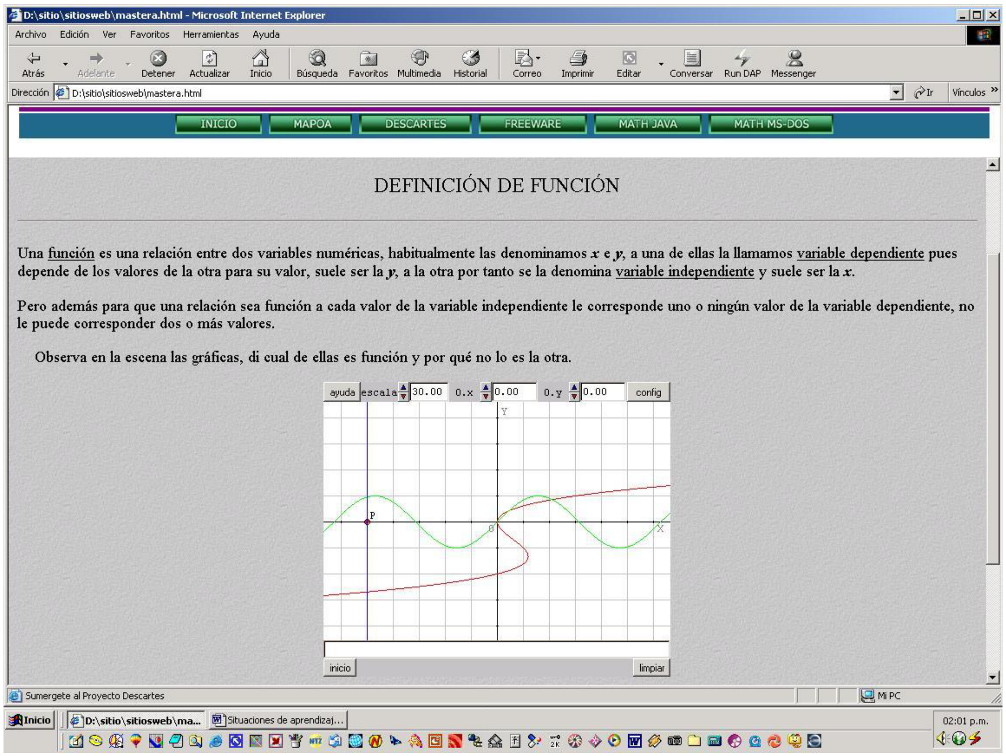


Figura 1: Página del proyecto Descartes, en el que se estudia el tema de “Función”

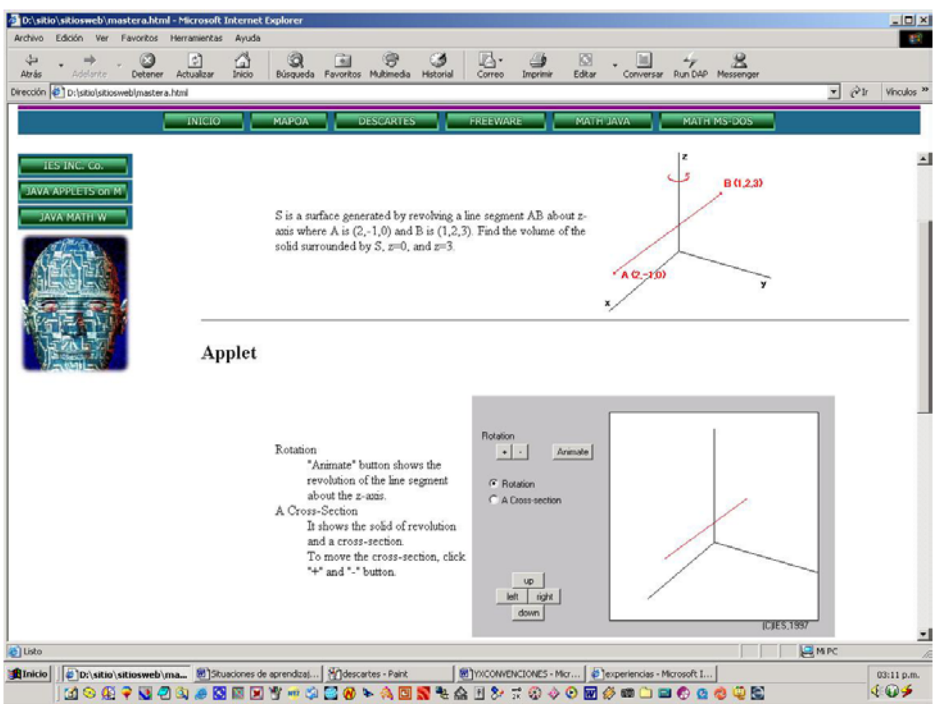


Figura 2: IES Web Site. The site has over 50 applets, and is updated once a week. Product information will be included at the site.

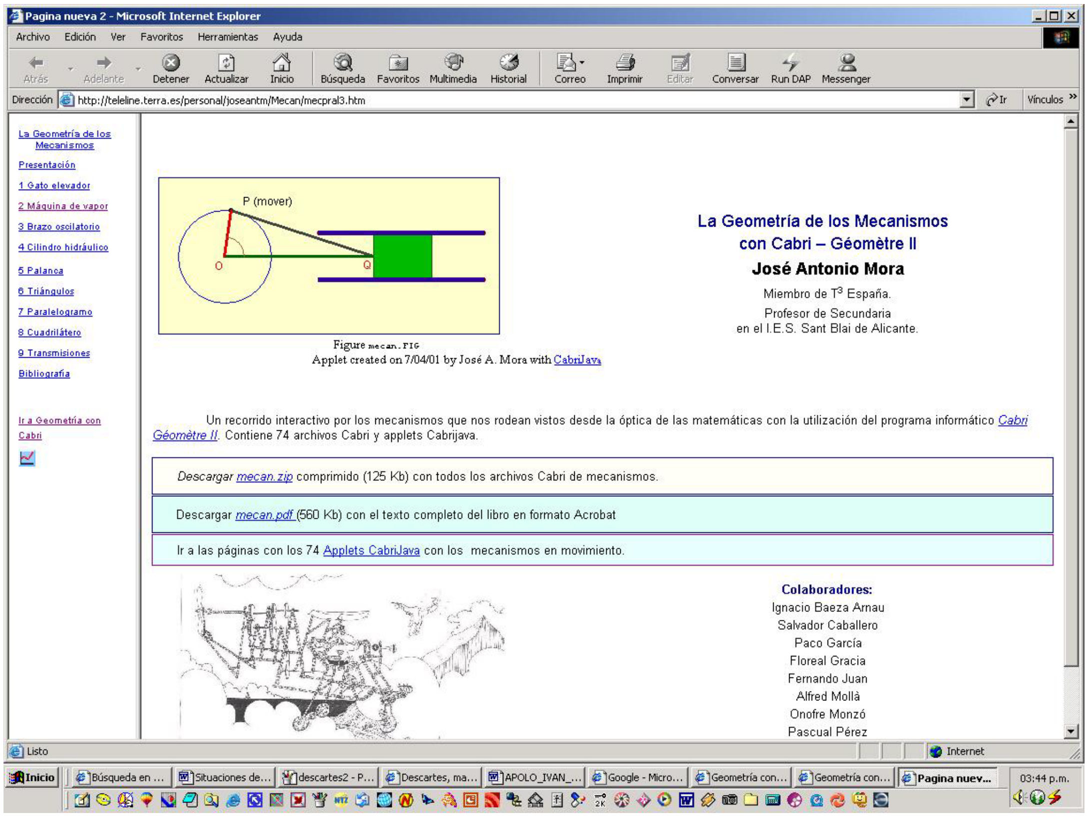


Figura 3 La Geometría de los Mecanismos con Cabri – Géomètre II (publicado en internet con Cabri Web. Página de José Antonio Mora, disponible en http://teleline.terra.es/personal/joseantm/home.htm

La secuencia

Para el diseño de la actividad se incorporaron las recomendaciones de Valero, (2000) para el estudio de la noción de derivada, aunque se hicieron adaptaciones de su diseño al escenario computacional, agregando nuevas preguntas que se plantearon a partir de la *movilidad* que tiene los objetos virtuales, por ejemplo, en cuanto a la sincronía que muestran los objetos al representar las gráficas de su primer derivada y su primitiva: ¿qué relación guarda la f respecto a f' cuando se desplaza la tangente de f? La actividad fue construía en formato *html* con *frames*[8], para cargar las páginas de Internet que tiene objetos java publicados. Se pide al usuario que ajuste el contenido de cada *frame* para contestar las preguntas planteadas. Se pide que las respuestas sean enviadas por correo electrónico cumpliéndose la primera fase de la actividad. La actividad (en formato *html*) se publica en Internet para que los usuarios puedan acceder a la información de las páginas insertadas con contenido java, sin necesidad de descargar archivos *class* o *jar* en su computadora.

[8] Estos "marcos" (en español) son áreas en las que se cargan nuevas páginas con formato html dentro de una principal. De este modo una página puede contener otra sin necesidad de abrir nuevamente el explorador.

El modelo didáctico

El elemento característico que subyace en las secuencias es la *acción*, entendida como la capacidad de manipulación que tiene el usuario sobre las construcciones *java*. Los objetos responden a voluntad de quien los utiliza, por lo que es factible identificar regularidades, características que les definen, comportamientos. Ya que el control lo tiene el usuario, entonces es posible analizar la situación que se muestra en el objeto *java*. Sin embargo la disponibilidad que ofrecen no es suficiente, porque estas representaciones no tienen, necesariamente, estados contradictorios o de reflexión que permitan el tránsito de un desequilibrio a un nuevo estado de equilibrio (Ruíz, 2001). En la perspectiva epistemológica que asumimos, de Bachelard, (1981), los aprendizajes previos deben ser tomados en cuenta para construir los nuevos conocimientos y para superar los obstáculos, es decir, se conoce en contra de conocimientos anteriores.

Los objetos *java*, son animaciones de ideas matemáticas, sin embargo no pueden concebirse como explicaciones o ejemplificaciones, pues cada objeto cuenta con un complejo mecanismos de operación, por ejemplo, el trazo de la derivada a partir de una función necesita la coordinación entre el grado de inclinación de la tangente y el eje donde se dibujará la derivada, así como la ordenada obtenida a partir de un cálculo matemático entre el grado de inclinación y la ordenada en cuestión. La secuencia de actividades propone aprovechar la capacidad de manipulación de los eventos para observar las regularidades e invariantes para formular explicaciones de los comportamientos. Existe en el diseño una clara intención de hacer transitar al estudiante por varios momentos, los cuales se controlan a través de variables que los mismos objetos java ofrecen.

Un primer acercamiento; elementos para la creación de las actividades

Las actividades diseñadas no tienen como objetivo facilitarle al alumno un contenido matemático, sino, enfrentarlo a una situación en la que se conflictúe con sus conocimientos anteriores pero que a la vez proporcionarle herramientas que le permitan abordar el problema y construir un nuevo conocimiento. Como explica Ferrari, (2001) "… si bien la intuición y la experiencia de un docente son importantes, no bastan para realizar el diseño de una situación" pues requiere de un acercamiento sistémico que "permita discernir y delimitar la problemática que deseamos abordar y decidir la manera en la que gestionaremos el tratamiento de la misma, es decir, el camino que deseamos que los estudiantes transiten". El diseño debe compromete un "saber escolar" y por tanto cobra sentido si está respaldada por un análisis preliminar[9] en el cual se contemplen los cuatro polos involucrados en la construcción del conocimiento, a saber: su naturaleza epistemológica; su dimensión sociocultural, los planos cognitivos que involucra y su difusión vía la enseñanza (Cantoral y Farfán, 1998).

Planteamiento de un escenario

Este novedoso diseño de *secuencia de actividades*, incorpora nuevas herramientas que ofrecen un múltiple acercamiento a los conceptos matemáticos desde varios enfoques; tales como secuencias interactivas, fenómenos modelados en sistemas, simuladores, analizadores en tiempo real, entre otros, los cuales emplean a la visualización como una medio para

[9] El trabajo de Valero, (2000) aporta un amplio referente epistemológico sobre la noción de derivada

lograr aprendizajes (Cfr. Figs. 4 y 5). Una versión corta de la secuencia didáctica se encuentra disponible en la dirección electrónica: http://geocities.com/apcastane/demo.htm

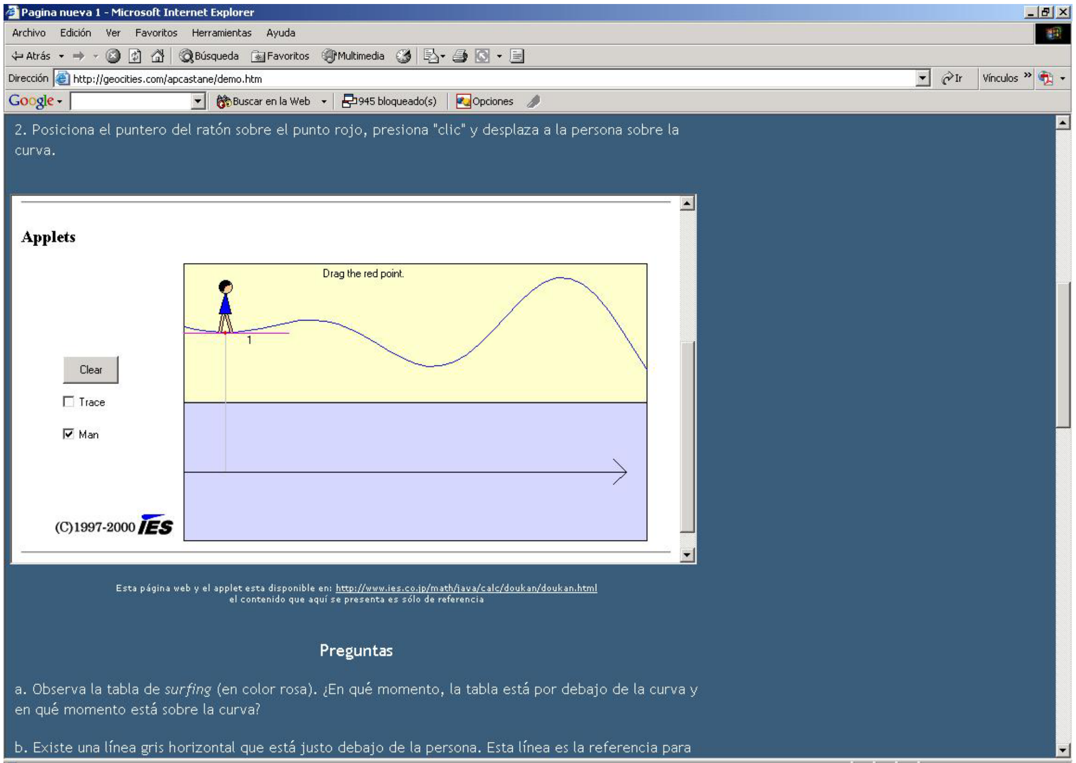


FIGURA 4 Primer frame en el que se estudia la relación entre la tangente y la curva y su derivada

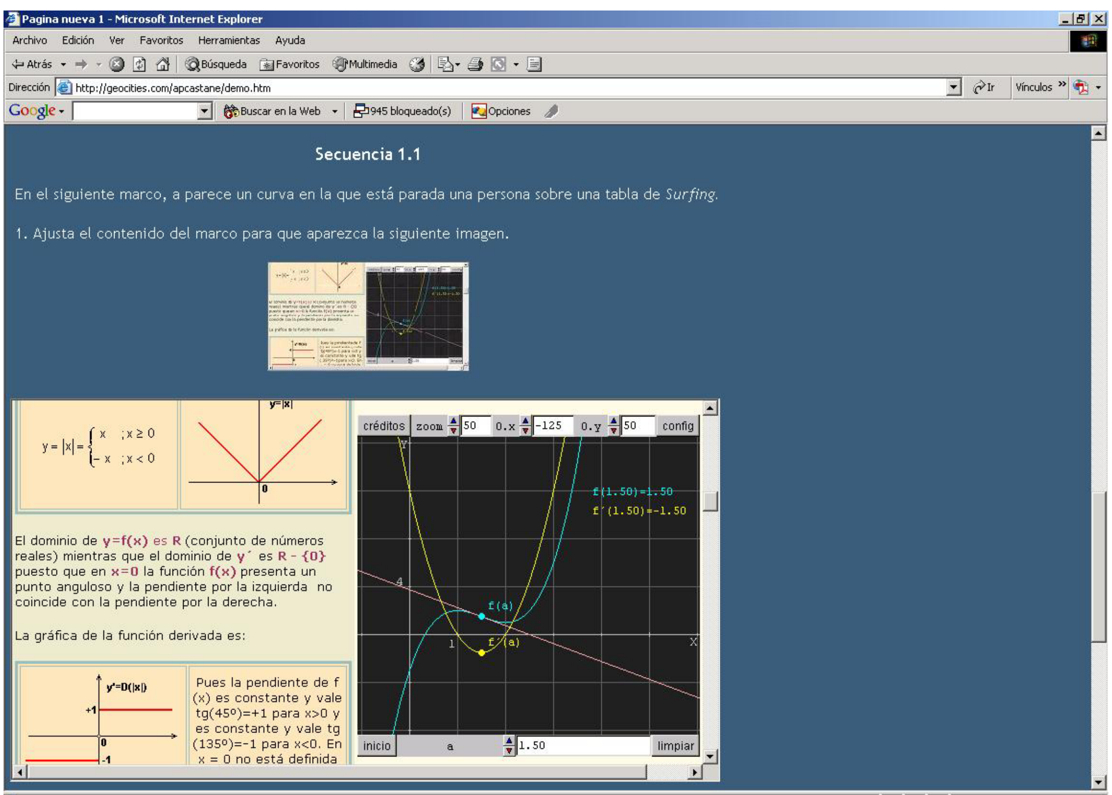


FIGURA 5: Segundo frame de la primer secuencia en la que se estudia la relación de la primer derivada y su primitiva

Primeros resultados: a manera de conclusión

El grupo que trabajó la secuencia estuvo compuesto por 10 estudiantes que cursan la maestría en Matemática Educativa en la modalidad a Distancia a través de internet. Dadas las características del grupo, no hubo problemas en el manejo de la computadora ni en el manejo de los objetos *java.* Las fases de desarrollo fueron las siguientes; en primer lugar, los estudiantes accedieron a la página web en donde está la actividad, siguieron la secuencia de actividades, contestaron las preguntas y las enviaron por correo electrónico. En segundo término, se pidió discutir en un foro las dificultades y dudas en los que interactuaron todos los estudiantes y el profesor. La Secuencia Didáctica para el estudio de la derivada estuvo compuesta de 8 secciones, cada una de ellas con el tratamiento de una idea específica. La primera de ellas fue el estudio de la relación entre la primitiva y su primer derivada en la que emplearon dos frames con páginas de contenido *java*. La primer actividad contiene un ejercicio que tiene por objetivo identificar el valor de la ordenada en la derivada a partir de estimar el grado de inclinación de la recta tangente de su primitiva. De hecho, la movilidad en los objetos *java* favoreció la identificación de segmentos que varían (se muestran en el primer *frame)*, lo que permitió desarrollar la habilidad de relacionar las gráficas de la derivada y de la función son sólo inspeccionar su forma.

Bibliografía

Artigue, M. (2002). Leargning mtahematics in a CAS environment: the genesis of a reflection about intrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *Internacional Journal of Comupter for mathematical Learning.* 7: 245-274, 2002. Netherlands: Kluwer Academia Publishers.

Bachelard, G. (1981). *La formación del espíritu científic*o (9a, edición). México: Siglo XXI Editores.

Brousseau, G. (1983). Les obtacles épistémologiques et les problémes en mathematiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 4 (2), 165-198.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: Perspectivas apportées par une approche antrhopologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 12(1) : 77-111

Chevallard, Y. (1992). Intégration et viabilité des objets informatiques dans l'enseignement des mathématiques. In B. Cornu (Ed.), *L'ordinateur pour enseignes les Mathématiques, Nouvelle Encyclopédie Diderot* (pp. 183-203). Paris : Presses Universitaries de France

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado.* Buenos Aires, Argentina: Aique Grupo Editor SA.

Cantoral R., *et al* (2000). *Desarrollo del pensamiento matemátic*o. México: Trillas.

Cantoral, R.& Farfán. R. (2004). *Desarrollo conceptual del cálculo*. México: Edit. Thomson

Castañeda, A. (2004). *Estudio de la evolución didáctica del punto de inflexión: una aproximación socioepistemológica.* Tesis Doctoral. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. México

Castañeda, A.et al (2001). Educación a distancia: una experiencia en Matemática Educativa. En Cordero, F. (Coord. Edit)*, Antología de los CIMATES, Número I* (pp. 293-317). México: programa editorial de la Red de Cimates.

Cantoral, R. y Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Épsilon* 42, 353-369.

Cantoral, R. y Montiel G. (2001). *Visualización, estudio de la funciones*. Prentice Hall, Mexico

Ferrari, M. (2001). *Estudio socioepistemológico de la función logaritmo.* Tesis de Maestría, Cinvestav-IPN, México.

IES. (2004). *Manipula Math Applets Collection*. Consultado el día 10 de abril de 2004 desde http://www.ies.co.jp/math/products/

Laborde, C. (2001). Integration of technology in the design of Geometry Tasks with Cabri-Geometry. *Internacional Journal of Comupter for mathematical Learning.* 6: 283 – 317, 2001. Netherlands: Kluwer Academia Publishers.

Proyecto Descartes. (2004). *Unidades Didácticas con Applet Descartes.* Consultado el día 10 de Abril de 2004 desde http://descartes.cnice.mecd.es/

Ruíz, L. (2001). Ingeniería Didáctica. Construcción y análisis de situaciones de enseñanza - aprendizaje. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativ*a, *Relme-14, Panamá, República de Panamá.* (volumen 14, pp. 122-130). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Valero S. (2000). *La derivada como organización de las derivadas sucesivas*. Tesis de Maestría, Universidad Virtual del ITESM, México.

CURSO A DISTANCIA "FUNCIONES MATEMÁTICAS EN LA ENSEÑANZA MEDIA": CONTENIDOS, ACTIVIDADES, METODOLOGÍA Y ALGUNOS RESULTADOS.

Juan Silva y Fidel Oteiza
Centro Comenius Universidad de Santiago de Chile, Chile
jsilva@comenius.usach.cl y foteiza@comenius.usach.cl

Resumen

El curso funciones matemáticas en la enseñanza secundaria es la primera experiencia de capacitación masiva de docentes a nivel nacional en la modalidad a distancia, usando las tecnologías de la información y comunicación (TICs), con cobertura nacional e impulsada por el Ministerio de Educación de Chile. La formación se centra en una área especifica del currículo como lo es la matemática en el nivel secundario y en un contenido curricular concreto las funciones. El conocimiento de la reforma curricular, la generación de material didáctico, la incorporación de las TICs en las prácticas pedagógicas y la evaluación de los aprendizajes, han sido los contenidos sobre los cuales se ha diseñado y estructurado el curso. La metodología de trabajo situó al docente en el centro del aprendizaje, como una aprendiz que define en forma autónoma su camino de aprendizaje de acuerdo a sus intereses y motivaciones. Los resultados muestran una deserción inicial importante, pero luego un alto compromiso y permanencia en el curso, valoración de los contenidos, los recursos propuestos, las estrategias de enseñanza y, la metodología de trabajo implementada.

Introducción

"La formación a distancia, es un modelo de educación que se caracteriza por el rol secundario de la presencia física del profesor y los estudiantes en un mismo espacio y tiempo. Utiliza diversos materiales diseñados por un establecimiento (impresos, sonoros, informáticos, etc.) con el fin de suplir la distancia y mediatizar el proceso de enseñanza aprendizaje. Los roles del docente y del alumno son diferentes a los que se dan en la formación presencial, el alumno se hace responsable de su aprendizaje y diseña un camino autónomo para lograrlo, el docente actúa como un facilitador en el logro de los objetivos propuestos" (Silva y Oteiza, 2002). Como se observa, los ejes centrales son: el rol secundario de la presencia física del profesor y los estudiantes en un mismo espacio y tiempo; la utilización de los medios; la influencia del establecimiento y los nuevos roles del alumno y del profesor.

La Formación a Distancia, desde sus orígenes en 1840, con Isaac Pitman, hasta estos días ha experimentado notorios cambios, desde los cursos por correspondencia hasta cursos en el espacio virtual (Holmberg, 1981). A esto ha contribuido diferentes elementos, tales como: la irrupción de las tecnologías de la información y las comunicaciones (TICs), el nivel de accesibilidad creciente de las instituciones y personas a estos recursos; la posibilidad que ofrecen estos recursos de incorporar elementos socializadores en el proceso de enseñaza aprendizaje -interacción en línea o en forma diferida, trabajos colaborativo y cooperativo, entre otros- los cuales permiten romper el asilamiento de quien se forma a distancia; junto con potenciar las ofertas por medio de elementos instruccionales como material multimedia, simulaciones, acceso a sitios web, etc. (Sigáles 2001). Por otra parte, la necesidad creciente de formación continua a lo largo de la vida, que la sociedad de la información genera, han dado un impulso sin precedentes a la oferta de educación a distancia, desarrollándose distintos niveles, formatos y modalidades (Bates, 20001, Moore, 2001).

En Chile, de acuerdo al Mineduc[10], en el sistema público 1.336, el 93%, de los establecimientos de educación secundaria están conectados a la Red Enlaces, de ellos 1.157 el 87% cuentan con conexión Internet. Los profesores de estos establecimientos han sido capacitados en el uso de los recursos informáticos, entre ellos Internet. Un estudio reciente[11] , muestra que un 64% de los docentes, tiene equipamiento en su hogar y un 41% de ellos cuenta con conexión a Internet. Lo anterior llevó al Mineduc a plantearse la posibilidad de capacitar a docentes del sistema público por medio de cursos a distancia, haciendo uso de las TICs. El curso que motiva este trabajo, es uno de los contratos licitados por el Mineduc para la realización de un curso destinado a docentes de matemática, en el tema de funciones matemáticas en la enseñanza media, y en su ejecución**,** actuó un consorcio formado por tres instituciones: Fundación Chile responsable de los aspectos tecnológicos, diseño del curso en la plataforma y administración de los cursos; G&P consultores en el área de metodología y modelos de educación a distancia y el centro Comenius de la Universidad de Santiago de Chile[12], a cargo de los aspectos pedagógicos y los contenidos del curso.

En este artículo encontrará elementos asociados a: el diseño pedagógico del curso; la formación y trabajo con los tutores; los principales resultados obtenidos en la ejecución del curso: la asistencia a sesiones presenciales y entrega de trabajos; las dificultades observadas en el desarrollo de las actividades, y en el acceso y uso de la tecnología; y las principales conclusiones generadas en esta experiencia.

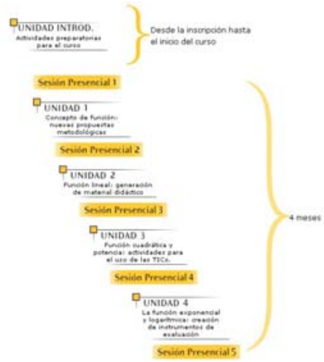
El curso y sus principales elementos

El curso **"**Funciones matemáticas en la Enseñanza Media**",** incorpora los elementos de la nueva propuesta curricular en el subsector de Matemática impulsada por el Mineduc, el uso de las TICs y nuevas metodologías de enseñanza. Todo esto bajo un modelo de educación a distancia.

Los Objetivos: Se esperaba que, una vez finalizado el curso, el participante: a) Diseñe enfoques metodológicos coherentes con los fundamentos y orientaciones principales del nuevo currículum del subsector de Matemática para la educación media, para ser aplicados en su práctica docente, contextualizados a las condiciones de su medio escolar; b) Actualice su información relacionada con las funciones matemáticas previstas en los Planes y Programas vigentes; c) Desarrolle capacidades y habilidades necesarias para el uso, manejo y aprovechamiento de las herramientas tecnológicas aplicadas al aprendizaje de conceptos de funciones en los alumnos; d) Genere material didáctico destinado a mejorar la calidad del aprendizaje de sus alumnos.

Estructura del curso*:* La organización del curso contempló 20 horas presenciales distribuidas en 5 sesiones de 4 horas de duración cada una de ellas y 160 horas a distancia, distribuidas en 4 Unidades. La siguiente figura muestra cómo se distribuyen estas sesiones presenciales y unidades a lo largo del desarrollo del curso.

[10] Datos obtenidos de www.redenlaces.cl
[11] Resultados del estudio "Penetración y uso de las tecnología en los profesores" http://www.redenlaces.cl/documentos/informe.pdf
[12] El Centro Comenius de la Universidad de Santiago (www.comenius.usach.cl) es uno de los Centros de la Red Enlaces y atiende a 774 establecimientos de las regiones Metropolitana y Sexta



Unidad Introductoria: va desde la matricula hasta eñ inicio del curso y consistía en actualizar conocimientos mediante un proceso de diagnóstico previo, utilizando instrumentos de autoevaluación personal. Además se buscó, disminuir el desinterés, que se puede generar, entre la inscripción e inicio del curso.

Las **Sesiones Presenciales**, permitieron: presentar los procedimientos, los espacios virtuales de trabajo; motivar, mostrar la perspectiva general del curso y de sus unidades; facilitar el intercambio entre participantes y propiciar el trabajo colaborativo.

La primera unidad “Concepto de función: nuevas propuestas metodológicas”, buscó generar, un espacio de análisis frente a la nueva propuesta curricular de matemática, en enseñanza media. Las unidades “Función lineal: Generación de material didáctico”, “Función cuadrática y potencia: prácticas para el uso de las TICs” y “Funciones exponencial y logarítmica: creación de instrumentos de evaluación”, hacen énfasis en el contenido matemático que indican y áreas transversales en el nuevo currículo de la asignatura: material didáctico; incorporación de las TIC; instrumentos de evaluación. Elementos que se reflejan en el producto final de cada unidad: trabajos calificados.

La evaluación formal se realizó por medio de los trabajos calificados y por la participación. El trabajo calificado se evaluó de acuerdo a una pauta que contó con 10 categorías y sus respectivos indicadores. En la participación se evaluó, las intervenciones por parte del participante, en los recursos dispuestos para este efecto.

Contenidos: Los contenidos del curso se organizaron por medio de las actividades, cada unidad tenía cuatro actividades con un propósito diferente. La primera actividad estaba destinada a conocer la reforma curricular (planes y programas generados por el Mineduc para las funciones en estudio), y una propuesta del equipo Comenius-Usach de cómo interpretar esa propuesta curricular. Se trata de documentos en línea (con respaldo en texto), con una propuesta metodológica que posee elementos históricos, motivacionales y conceptos previos. Además considera como apoyo a la actividad: animación; situaciones contextualizadas; y apoyo en Microsoft Excel.

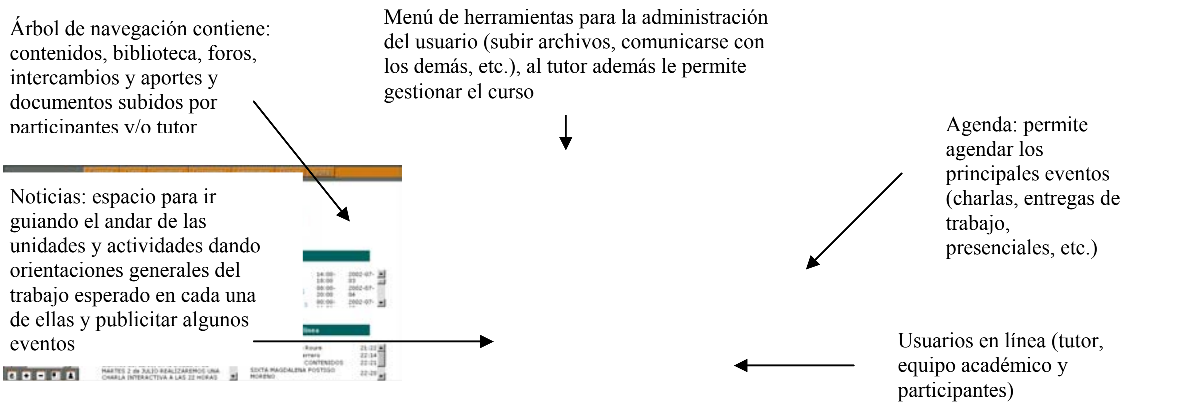
Una segunda actividad se relacionó con la navegación en Internet y la búsqueda de información de las funciones en estudio. Para esto, se entregó una lista con direcciones y una breve descripción de lo que allí se puede encontrar. Se invitó a los docentes a hacer sus propias búsquedas, compartirlas con el grupo curso y almacenarlas en su portafolio.

La tercera actividad relacionó los modelos matemáticos con el uso de las TIC, como instrumento para modelar y experimentar con las funciones, su gráfica y su relación algebraica. Para esto usó graficadores, GRAPHMATICA[13], FUNCIONES para WINDOWS[14], ambos software de libre disposición que se pueden bajar desde Internet. También se usó la planilla electrónica Microsoft EXCEL.

La cuarta actividad estaba destinada a apoyar la generación del producto calificado, orientando su desarrollo, entregando documentos de apoyo, generando los espacios para el trabajo colaborativo y ejemplos del producto esperado.

[13] http://www.graphmatica.com/espanol/grmat16e.zip
[14] http://www.xtec.es/~jlagares/download/fuwi260e.zip

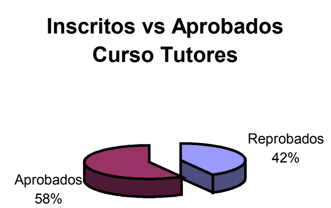
Los Ambientes de trabajo*:* El entorno de trabajo proveía de diferentes ambientes destinados a poner a disposición del participante, los contenidos del curso, los ambientes de socialización. La siguiente figura muestra estos espacios y una breve descripción de ellos.



Las tutorías*:* El apoyo al participante es fundamental en el éxito de las experiencias de formación a distancia, puesto que permite cubrir las diversas necesidades que manifiesta el participante durantes el proceso de aprendizaje. Este sistema de tutoría, estaba compuesto por tres niveles de apoyo: el equipo académico quién apoyó el trabajo de los tutores en los aspectos pedagógicos y contenidos del curso; el supervisor de tutores, con un rol más administrativo, que siguió y acompaño el trabajo del grupo de tutores. El tutor, cuyo rol era eminentemente pedagógico, mantuvo y animo la comunidad de aprendizaje resolviendo dudas, orientando, estimulando el trabajo colaborativo.

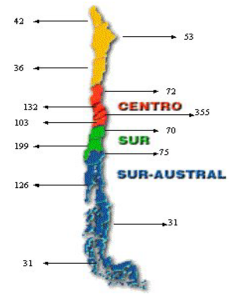
Algunos resultados

Selección y Formación de tutores: Se capacitó a 101 profesionales -profesores en las universidades regionales y profesores de matemática que actúan como Capacitadores en la red Enlaces- en el modelo a distancia, utilizando la misma plataforma y ambientes de trabajo en le cual se desarrollaron los cursos de los participantes.



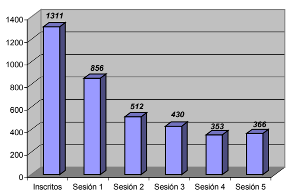
La formación contempló 60 horas cronológicas, desarrolló tres unidades: introducción a la formación a distancia; la función como modelo (primera unidad del curso de docentes); evaluación del aprendizaje en entornos virtuales. De los 101 participantes aprobó el curso 59 que corresponde al 58% de los inscritos. Los reprobados alcanzaron a 42 correspondiente a un 42%.

Inscripción de alumnos*:* Se llegó a un total de 1.311 docentes inscritos. Cabe señalar que este tenía un costo base de inscripción equivalente a $8.000 equivalente a unos US$11. Existieron alumnos inscritos en las 13 regiones, en las cuales se divide Chile.



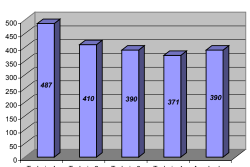
Se registran las mayores concentraciones en las regios Metropolitana XIII (donde se encuentra la capital del país), Octava, Quinta y Décima con 27%, 15%, 10% y 10% respectivamente. Se formaron 46 cursos, con un promedio de 28 participantes por curso.
Los docentes proceden de establecimientos de dependencia Municipal 778 un 59%, dependencia Subvencionado 464 un 35%, de establecimientos particulares 62 un 5% y un 1% que no especificó a que tipo de establecimiento pertenecía.

Sesiones Presénciales*:* Al analizar los resultados de las sesiones presenciales, se puede observar una fuerte deserción entre la inscripción y la primera presencial y entre la primera y la segunda. La segunda presencial es importante en el compromiso del alumno con el curso, dado que marca la entrega del primer trabajo calificado.



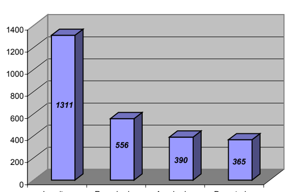
El promedio de asistencia, a partir de la segunda sesión, fue de 425 participantes. A la primera presencial asistieron 858 de los inscritos lo que corresponde a un 65% de los 1.311, es decir hay una deserción previa al inicio del curso de 453 que corresponde a 34%.

Trabajos calificados*:* Se puede observar que entre el primero y el cuarto, existe una disminución progresiva en la entrega de trabajos calificados.



El primer trabajo calificado lo entregan 487 que y el último 371 que corresponde al 76% que entregaron el cuarto, es decir si tomamos la entrega de trabajo 1, como un indicador de compromiso real con el curso, el nivel de deserción es sólo de un 24%.

En términos generales*:* Del total de 1.311 inscritos, aprobaron el curso 390 el 30%, lo reprobaron 556 un 42% y desertaron, es decir que nunca asistieron a una sesión presencial ni entregaron un trabajo calificado, 365 un 28%.



Si se analiza los resultados, se tiene que participaron en el curso 946 alumnos el 72% de los 1.311 inscritos. Los participantes corresponden a los que asistieron a alguna presencial y/o entregaron un trabajo. Si se analiza los resultados de los aprobados y reprobados en relación a los participantes, se tiene que el nivel de aprobación es de 41% y el de reprobados de 59%.

Conclusiones

La propuesta aquí planteada se enmarca dentro de unas bases de licitación. En este aspecto creemos que es interesante analizar, a la luz de los resultado, algunos aspectos, por ejemplo: a) la imposibilidad de desarrollar una fase piloto -salvo la unidad uno que fue seguida por los tutores, como parte de su formación- esto obligó a ir descubriendo e intentar resolver los problemas, durante la marcha de los cursos; b) la distribución de los tutores a lo largo del país, quizás hubiera sido mejor agrupar un conjunto de profesionales en forma centralizada para ejecutar las tareas de tutorías, tendiendo de esta forma el equipo de supervisión mayor coordinación y monitoreo del trabajo de los tutores; c) las exigencias de obligatoriedad de asistencia a las presénciales.

Se puede concluir que los horarios y lugares de conexión no eran los esperados, en efecto: se usan poco los laboratorio de los establecimientos para conectarse, se conectan desde la casa o la de algún amigo; La mayor de los docentes se conectaron en horarios nocturnos, a partir de las 19:00 horas hasta las 24:00 horas, siendo los horarios pick entre las 21:00 horas y 23:00 horas lo que traslado el trabajo del síncrono del tutor hacia esos horarios.

Por otra parte el nivel de uso de Internet por parte de los docentes, no era muy alto lo que dificultó al inicio del curso el acceso a la plataforma y el manejo al interior de esta, gran parte del trabajo desarrollado en las primeras semanas se orientó al uso de la plataforma y a la navegación en Internet. Adicionalmente las competencias de un profesor para seguir un curso a distancia en el cual adquiere un rol autónomo y protagónico en la construcción de conocimiento parecen no ser muy altas.

Desde el punto de visto del diseño, distribuir las tareas de supervisión de tutores y equipo académico en dos equipos profesionales distintos tiene sus costos. La experiencia ha demostrado que los alumnos hacen pocas consultas y que los tutores necesitan apoyo para poder orientar mejor a sus alumnos, especialmente en el espíritu y objeto de las actividades y de los trabajos calificados. Se necesita un canal de comunicación más directo del equipo académico creador de los contenidos, con los tutores y los propios participantes. Lo ideal sería que esta etapa de supervisión del trabajo de los tutores fuera realizada por un sólo equipo que cuente con estos dos perfiles: el pedagógico y el administrativo.

El primer trabajo calificado da cuenta de los alumnos que han tomado la opción de seguir el curso, observándose de allí en adelante un bajo nivel de deserción. Las deserciones iniciales se deben a diferentes razones, algunas de las más comúnmente esgrimidas son: la falta de tiempo; el acceso a la tecnología; el nivel de exigencia del curso, entre otras. Los participantes han valorado la propuesta metodológica, la evaluación del curso, el aprendizaje transversal que se ha producido del uso de las TICs especialmente de Internet y software matemático y la construcción de conocimiento en forma colaborativa.

Una de las interrogantes que sería interesante poder investigar es el nivel de transferencia al aula, es decir como el profesor que ha seguido este curso, ha sido capaz de utilizar lo aprendido en su sala de clase, en cuanto a interpretar e implementar la reforma, el tratamiento de las funciones y otros contenidos, y la inserción de las TICs como herramienta de apoyo.

Bibliografía

Azcárate, C. & Deulofeu, J. (1996). Funciones y Gráficas, Madrid: Síntesis.

Bates, A.W. (1993). Theory and practice in the use of technology in distance education, en Keegan, D. Ed., *Theoretical principles of distance education*, Routledge, Londres / Nueva York.

Bates, A. W. (2001, 26 Noviembre). *Aspectos culturales y éticos en la educación internacional a distancia*, Universidad Abierta de Cataluña, Barcelona, http://www.uoc.es/web/esp/art/uoc/bates1201/bates1201.html

Garrison, Dr. y Shale (1987). Mapping the boundaries of distance education: Problems in defining the field, *The American Journal of Distance Education 3 (1),* pp.20-23.

Guillemet, P (1989). La formation à distance maintenant*, Documento de referencia, Télé Universite, Saintes-Foy* Québec, Canada, pp. 3-7 y 17-20.

Holmberg, B. (1981) Independent Study for university degrees: Distance Education compared with the Keller Plan, *The American Journal of Distance Education 2 (1),* pp.39-53.

Ljosa, E. (1988). The boundaries of distance education, *Journal of Distance Education 3 (1),* 1988, pp. 85-88 y 661-679.

Moore, M. (2001, 6 Junio). *La educación a distancia en los Estados Unidos: estado de la cuestión,* Universidad Abierta de Cataluña, Barcelona. http://www.uoc.es/web/esp/art/uoc/moore/moore.html

Ministerio de Educación. (1998). *Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios para la Educación Media*. MINEDUC: Santiago de Chile.

Oteiza, F. & Silva. J (2001). Computadores y Comunicaciones en el Currículo Matemático: Aplicaciones a la Enseñanza Secundaria. *Revista Pensamiento Educativo*, 27, pp.127-168, Santiago de Chile: PUC Chile.

Sjöstrad, D. (1994). *Mathematics with Excel*. Sweden: Studentlitteratur.

Silva, J. y Oteiza, F.(2002). Formación continua y a distancia: Una visión a partir de la experiencia*, Revista consejo superior de educación, N° 16,* Santiago, Chile.

Silva, J. y Oteiza, F. (2002, Agosto). Curso a Distancia "Funciones matemáticas en la enseñanza media": Diseño, implementación y los primeros resultados**,** *Actas VI Congreso de Educación a Distancia MERCOSUR/SUL*, Antogafasta,Chile.

COMPRENSIÓN DE LA APLICACIÓN DEL ÁLGEBRA DE MATRICES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ECONÓMICOS

Nelly Elizabeth González de Hernández
Universidad Central de Venezuela. Caracas, Venezuela
gonzalne@yahoo.com

Resumen

Si consideramos que el trabajo de un docente exige una preparación para cada clase, desarrollada bajo la premisa ¿entenderá el alumno si explico de esta manera...? esta experiencia significa para él, una investigación sobre la cual regresará tantas veces como oportunidades tenga para presentar nuevamente el tema.

En nuestra búsqueda del día a día nos hemos planteado una preocupación muy específica al pretender enseñar *Operaciones Algebraicas con Matrices*, donde los estudiantes rápidamente captan la secuencia lógica para realizar operaciones, pero en la que demuestran que prefieren los procesos repetitivos y cuando se les pide analizar la información, se confunden y ofrecen opiniones equivocadas.

El punto que nos ocupa en este trabajo es el título señalado anteriormente, *Operaciones Algebraicas con Matrices*, el cual forma parte del Tema I de la materia Matemática III en la carrera de Administración y Contaduría de la Universidad Central de Venezuela. Por la naturaleza de la formación que damos a nuestros estudiantes, la aplicación práctica de esta Unidad está dirigida a la resolución de problemas de índole económica estudiados en este nivel de la carrera, que suele ser el tercer semestre, de los diez que deben aprobar.

En este trabajo se explican algunas estrategias puestas en práctica con significativo éxito, después de una revisión del material bibliográfico recomendado hasta el momento y, posteriormente a ensayar las técnicas o métodos encontrados en dicho material y revisadas —en algunos casos modificadas— por nuestra experiencia.

Para realizar esta investigación se organizaron sesiones de trabajo teórico-práctico durante el primer y segundo semestre lectivo 2002. De cada sección (el promedio semestral es de 10 secciones, con 50 estudiantes cada una) se escogieron al azar 5 estudiantes, y se procedió a aplicar las estrategias de enseñanza que hemos diseñado para esta oportunidad.

Los resultados se han comunicado a los profesores que dictan la materia, con la finalidad de continuar mejorando las propuestas que son fruto de este estudio, así como esperamos tener la oportunidad de compartir esta experiencia con nuestros colegas latinoamericanos.

Introducción

El motivo que nos mueve a realizar la investigación en esta oportunidad, es la intención de averiguar si el uso de los conocimientos teóricos, adquiridos durante la explicación de cómo realizar operaciones de multiplicación de matrices, son eficientemente interpretados por los estudiantes, igualmente, si la aplicación de este conocimiento obedece a la compresión total de la información que se desea transmitir en clase y no es una repetición automática de otras experiencias realizadas en el aula.

Considerando que no sólo es la actuación del profesor la que define cuáles son los métodos de trabajo que utilizará el alumno, sino que los textos recomendados dirigen con especial acentuación la forma cómo se enfrenta la resolución de problemas, hemos realizado una minuciosa búsqueda en los libros que se especializan en el tema de la matemática para economistas y administradores y de éstos, hemos hecho especial revisión en los que son más populares, por su aparición insistente en los programas de estudio de nuestras universidades

Objetivos de la investigación

Establecer estrategias de enseñanza que permitan realizar el proceso en el aula de una manera más eficiente.

Revisar los métodos de trabajo de los docentes de Matemática III en el campo del álgebra matricial

Revisar la bibliografía dirigida a las Escuelas de Administración y Contaduría sobre el tema de matrices y sus aplicaciones económicas

En las actividades de aula, los estudiantes enfrentan distintas estrategias de enseñanza que difieren en el grado de complejidad y en el volumen de la información contenida. Los alumnos se aproximan a ellas utilizando su capacidad e inteligencia en muchos casos, no para aprender sino para descubrir un patrón donde los datos son sustituidos y la solución aparece, no importa como. La anterior afirmación es una situación que con frecuencia se discute en reuniones docentes, donde se plantean que, en algunas oportunidades, los profesores en su esfuerzo de simplificar su explicación, presentan en detalle los pasos a seguir para resolver un ejercicio, sin dejar un esfuerzo de imaginación, abstracción y análisis al educando. Acostumbramos a los jóvenes a repetir sin convicción, a reproducir sin criticar, a calcar sin discernimiento. Como bien lo dice el refrán, de buenas intenciones...

Interesa comprobar con cuál experiencia se obtiene mejores resultados, revisando cuándo el conocimiento activo y la posibilidad de seleccionar y usar de manera flexibles estrategias para resolver problemas, favorecen un mejor aprendizaje.

Metodología utilizada

La ingeniería didáctica ha sido utilizada cumpliendo con los siguientes pasos: diseño de la actividad de aprendizaje, aplicación de la actividad, evaluación de resultados.

Diseño de la Actividad

<u>Primer paso:</u>

Definición teórica de la operación *multiplicación de matrices*.

<u>Segundo paso:</u>

Explicamos la operación: Dadas dos matrices A_{mxp} y B_{pxn} se define la multiplicación de AxB como una matriz C_{mxn} donde $c_{ij} = \sum a_{ik} x b_{kj}$.

<u>Tercer paso:</u>

Realizamos algunos ejercicios para comprobar cuando el producto de matrices es posible y verificamos que el producto de matrices no es conmutativo. Un modelo de estos ejercicios puede ser:

Sea $A_{2x3} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & -2 & 5 \end{bmatrix}$ y $B_{3x4} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 5 & -1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Calcular:

AxB

BxA

Las repuestas a estos ejercicios es:

Ejercicio 1: $A_{2x3}xB_{3x4} = C_{2x4} = \begin{bmatrix} 22 & -3 & 0 & 14 \\ 16 & 10 & 5 & 10 \end{bmatrix}$

Ejercicio 2: $B_{3x4}xA_{2x3}$ Esta multiplicación no se puede realizar porque el número de columnas de la matriz B es diferente al número de filas de la matriz A.

Otro tipo de ejercicios consistirían en proponer la multiplicación de dos matrices de la forma siguiente: Sea $P_{2x2} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ y $Q_{2x2} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

Calcular:

PxQ

QxP

Los resultados serían:

Ejercicio 3: $P_{2x2}xQ_{2x2} = R_{2x2} = \begin{bmatrix} 19 & 32 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$.

Ejercicio 4: $Q_{2x2}xP_{2x2} = M_{2x2} = \begin{bmatrix} 15 & 24 \\ 10 & 7 \end{bmatrix}$.

Observamos que en ambos casos es posible realizar el producto de matrices pero que $\begin{bmatrix} 19 & 32 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 15 & 24 \\ 10 & 7 \end{bmatrix}$, es decir, $PxQ \neq QxP$, en este caso.

Cuarto paso:

Una vez que los alumnos manejan con destreza las operaciones algebraicas con matrices, proponemos un problema como el siguiente:

Una empresa elabora 3 artículos (A, B, C) los cuales necesitan de 3 componentes (x, y, z) como materia prima en las proporciones siguientes: el producto *A* requiere 1 unidad de *x*, 4 de *y* y 2 de *z*. El producto *B* requiere 2 unidades de *z* y 5 unidad de *x*. El producto *C* necesita 3, 2, 6 unidades de *y*, *z* y *x*, respectivamente. Conocemos que la programación de la producción para las próximas 3 semanas es la siguiente: del producto *A* se fabricará 10, 20, 15 unidades, del producto *B* se fabricará 25 unidades en la semana 2 y 10 unidades en la semana 1, del producto *C* se elaborará 20 unidades en la semana 3. Determine la cantidad de materia prima que se requiere para elaborar cada producto durante las próximas 3 semanas.

Quinto paso:

A todos los grupos se les explicó de igual manera el como realizar operaciones de multiplicación de matrices pero al proponer la aplicación práctica se hizo la siguiente diferenciación. Al primer grupo (primer semestre 2002) se le explicó que al multiplicar los elementos que conforman las matrices, deberíamos revisar que las unidades que se operaban fuesen consistentes, esto es, si organizamos nuestros datos de la siguiente manera:

	Productos		
Componentes	A	*B*	*C*
X	1	5	6
Y	4	0	3
Z	2	2	2

	Producto		
Semana	A	B	C
1	10	10	0
2	20	25	0
3	15	0	20

Vamos a establecer que la matriz $E_{3x3} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ y $G_{3x3} = \begin{bmatrix} 10 & 10 & 0 \\ 20 & 25 & 0 \\ 15 & 0 & 20 \end{bmatrix}$

Y proponemos realizar la siguiente multiplicación $E_{3x3} x G_{3x3}$

Verificamos que algebraicamente la operación se puede realizar porque el número de columnas de la matriz *E* es igual al número de filas de la matriz *G* y procedemos

$$ExG = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} 10 & 10 & 0 \\ 20 & 25 & 0 \\ 15 & 0 & 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1x10)+(5x20)+(6x15) & ... & ... \\ ... & ... & ... \\ ... & ... & ... \end{bmatrix}$$

Revisemos la operación que estamos efectuando:

$$1\frac{\text{unidad } x}{\text{Producto } A}10\ \frac{\text{Producto } A}{\text{Semana } 1}+5\frac{\text{unidad } x}{\text{Producto } B}20\frac{\text{Producto } A}{\text{Semana } 2}+6\frac{\text{unidad } x}{\text{Producto } C}15\frac{\text{Producto } A}{\text{Semana } 3}$$

Estamos multiplicando necesidades de materia prima de un producto por las cantidades a elaborar de otro producto, es inconsistente.

Planteamos ahora la operación de la siguiente manera:

$$ExG' = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} 10 & 20 & 15 \\ 10 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1x10)+(5x10)+(6x0) & ... & ... \\ ... & ... & ... \\ ... & ... & ... \end{bmatrix}$$

Revisemos la consistencia de las unidades:

$$1\frac{\text{unidad } x}{\text{Producto } A}(10\frac{\text{Producto } A}{\text{Semana } 1})+5\frac{\text{unidad } x}{\text{Producto } B}(10\frac{\text{Producto } B}{\text{Semana } 1})+6\frac{\text{unidad } x}{\text{Producto } C}(0\frac{\text{Producto } C}{\text{Semana } 1})$$

Este primer elemento nos indica la cantidad de materia prima *x* que debemos tener en existencia para fabricar los productos *A*,*B* y *C* durante la semana 1. Y así, sucesivamente, verificamos la consistencia de la operación que realizamos.

Un segundo grupo de estudiantes (del segundo semestre lectivo 2002) recibió igual información, pero se propone que, a semejanza de la descripción del orden de una matriz, debemos especificar el contenido de la información de la fila y la columna de cada matriz, de esta manera en el primer planteamiento $E\times G$, tendremos:

Necesidad de materia prima x producto semana x producto

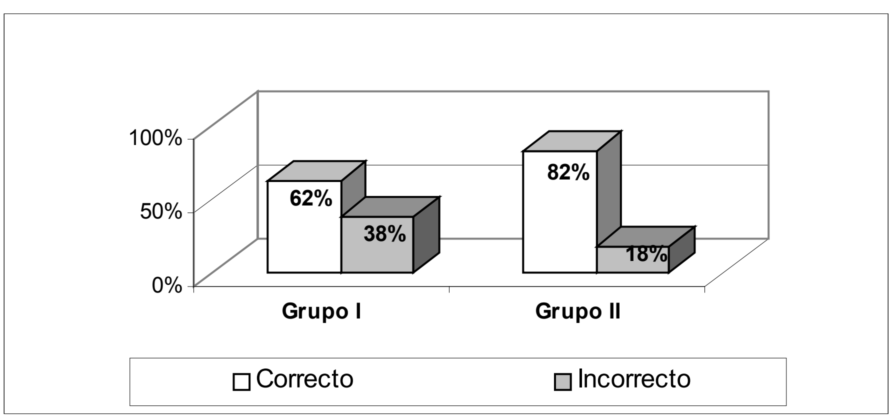
Al revisar que en la información contenida en la columna de la primera matriz, no coincide su descripción con el contenido del dato que está en la fila de la segunda matriz reconoceremos que el resultado de la multiplicación no es consistente
En el segundo planteamiento $E \times G'$, encontramos:

Necesidad de materia prima x producto producto x semana

Observamos que la información contenida en la columnas de E y en las filas de G' es igual, en consecuencia el resultado será lógico y la matriz resultante contendrá en sus filas la información *necesidad de materia prima* y en sus columnas la información *semana*.
Observaciones al docente: notemos que a propósito hemos suministrado los datos del problema textualmente y en algunos casos desordenados, obligándolos a organizar sus datos en una tabla de doble entrada.

Aplicación de la actividad:
Se seleccionaron al azar 5 estudiantes de cada sección, para un total de 50 alumnos en cada grupo El primer grupo estuvo constituido por alumnos de matemática III del primer semestre lectivo del año 2002 y el segundo por los estudiantes del segundo semestre electivo.

Resultados de la experiencia.
El grupo de estudiantes invitados a escuchar las explicaciones que aquí hemos expuesto se mostraron interesados en participar en la experiencia, de allí que quizás el empeño en escuchar las clases estuvo estimulado por considerarse un grupo especial.
Nuestro interés en los resultados tenía dos propósitos. Por una parte, evaluar si el ejercicio resuelto indicaba los resultados correctos y por otra parte, revisar si la conclusión fue ejecutada correctamente porque efectivamente comprendió el análisis que tenía que hacer a las unidades que estaba multiplicando y no por casualidad. Los resultados son:



Lo llamativo es que, aparentemente, obtendríamos mejores resultados si utilizamos la estrategia que hemos empleado con el grupo II, sin embargo al interrogarlos sobre la interpretación del proceso, del 62% de estudiantes que resolvieron correctamente el ejercicio en el grupo I un 80% sabía con claridad porque había planteado las operaciones en la secuencia que lo hizo, vs. un 50% del grupo II, que lo hizo gracias al mecanismo aprendido y repetido.

Conclusión

Con este sencillo experimento lo que hemos querido demostrar, sin menospreciar el método que utilicemos para enseñar, es que no siempre la simplificación extrema nos lleva a cumplir completamente con nuestros objetivos lectivos. En muchas oportunidades es preferible dejar que el estudiante se detenga antes de emprender un proceso, de manera que analice, piense cuidadosa y analíticamente y responda con propiedad. La revisión permanente de nuestros métodos de enseñaza debe ser una rutina más en nuestro trabajo, la crítica constructiva nos ayudará a descubrir que procesos aparentemente exitosos, esconden debilidades que podemos, sencilla y afortunadamente, corregir.

En cuanto a los materiales de apoyo dirigidos a estas carreras, lamentablemente caen también en un facilismo que no nos ayuda en este proceso de evitar las “recetas”. Revisamos 15 textos citados con mayor insistencia en las bibliografías de las carreras de Economía y Administración de nuestras principales universidades y un 80% de estos libros incluye en sus ejemplos, ejercicios sencillos donde, sin explicar por qué, se resuelven sin mayor análisis, de manera que en los problemas propuestos se repita el mismo esquema.

Bibliografía

Arends, R. (1994*) Learnig to teach.* Nueva York. Editorial Mc Graw Hill

Barriga, F. (1997). *Estrategias Docentes para un aprendizaje significativo*. México. Editorial Mc Graw Hill

Cooper, J. (2000) *Estrategias de enseñanza*. México. Editorial Limusa

Sarabia, B. (1992). *El aprendizaje y la evaluación de las actitudes*. Madrid. Editorial Santillana

Woolfolk, A. (1990). *Psicología educativa*. México Editorial Prentice

Wittrock, M. (1989) La investigación en la enseñanza España. Editorial Piados

CAMINO AL COMPROMISO SOCIAL: SOFTWARE ESTADÍSTICO

Hilda Motok, Gabriela Haro, Juan Sosa, Ariel Ponce, Gustavo Domé, Pablo Remonda.
Instituto Herman Hollerith. San Miguel de Tucumán, Argentina.
hmotok@Argentina.com - in_fo_nor@hotmail.com

Resumen

En nuestros días, la Estadística ha generado gran interés por ser una eficaz herramienta para la recolección, tratamiento y representación de grandes cantidades de información que nos permite inferir los resultados de la aplicación de modificaciones o reemplazo de cursos de acción específicos.

Normalmente, en el aula, los datos empleados para el estudio de la estadística descriptiva son valores extraídos de fuentes secundarias y pocas veces relacionados con las necesidades del alumno; lo que impide el desarrollo del trabajo creativo y no contribuye a lograr un grado de generalización en el marco del proceso de enseñanza-aprendizaje.

Como respuesta surge este proyecto de investigación efectuado por alumnos de tercer año del nivel terciario de la carrera de Analista de Sistemas, realizado en un Hospital Público de la ciudad, con el objeto de registrar las demandas insatisfechas en los consultorios externos (pacientes no atendidos). El trabajo consistió de las siguientes etapas:

A). Realización de una encuesta, que además de cumplir todas las condiciones normalmente establecidas para cualquier encuesta, se debió poner especial énfasis en la forma de recolección de datos para facilitar la carga y almacenamiento de los mismos.

B). Diseño y desarrollo de un software que permita la carga, almacenamiento y procesamiento de los datos.

C). Estudio y análisis de las distintas tablas y gráficos obtenidos.

Después de trabajar un mes en la obtención de datos reales mediante un cuestionario cuya información se cargaba mediante un lector de códigos de barras, generando una actualizada base de datos, se pudieron comparar tablas y gráficos comprendiendo así, el verdadero significado de éstos. Este trabajo ayudó tanto a la creatividad y a la interdisciplinaridad aplicada en la Estadística como a la responsabilidad social por el compromiso asumido por los alumnos con dicho Hospital.

Introducción

Considerando que la matemática en la carrera de Analista de Sistemas Terciario es una herramienta de trabajo importante, tanto para el aprendizaje de materias especificas como para el desempeño profesional, las tareas que se proponen dentro de esta área siempre están orientadas a trabajar sobre problemas concretos. Dentro de la materia Estadística los Alumnos de Tercer año proponen la implementación de una metodología de captación de Información (Software), en un Hospital Público de la ciudad Capital de la Provincia de Tucumán, Argentina, para registrar las Demandas Insatisfechas en los Consultorios Externos del mencionado, información no considerada para el análisis de Producción General de la Institución.

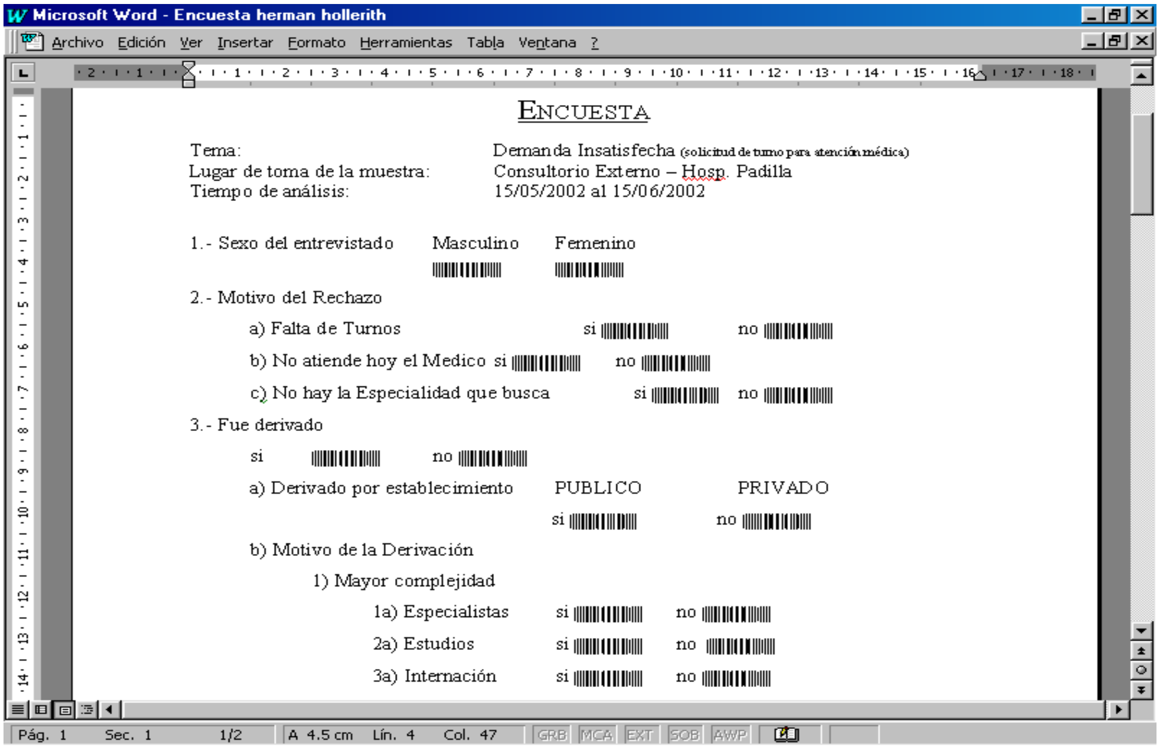
Los objetivos del trabajo fueron:

- Desarrollar el trabajo creativo.
- Aplicar los conceptos aprendidos en Estadística a problemas reales.
- Integrar las materias específicas de la carrera con las complementarias.

Desarrollo

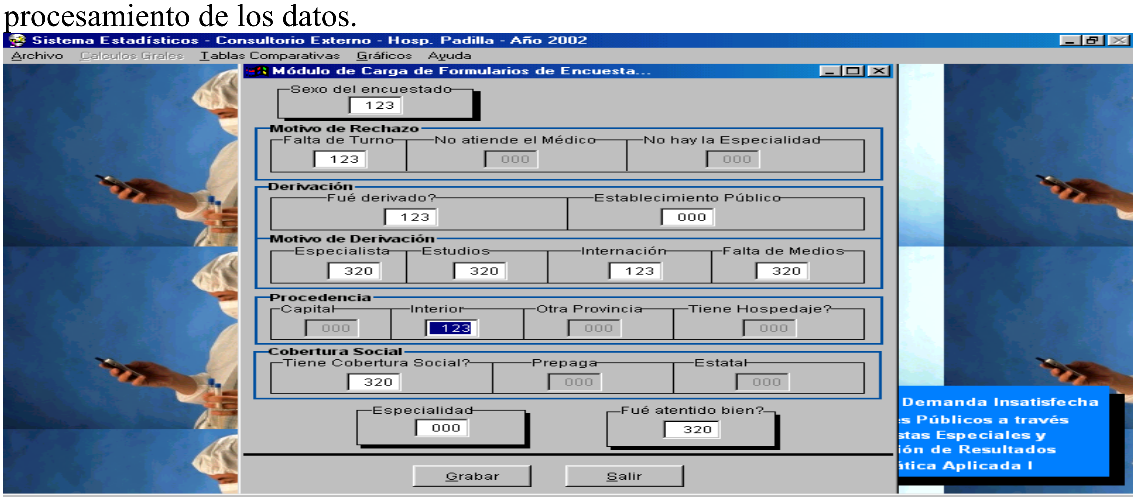
Las etapas del trabajo fueron: A)la realización de una encuesta que además de cumplir todas las condiciones normalmente establecidas para ellas, se debió poner especial énfasis en la forma de recolección de datos para facilitar la carga y almacenamiento.

Formato de la Encuestas realizada :



Lo que permitía introducir las respuestas al sistema informático, utilizando un lector de código de barras, y así de esta manera la carga es muy ágil.

B). Diseño y desarrollo de un software que permita la carga, almacenamiento y procesamiento de los datos.



Considere los valores 123 como afirmativos y el 320 como negativos.

C). Estudio y análisis de las distintas tablas y gráficos obtenidos.

Sobre 3218 pacientes que concurrieron al Establecimiento entre el 15/05/2002 al 15/06/2002, fueron encuestados con demanda rechazada 644 el 20% del total

Las siguientes imágenes (fig.1, fig.2) nos muestran la Procedencia de los Pacientes con D.R., notando que no solo la población en estado de atención clínica pertenecen a la provincia sino de otras provincias limítrofes.

Procedencia	Sexo	
	Masculino	Femenino
Capital	288	232
Interior	52	52
Otras Provincias	12	8
Total General	352	292

Figura 1

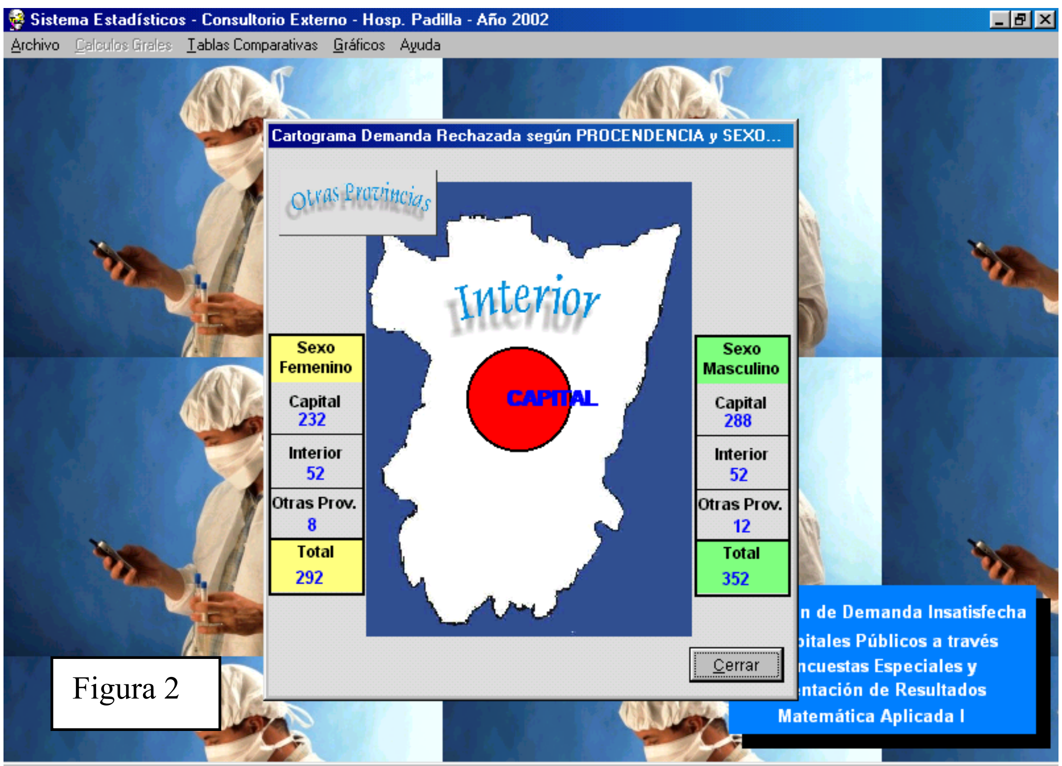
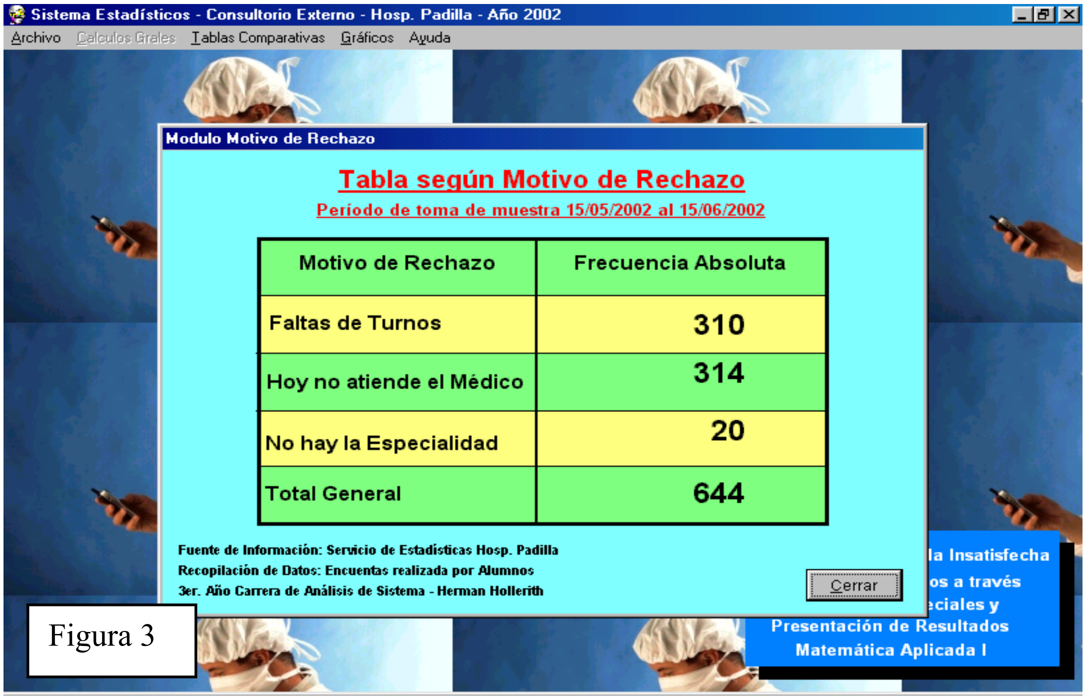


Figura 2

Notamos que los motivos de rechazos por motivo de falta de turnos y por no atender el medico ese día son muy importantes en cantidad, el primero nos muestra la falta de mayor cantidad de médicos para atención diaria de pacientes y la segunda la poca información emitida desde las instituciones publicas a la comunidad, generando mayores inconvenientes a la misma ya que el nivel económico de la población concurrente es bajo.(Fig.3,Fig.4)



Motivo de Rechazo	Frecuencia Absoluta
Faltas de Turnos	310
Hoy no atiende el Médico	314
No hay la Especialidad	20
Total General	644

Figura 3

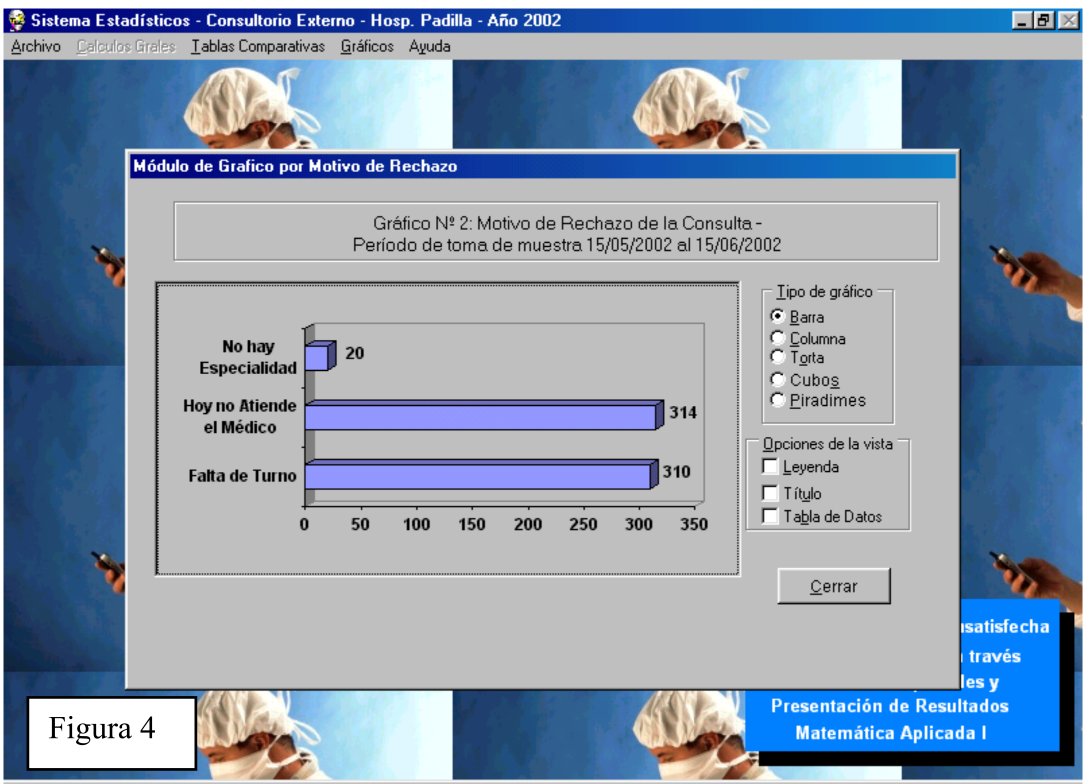


Figura 4

En las Fig.5, y Fig.6 nos muestra la necesidad de reestructurar los servicios, ampliando el número de pacientes a ser atendidos y por lo tanto de médicos de la especialidad para consultorio externo.

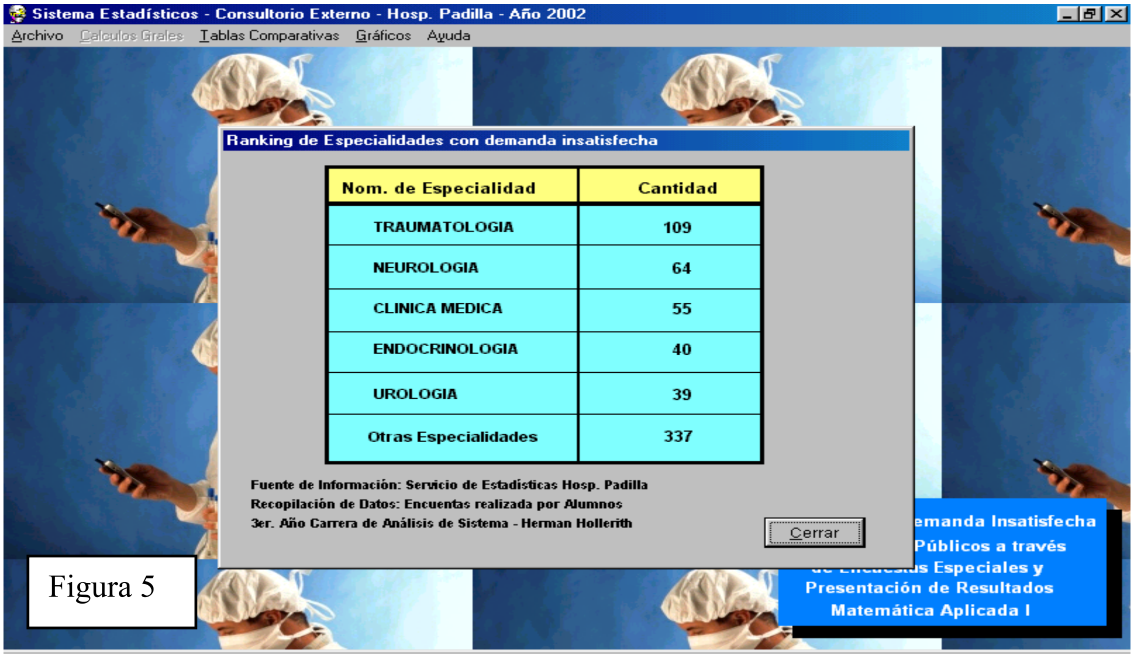


Figura 5

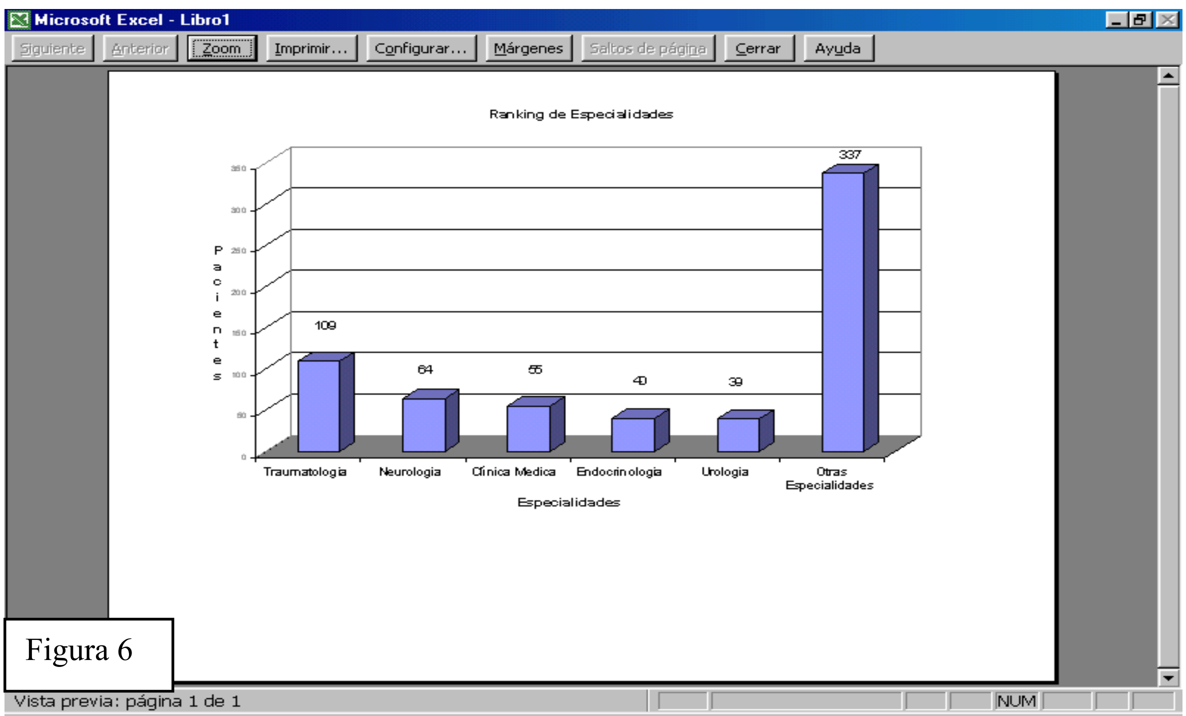


Figura 6

Conclusión

Este proyecto nació con solamente la idea de poner en practica la metodología estadísticas aplicando las herramientas informáticas, pero la realidad social que se encontró determinó que se redirija los objetivos primeros, ya que al comenzar a obtener la información mediante las encuestas genero en el grupo de trabajo la necesidad de presentar una visión realista de la situación, que hasta ese momento el establecimiento no había analizado.

Entregando por ello la presentación de los resultados obtenidos durante el periodos de trabajo a las Autoridades correspondientes, para la aplicación de las medidas correctivas necesarias para la mejora del problema

Bibliografía

Mª J. Asencio, J. A. Romero, E de Vicente. (1999) *Estadística*. España, Editorial Mc Graw Hill.
Murray, R. Spiegel,(1997). *Estadística para la administración y economía*, Grupo Editorial Iberoamerica.
Microsoft Prees.(1998). *Visual Fox Pro 6.0, manual del Programador*, Editorial Mc Graw Hill.

UN PROBLEMA MOTIVADOR PARA UN TRABAJO INTERDISCIPLINARIO EN MATEMÁTICA Y FÍSICA

Lina Oviedo, Ana Kanashiro, Gloria Alzugaray, Adriana Frausin
UNL, UTN, Argentina
loviedo@fiqus.unl.edu.ar; akanashi@fiqus.unl.edu.ar

Resumen

El trabajo interdisciplinario, cuando es posible, juega un papel importante en la enseñanza y aprendizaje de las ciencias en los tres niveles de la educación argentina. En la actualidad se ha revalorizado la planificación de las tareas de investigación y resolución de problemas (Gil,D.,et al., 1991), de modo que cuando se planifica una unidad didáctica se deben integrar los conocimientos científicos, didácticos y la experiencia práctica, y se deben tomar en cuenta la estructura cognitiva y las concepciones de los alumnos a quienes va dirigida.

Esta propuesta es un trabajo interdisciplinario entre la Matemática y la Física, que surge teniendo en cuenta dichas tendencias. Además no debe olvidarse que en un principio la Física se mostraba indistinguible de la Matemática y que los mayores avances matemáticos surgieron a partir de problemas relacionados con la Física.

La propuesta se enmarca en un proyecto de investigación que tiene como objetivos:

- Adoptar estrategias que permiten evaluar las actividades que los alumnos hacen en clase de Física, cuando resuelven problemas utilizando la herramienta matemática.
- Ver que uso hacen de la Matemática y de la Física los estudiantes de Ingeniería, cuando resuelven problemas de la Mecánica, contando con el apoyo de la herramienta informática.

El objetivo particular de este trabajo es:

- Obtener la expresión de la ecuación diferencial lineal de segundo orden no homogénea a partir de un problema físico sencillo que involucra el movimiento oscilatorio.

Fundamentos de la propuesta

Dentro de la perspectiva actual y puesto que la ciencia en sí puede entenderse como búsqueda de soluciones a los problemas que se nos plantean, se considera que la Resolución de Problemas constituye y desempeña un papel fundamental en la enseñanza y aprendizaje de las ciencias, dirigido a producir aprendizaje significativo (Ausubel, et al., 1991) y promover un cambio en la manera de trabajo, considerando a la resolución de problemas como una actividad de apoyo y consolidación para el aprendizaje de los contenidos conceptuales. Actualmente, aunque se reconoce el papel fundamental de la elaboración puramente teórica de la matemática, el principal esfuerzo se desplaza hacia la aplicación de los métodos matemáticos para la solución de los problemas de las ciencias naturales y la tecnología. La propuesta es trabajar simultáneamente en Matemática y Física un mismo problema; esto es, a partir de una situación problemática física concreta se modela la situación matemática para estudiar el tema: Ecuaciones Diferenciales Lineales (E. D. L.) de segundo orden no homogénea y, a medida que vayan apareciendo nuevas nociones en Física ampliar el modelo matemático. Por otro lado sabemos que los alumnos no tienen los mismos objetivos que los docentes, ello s sienten que los temas desarrollados en el contexto académico no le resuelven los problemas en las asignaturas específicas de su carrera, por lo tanto, el compromiso del profesor es encontrar una afinidad entre lo que interesa al estudiante y el tema objeto de estudio para lograr un aprendizaje significativo.

Introducción

En el presente trabajo se plantea un modelo físico concreto, que el alumno trabajará en el laboratorio de física y posteriormente con los resultados del mismo debe desarrollar el correspondiente modelo matemático en la clase de matemática.

El modelado constituye una cuestión fundamental en la física, el mismo entendido como el establecimiento de relaciones semánticas entre la teoría, los objetos y los fenómenos, es una herramienta básica en la explicación científica y es una cuestión fundamental en la resolución de problemas.

La matemática tiene un alto valor formativo porque desarrolla las capacidades de razonamiento lógico, simbolización, abstracción, rigor y precisión que caracterizan al pensamiento formal, además de permitir la codificación de la información.

Todo aprendizaje se transforma en significativo cuando no es arbitrario ni confuso sino que es pertinente y relacionado y cuando se logra que el alumno esté motivado para aprender, de manera que lo que aprende se transforma en funcional, es decir "le sirva para".

La construcción de un concepto matemático no sólo debe permitirle arribar a una definición del mismo, sino también reconocer los tipos de problemas que dicho concepto le permite resolver, es decir buscar las limitaciones y alcance del mismo como modelo. En la práctica diaria esto, generalmente, no ocurre así, nuestros alumnos creen que resolver un problema es hacer las cuentas desconociendo que es gracias a la existencia de un modelo matemático adecuado que se puede resolver el problema mediante la cuenta.

El docente debe ayudar al estudiante a descubrir que la matemática dispone de los recursos necesarios para enfrentar un fenómeno o situación proveniente de cualquier campo del conocimiento, es decir permite construir un modelo matemático y para llevarlo a cabo debe realizarse una simplificación de la realidad y si bien la descripción del fenómeno es aproximada gracias a la utilización del aparato matemático, se puede describir y predecir un conjunto de hechos e incluso resultados de experiencias no realizada.

La enseñanza de la matemática debe proporcionar instrumentos para enfrentar fuera del aula a situaciones de resolución de problemas que pocas veces se presentarán en forma matemática, aunque para su resolución pueda ser conveniente poner en juego estrategias similares a las que se ponen en juego en las clases de matemática.

La matemática debe ser un conjunto de instrumentos que proporcionan un modo de enfrentarse a las situaciones desconocidas, un medio para comunicar y comunicarse con los demás y también, como no, una vía para disfrutar, ya sea con el proceso de resolución o con la obtención de soluciones, con la optimización de los procedimientos, con la visión o el manejo de formas geométricas o de cualquier otro modo. Efectivizar cualquiera de estas finalidades exige que los estudiantes adopten una disposición relativamente favorable, razón por la cual es tarea del docente hacerle comprender al alumno que la matemática no es algo abstracto que solo sirve para la escuela, sino que en el mundo en que vivimos siempre o casi siempre necesitamos de la misma.

Al describir un fenómeno en términos de un modelo matemático se pueden inferir conclusiones lógicas sobre el modelo que predice el comportamiento futuro del fenómeno y de ahí conjeturar los cambios que se pueden producir o las regularidades que se van a mantener.

Metodología

La aplicación de una metodología que contribuya a que el pensamiento lateral se convierta en un hábito provocará que, tanto en la resolución de problemas ya sea de lápiz y papel como en el trabajo de experimentación en clase, confluyan varios elementos que son significativos para el aprendizaje de los conceptos involucrados en el tema oscilaciones. Por ejemplo la generación de procesos y procedimientos que determinen las cantidades, en la medición de las variables involucradas, así como el establecimiento de diferenciaciones y de las hipótesis necesarias para determinar las variables y la manera en la que intervienen en los fenómenos presentados al alumno, es insustituible la interacción con la experiencia, quien en distinto grado, aporta a una construcción cognoscitiva como el establecimiento de relaciones funcionales y causales, procesos de clasificación, de significación simbólica, de comparación con concepciones previas, etc.

Desarrollo de la Propuesta

Instancia I

Los objetivos de esta etapa son:

* Estudiar el comportamiento de los resortes sometidos a la acción de distintos cuerpos.
* Encontrar la relación existente entre la fuerza actuante y la elongación del mismo.

Desarrollo: se disponen de distintos resortes y distintas masas conocidas. La actividad consiste en colgar las masas de los distintos resortes y medir los estiramientos con las regla graduadas de los mismos, pudiéndose adicionar más de una masa por resorte.

Se les pedirá que con los datos obtenidos realicen:

a- las gráficas de fuerza vs elongación

b- la construcción de un dinamómetro

- Cuestiones a desarrollar por el docente:
    1. Destacar la importancia, para la Mecánica, de las interacciones elásticas fundamentales.
    2. Describir el movimiento oscilatorio armónico y su aplicación en el fenómeno de resonancia.
    3. A través de preguntas poner en evidencia lo que el alumno “conoce” y lo que “desconoce” parcial o totalmente e introducir el concepto físico de vibraciones mecánicas.
- Cuestiones a desarrollar por el alumno:
    1. Los alumnos deberán obtener conclusiones acerca del comportamiento de un resorte sometido a la acción de distintos pesos, acorde a lo obtenido experimentalmente.

Instancia II

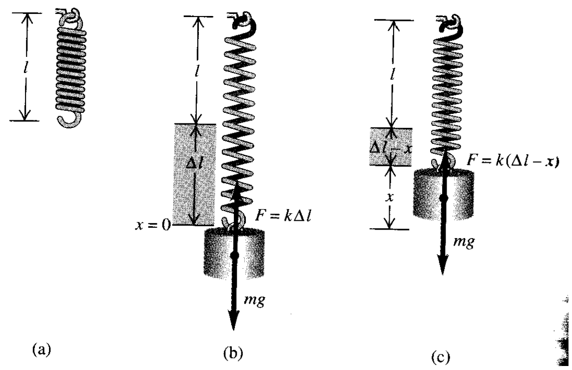
Los objetivos de esta etapa son:

* Comprender el fenómeno del movimiento oscilatorio armónico.
* Aprender a controlar variables.
* Realizar razonamientos de conservación.
* Determinar qué magnitudes físicas están involucradas en el problema.
* Encontrar la ley del movimiento.

Modelo físico

La física, por la propia estructura del cuerpo de conocimientos que abarca, así como por la lógica de tratamiento de esos conocimientos, requiere para su comprensión y aprendizaje, trabajar con modelos y aplicar razonamiento hipotético deductivo.

El sistema físico adoptado será un resorte de longitud l, con una masa m ubicada en el extremo inferior se producirá un estiramiento $\Delta \mathbf{l}$ (fig b). Debido a este efecto la fuerza vertical k $\Delta \mathbf{l}$ iguala a la fuerza peso m**g**



Sea x = 0 la posición de equilibrio, con la dirección + x hacia arriba. Cuando el cuerpo está una distancia x por encima de su posición de equilibrio (fig. c) la extensión del resorte es $\Delta \mathbf{l} - \mathbf{x}$.

En el sistema masa-resorte pueden actuar fuerzas tales como:

a) la de gravedad **W**
b) la fuerza del resorte **F** que actúa de manera tal de restaurar la posición del resorte y que supondremos obedece a la ley de Hooke
c) el efecto de las fuerzas del fluido en el que está sumergido llamadas de amortiguación, $\mathbf{F_a}$
d) fuerzas periódicas en t, **F**(t) causadas por ejemplo, por el soporte que sujeta al resorte.

Las consignas a trabajar por los estudiantes se pueden sintetizar en:

- Comparar los resultados con los obtenidos analíticamente, analizando posibles discrepancias con el modelo teórico.
- Para cada, oscilador encontrar una ley del movimiento.

Modelo matemático

Los conocimientos previos que los estudiantes deben tener para plantear el modelo son Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de segundo orden homogéneas, y Segunda Ley de Newton.

De acuerdo a la 2da. Ley de Newton fig. (c) se cumple para el sistema masa-resorte:

$m\mathbf{x}'' = \mathbf{W} + \mathbf{F} + \mathbf{F_a} + \mathbf{F}(t)$ (1)

Donde

$\mathbf{x}''$ es la aceleración.

$\mathbf{W} = - m.\mathbf{g}$, $\mathbf{g}$ constante gravitatoria

$\mathbf{F} = k(\Delta\mathbf{l} - \mathbf{x})$ k positivo

$\mathbf{F_a} = -\gamma(\mathbf{x}'(t))$ γ constante de amortiguación

Sustituyedo en (1)

$$m\mathbf{x}'' = - m\mathbf{g} + k(\Delta\mathbf{l} - \mathbf{x}(t)) - \gamma\,\mathbf{x}'(t) + \mathbf{F}(t)$$

$$m\mathbf{x}'' = -m\mathbf{g} + k(\Delta\mathbf{l}) - k\,\mathbf{x}(t) - \gamma\,\mathbf{x}'(t) + \mathbf{F}(t) \quad (2)$$

Por otro lado en la posición de equilibrio fig.(b)

$$\mathbf{W} = m.\mathbf{g} = k\,\Delta\,\mathbf{l} \quad (3)$$

Sustituyendo (3) en (2) se obtiene

$$m\,.\,\mathbf{x}'' + \gamma\,\mathbf{x}' + k\mathbf{x} = \mathbf{F}(t)$$

que es una ecuación lineal de 2do. orden no homogénea.

Instancia III

En esta instancia se enfrenta al alumno con situaciones que deberá resolver: Se le proponen distintas situaciones debiendo encontrar la ecuación correspondiente.

Actividades para el alumno

1. Si $\gamma=0$ y $\mathbf{F}(t)=\mathbf{0}$ el movimiento se llama oscilatorio sin amortiguación y al valor $w_o^2 = k/m$ se lo llama frecuencia angular natural**.** Se pide encontrar $\mathbf{x}(t)$.
2. Si $\mathbf{F}(t)=\mathbf{0}$ el movimiento se llama oscilatorio amortiguado siendo $w' = (k/m- \gamma^2/4m^2)^{1/2}$ la frecuencia angular de la oscilación. Analizar los distintos casos que surgen a partir de los valores de la ecuación característica mediante gráficas $\mathbf{x}(t)$ vs. t, utilizando un software matemático y obtener conclusiones.
3. Si, por ejemplo, $\mathbf{F}(t) = \mathbf{F_0}\,\text{sen}(w\,t)$ el movimiento se llama oscilatorio forzado, $\mathbf{F}(t)$ recibe el nombre de fuerza impulsora. Nos proponemos analizar el comportamiento del sistema frente a esta nueva perturbación.

La actividad planteada es un problema motivador para introducir el tema E. D. L. de segundo orden, no homogénea. Los ítems 1 y 2 pueden ser resueltos sin dificultad, en cambio para resolver el ítem 3 se necesitan de nuevos conocimientos, los que deben ser desarrollados en la clase de Matemática.

Se puede seguir ampliando el modelo, a partir de lo trabajado hasta el momento introduciendo las nociones de resonancia y caos para el caso de osciladores no armónicos, como por ejemplo un péndulo magnético bajo la acción de tres imanes.

Conclusiones

Las actividades propuestas permitirán a los estudiantes observar e investigar fenómenos reales con el objetivo de posibilitar aprendizajes significativos (Ausubel, op. cit), por eso es importante una planificación adecuada de las mismas acorde al contenido de las ciencias que se pretende enseñar y una buena selección de técnicas de procedimientos que los alumnos sean capaces de utilizar.

Tanto el planteamiento del problema como la solución aportada por los estudiantes estarán vinculadas con las intenciones didácticas de este trabajo, que corroboran la urgente necesidad de brindar una enseñanza de las ciencias enfocada con profundidad y seriedad y que se pueden sintetizarse en:

- las ciencias pueden ayudar a los estudiantes a pensar de manera lógica sobre los hechos cotidianos y a resolver problemas prácticos sencillos.
- las ciencias y sus aplicaciones a la tecnología, son actividades socialmente útiles que esperamos se hagan familiares a los estudiantes y pueden mejorar la calidad de vida de las personas.

Las variables más importantes que se espera evidencien los estudiantes y que influyan en los resultados de la resolución de las situaciones problemáticas presentadas serán:

a- la disponibilidad de conceptos y principios en la estructura cognoscitiva, pertinentes para los problemas particulares que se van presentando, y que se desarrollen interactivamente con los estudiantes.

b- las características cognitivas y de personalidad como la agudeza, la capacidad de integración, el estilo cognitivo, la sensibilidad al problema, etc., que serán trabajados por los docentes.

La modelización de ciertas situaciones problemáticas son importantes para ver como los alumnos hacen uso de la herramienta matemática ante problemas físicos concretos.
No debe esperarse que el estudiante elabore conceptos y relaciones entre ellos por la sola realización de una actividad experimental o de lápiz y papel. El docente debe favorecer el cuestionamiento, facilitar la discusión y el trabajo en grupos, llegando a una construcción compartida del conocimiento.
Además de estos aspectos constructivos del aprendizaje de los conceptos científicos se encuentran implícitos los aspectos normativos que están principalmente en función de la coherencia en las descripciones y explicaciones. Para la actividad cognoscitiva no son suficientes los hábitos ni la experiencia adquirida en la resolución de problemas. Se requiere la habilidad de observar sistemáticamente, clasificar los objetos y sus propiedades, formular y contraponer los conocimientos, construir las conclusiones y comprobarlas, utilizar los conocimientos de unos objetos para el estudio de otros, etc.

Bibliografía

Ausubel, D., Novak, J y Hanesian, H. (1991) *Psicología Educacional, un punto de vista cognitivo*. 5ta. Reimpresión, Trillas. México.

Bosch, M., Gascón, J. (1994) *La integración del momento de la técnica en el proceso de estudio de campos de problemas de matemáticas.* Enseñanza de las Ciencias- Volumen 12 (3), 314-332. Barcelona. España.

Boyce- Di Prima- Ecuaciones Diferenciales y problemas con valores en la frontera. Limusa S.A.-México.

Chevallard, Y., Bosch, M, Gascón, J**.** (1997) *Estudiar Matemáticas- El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje.* Ice Horsori- Universitat de Barcelona- España.

Gil, D., Carrascosa, J., Furió, C y Martinez-Torregrosa, J**.** (1991*) La enseñanza de las ciencias en la educación secundaria*. Barcelona:ICE, Universidad de Barcelona.

Giussani, L. (1986).*Educar es un riesgo*. Ediciones Encuentro. Madrid. España.

Harlen, W. (1985) *Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias*. Morata S.A. Madrid.

Pozo, J.I (1998) *Aprender y Enseñar Ciencia* Ediciones Morata. Madrid España.

Sears- Zemansky**-** 1996- Física Universitaria- Pearson Educación- México.

Simmons- 1991- Ecuaciones Diferenciales. Con aplicaciones y notas históricas- Mc Graw- Hill, Inc.- España.

UNA PROPUESTA DE AUTORREGULACIÓN PARA LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DEL CÁLCULO DIFERENCIAL

Elsa Rodríguez y Margarita Veliz
Universidad Nacional de Tucumán. Argentina.
eareal@herrera.unt.edu.ar ; mveliz@herrera.unt.edu.ar

Resumen
Ante las limitaciones de los métodos y procedimientos de la enseñanza tradicional, sustentados en la actividad del docente y la pasividad del alumno, han surgido en la última década, variadas respuestas que pretenden mejorar la práctica de la enseñanza y del aprendizaje, entre ellas, las computadoras y los tutores inteligentes. Según Rivera Porto, E. (1997), el diseño y modificación de módulos educativos computadorizados, debe ser parte de la formación de maestros y educadores, y una de sus actividades cotidianas. Desde el año 2001, trabajamos con los alumnos de primer año implementando guías de autorregulación en el aprendizaje del Cálculo Diferencial. En este trabajo, proponemos una metodología alternativa para el proceso de enseñanza - aprendizaje, mediante la complementación de dichas guías con una primera aproximación al empleo de un tutor inteligente, en la Facultad de Ciencias Económicas de la U.N.T.

Introducción

En la modalidad presencial vigente en nuestras aulas, las condiciones de masividad en las cuales se desarrollan las prácticas docentes, obligan al profesor a focalizar la enseñanza como una mera transmisión de los contenidos disciplinares. La técnica más utilizada es la exposición, erigiéndose así el docente en la fuente principal de conocimientos. El alumno asume un rol pasivo, asistiendo a clase en los horarios establecidos y tomando notas de los contenidos desarrollados por el profesor. Esta concepción de la enseñanza como transmisión, se manifiesta en tratamientos separados de la teoría y su aplicación práctica, no sólo en tiempo y espacio sino también en desarrollos realizados por distintos docentes. Esta metodología fragmentaria, que en principio se justifica por la exagerada desproporción entre el número de docentes y alumnos, y la reglamentación vigente sobre las funciones de los distintos estamentos docentes, requiere una revisión por cuanto la integración teoría - práctica guarda una estrecha relación con la capacidad del egresado para establecer relaciones significativas en una realidad compleja y diversa.

La computación educativa, es una disciplina en pleno crecimiento, no sólo por el interés y múltiples aplicaciones que ha suscitado en las escuelas, universidades y centros de entrenamiento empresarial, sino porque ha permitido emprender el camino difícil pero fructífero de incorporar el tratamiento de la información al proceso educativo. Esta incorporación de la computación al quehacer educativo, ya no es sólo una añadidura más, sino que desborda su ámbito de instrumento o herramienta de enseñanza para llegar a la esencia misma de la educación: el aprendizaje y el crecimiento intelectual de las personas. "Al ser la actividad educativa intensiva en procesamiento de información como base del conocimiento, la Informática y las tecnologías de la información ofrecen grandes aportaciones para el dominio de la educación y la formación profesional; las aplicaciones son múltiples y abarcan los aspectos curriculares, pedagógicos, administrativos y los relacionados con la formación y la capacitación" (Téllez Reyes Retana, E. et al, 1998: 67-78).

> Por otro lado, no debemos olvidar que durante miles de años, la información acumulada por la humanidad creció a un ritmo lento, casi imperceptible, pero en los últimos siglos, el volumen de conocimientos se incrementa progresivamente con una curva de despegue desde la revolución industrial. El incremento del nivel de conocimiento es tan rápido que cada vez es más difícil escribir un libro y publicarlo sin que haya perdido actualidad. Algunas estimaciones actuales calculan que en un campo como la ingeniería informática, a partir del año 2000, la cantidad de información disponible se duplica cada año. Las consecuencias que esto acarrea a la Universidad son, por un lado, la necesidad de una permanente actualización y, por otro lado, la necesidad de diseñar y utilizar nuevos modos de organizar y acceder a la información. Ante las limitaciones de los métodos y procedimientos de la enseñanza tradicional, sustentados en la actividad del docente y la pasividad del alumno, han surgido variadas respuestas que pretenden revolucionar la práctica de la enseñanza y del aprendizaje. Entre esas respuestas encontramos las computadoras y los tutores inteligentes, lo que inspiró nuestra propuesta.

En Latinoamérica son muchos los centros que se encuentran trabajando en esta línea de investigación en educación. Un indicador de esto son las innumerables ofertas de carreras que relacionan la Matemática y la Informática Educativa, que proponen actualmente las distintas Universidades y Centros de Estudios de distintos lugares en el mundo, muchos de ellos en Latinoamérica. En los tiempos de la globalización con la exigencia de eficiencia y eficacia, la computadora se convierte en el instrumento que permitirá al docente desarrollar el proceso de enseñanza con una mayor calidad.

Como un recurso más, producto de la ciencia de la Inteligencia Artificial, aparecen, como ya dijimos, los tutores o entrenadores que se adaptan maravillosamente al campo de la Matemática. Posibilitan además "ganar tiempo", pues permiten que muchos contenidos puedan ser estudiados de forma individual por el alumno, guiado por la computadora. Estos tutores están capacitados para instruir eficazmente sin participación directa del profesor, de forma tal que el alumno aprende a su propio ritmo, convirtiéndolo en participante activo ya que su empleo exige de éste respuestas frecuentes. Además, el tutor proporciona la confirmación o corrección inmediata de la respuesta lo que permite al alumno conocer el valor de ésta. Y desde el punto de vista afectivo, el uso de la computadora permite que la autoestima del alumno no sufra daño, pues éste está en total libertad de equivocarse e incorporar el error como un componente natural de su aprendizaje.

Si pensamos ahora en la Universidad Nacional de Tucumán y más específicamente en la Facultad de Ciencias Económicas, diremos que la formación matemática de los alumnos requiere un urgente enfoque renovador y progresista del proceso de enseñanza y aprendizaje. Así entonces analizando nuestra realidad, sería lógico pensar que si consiguiéramos en nuestra facultad poner al alumno frente a una computadora y a un tutor, los docentes podríamos reducir considerablemente las semanas que actualmente dedicamos a los tradicionales trabajos prácticos, con sus interminables listas de ejercicios, muchos de los cuales deben ser resueltos como "modelo" en clase, y de acuerdo con lo demostrado por Kimball, obtendríamos resultados más satisfactorios a la hora de evaluar el proceso de aprendizaje de los estudiantes. No podemos negar la importancia radical que tiene en nuestros días el ejercer una práctica docente que no permanezca alejada de las nuevas estrategias metodológicas, surgidas de la tecnología, y que posibilitan que el aprendizaje de los alumnos sea más significativo, dinámico y fundamentalmente más actual. El uso de la computadora, como herramienta pedagógica fundamental capaz de captar el interés del estudiante, se ha convertido en el recurso imprescindible del profesor del tercer milenio. Por ello, con una mentalidad abierta a los cambios y en la búsqueda de un crecimiento profesional y personal, creemos que los docentes debemos incorporar de manera progresiva en los procesos de enseñanza y aprendizaje, las nuevas herramientas que nos brinda la Informática Educativa.

La conveniencia de introducir las TIC'S (Tecnologías de Información y Comunicación) en la enseñanza y el aprendizaje, tiene muchas finalidades. Por un lado, está el problema económico del costo de la educación. Con estas tecnologías supuestamente se pretende abatir los costos y en última instancia poner la educación accesible a todos. Igualmente se maneja el hecho de extender los ofrecimientos educativos a toda la población. Finalmente, se piensa que las TIC'S pueden mejorar sustancialmente la calidad de la educación, tradicionalmente medida a través de índices de aprovechamiento, retención, disminución de la reprobación etc. Ignorar las nuevas tecnologías, cuando nuestros alumnos las utilizan, sería un camino riesgoso y sin salida, con el peligro cierto de quedar al margen del mercado laboral. Es quizás, un planteamiento un poco duro, pero como docentes, como formadores, como responsables de instituciones educativas, no podemos dejar de ver que las nuevas tecnologías están instalándose muy rápidamente en la vida cotidiana de las personas y que familiarizarse con ellas, aprender a utilizarlas, es una forma de actualizar nuestra formación y enriquecer cualitativamente nuestra labor.
Una de las más grandes e importantes aportaciones de la computación a la educación, es la de lograr individualizar algo más la educación, lo que significa el ir en contra de la corriente general de la educación: la masificación.

La mayor parte de la información que hemos recibido a lo largo de toda nuestra vida académica estaba contenida en palabras, en muchos casos escritas. Nosotros asociamos información con libros guardados en bibliotecas. Pero esto está cambiando, el crecimiento del peso de la imagen sobre lo escrito nos lleva a la moderna sociedad audiovisual, dominada por los medios, fundamentalmente por la televisión. "La imagen entra con tal fuerza que la mayoría de la población la utiliza como fuente de información" (Bartolomé, A. R. 1999:56). Nos enfrentamos entonces a dos cambios sociales: el que nos conduce a la cultura del espectáculo, la diversión, el entretenimiento; y el que nos lleva hacia la participación, el diálogo, la búsqueda cooperativa. Las TIC'S están evolucionando hacia sistemas más participativos: Internet, sistemas de aprendizaje por computadora, foros temáticos. Además dijimos que tenemos que acceder a la información de una manera "divertida", porque es a través de la diversión como los niños y los mayores de hoy acceden a ella. Si nos preguntamos porqué un alumno es incapaz de trabajar diez minutos seguidos en una clase y puede pasar horas delante de la computadora tendremos que darnos cuenta que allí está la diferencia entre lo aburrido y lo divertido. Los profesores tenemos que diseñar actividades en las que los alumnos se sientan involucrados y en cuya realización encuentren una satisfacción.

Desarrollo

A partir del año 2001, en la asignatura Cálculo Diferencial de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional de Tucumán, se implementó la utilización de guías de estudio y trabajo para facilitar el aprendizaje de los estudiantes, las que contaron con elementos de autorregulación y autoevaluación. Nuestro propósito es complementar las guías con la utilización de la computadora, como paso previo al uso de un tutor inteligente. Cada unidad de estudio en estas guías los orienta para que aprendan a aprender de manera consciente, independiente y autorregulada, proporcionándoles estrategias de aprendizaje (reconocimiento de ideas previas, mapas conceptuales, cuadros sinópticos, esquemas). En las actividades de aprendizaje aparecen las definiciones necesarias y básicas, como así también enunciados de propiedades y teoremas que son esenciales conocer y memorizar, a fin de que luego puedan aplicarlos. Además se ejemplifican situaciones y se propicia su análisis de modo que los alumnos cuenten con métodos de trabajo y una orientación para su trabajo independiente, a la vez que vayan autorregulando su aprendizaje. Se proponen ejercicios y problemas teniendo en cuenta los diferentes niveles de asimilación. Se da finalmente para cada tema, propuestas de autorregulación diferenciadas según los objetivos logrados.

En estas experiencias se trabajó con la totalidad de alumnos inscriptos en la asignatura; cabe destacar que los resultados correspondientes a ambos períodos lectivos (2001 y 2002) fueron muy similares. Se aplicó una encuesta, en la que se tuvieron en cuenta los diferentes factores o componentes de autorregulación. Para las mediciones se trabajó con la Escala Tipo Likert, adjudicándose a cada respuesta desde 5 (cinco) puntos a las totalmente favorables en cuanto a la autorregulación, hasta 1 (un) punto a las totalmente desfavorables, ya que los alumnos contaron con 5 (cinco) opciones para responder cada pregunta. La mayor frecuencia se registró en ambos casos, en el nivel medio de autorregulación. Entre los resultados obtenidos, se destacan los siguientes: los alumnos no persisten en el trabajo cuando se enfrentan con dificultades, no tienen el hábito de reflexionar sobre los métodos de solución empleados en sus tareas, ni sobre otras vías de solución, una vez que consideran alcanzada la misma. Es necesario incentivarlos a que lo realicen ya que es una ayuda a la reflexión metacognitiva y por tanto al aprendizaje autorregulado. Respecto al control necesario para autorregular el aprendizaje, más del 50% de los alumnos manifestó haber controlado la comprensión y los progresos y más del 60% el tiempo dedicado al estudio y el lugar físico para estudiar. En cuanto a un factor muy importante en el aprendizaje autorregulado, como es el de corregir sus propios errores y aplicar correctivos en el proceso de aprendizaje para obtener mayores logros, los resultados muestran que los alumnos en buen porcentaje buscaron ayuda para corregir errores pero en menor porcentaje aplicaron acciones correctivas en el aprendizaje.

Se sabe que el alumno rinde más y mejor cuando está motivado. Es de interés entonces, que nosotros, como docentes del área Matemática podamos potenciar fuertemente el desarrollo adecuado de metodologías en esta asignatura, a fin de que los alumnos experimenten el proceso de aprendizaje de esta disciplina como algo alcanzable por ellos, perdiendo el miedo y la distancia que culturalmente se ha creado ante esta materia. Es por eso que nuestra propuesta trata de complementar las guías elaboradas para la asignatura, con el empleo de este elemento motivador como es la computadora. Respecto a este tema, se aplicó una encuesta a 494 alumnos sobre un total de 1126 que cursaron Cálculo Diferencial en el año 2002. Los resultados manifiestan el alto interés de nuestros alumnos por este aprendizaje complementado guías - computadora.

	Si	No	NS/NC
¿Dispone de computadora?	46%	46%	8%
¿Posee su computadora un kit multimedia?	74% (de los que disponen de PC)	14% (de los que disponen de PC)	12% (de los que disponen de PC)
¿Emplea la computadora habitualmente?	63% (de los que disponen de PC)	34% (de los que disponen de PC)	3% (de los que disponen de PC)
¿Utiliza la computadora para trabajar?	74% (de los que disponen de PC)		
¿Utiliza la computadora para jugar?	47% (de los que disponen de PC)		
¿Utiliza la computadora para estudiar?	47% (de los que disponen de PC)		
¿Cree que se podría incorporar la computadora al aprendizaje de esta materia?	45% (del total)	18% (del total)	37% (del total)
Porque su empleo implica una forma de enseñanza más moderna	29% (del total)	3% (del total)	68% (del total)
Porque le permitiría realizar un aprendizaje más independiente	27% (del total)	4% (del total)	69% (del total)
¿Considera que la Enseñanza a Distancia es una alternativa válida para solucionar los inconvenientes que ocasionan las clases numerosas?	37% (del total)	36% (del total)	27% (del total)

En este trabajo, presentamos un sistema de enseñanza asistida por computadora para la asignatura Cálculo Diferencial, como una primera aproximación al posterior empleo de un tutor inteligente, en la Facultad de Ciencias Económicas de la UNT, que será aplicada en el 2º cuatrimestre del periodo lectivo 2003.

Conclusiones

- Las actividades propuestas en las guías de estudio, con sus estrategias para solucionar ejercicios y problemas, posibilitan la autorregulación del aprendizaje por el propio alumno, dando lugar también a que reflexione sobre sus métodos de estudio y su forma de construir el conocimiento, actividad metacognitiva de un alto valor psicopedagógico.
- El factor motivacional es de gran importancia a la hora de aplicar estrategias metacognitivas. Es por tanto de gran interés, poder incrementar el porcentaje de alumnos motivados para las tareas, y consideramos que una buena alternativa para lograrlo es el empleo de la computadora, según lo manifestado por los propios alumnos.
- Se demostró que con la nueva metodología implementada para las clases prácticas de Introducción al Análisis Matemático (Cálculo Diferencial), en las condiciones de la

Facultad de Ciencias Económicas de la U.N.T., se incrementó el trabajo independiente de los alumnos en las clases prácticas.

- La práctica de autoevaluación y el hábito del trabajo independiente se realizó predominantemente en los alumnos con niveles altos de autorregulación.
-

Bibliografía

Jorba, J. y Casellas, E. (eds.) (1997). *La regulación y la autorregulación de los aprendizajes*. Editorial Síntesis, España.

Marina, J.A.; et al. (1999). *Educación e Internet*, Grupo Santillana de Ediciones, España.

Rivera Porto, E. (1997) *Aprendizaje asistido por computadora*, en http://www.stedwards.edu/badm/naba/rivera/publications/libros/libros.htm/edu2.htm

Schunk, D. y Zimmerman, B. (1994) Dimensions of academic self-regulation: A conceptual framework for education. En *Self- regulation of learning and performance: Issues and educational applications*, pp. 3-21, Lawrence Erlbaum Associates, New Jersey.

Téllez Reyes Retana et al. (1998). VIII Reflexiones en torno al mundo informatizado y virtual de fines del siglo XX. En *Estructuración de programas de educación abierta y a distancia en la formación y capacitación continua de profesionales ante la demanda del mundo globalizado*, en http://www.uv.mx/video/redead/Plbros.aspx.

Veliz, M. (2002). *Sistema de autorregulación y autoevaluación del aprendizaje del cálculo diferencial para estimular el trabajo independiente de los alumnos en las clases prácticas*. Tesis de Magíster. Universidad Nacional de Tucumán. Argentina.

Kimball, R. (1998). *Tutor de auto-perfeccionamiento para la integración simbólica*, Xerox Corporation, OPD Systems Development, Palo Alto, California, U.S.A

ANÁLISIS DE ALGUNAS VARIABLES QUE PODRÍAN AYUDAR EN LA EVALUACIÓN DEL DESEMPEÑO DOCENTE. APLICACIÓN A UN CASO PARTICULAR

Benítez, Sonia; Juárez, Graciela; Benítez, Lidia;Torres, Marta y Guanuco, Marisa
Universidad Nacional de Tucumán, Argentina.
matcat@csnat.unt.edu.ar; lidiabenitez@hotmail.com

Resumen

La enseñanza universitaria se resuelve en la interrelación dialéctica entre tres elementos, docente-alumno-conocimiento, denominada práctica docente. Docentes y alumnos construyen y se apropian del conocimiento que socialmente se considera valioso y, en consecuencia, debe ser transmitido. Lo que un docente "hace" nunca está aislado, siempre surge de una trama de vínculos con los alumnos y con el conocimiento que enseña. Por lo tanto, la tarea docente es fundamental para el proceso enseñanza-aprendizaje y sumamente compleja a la hora de evaluar su calidad. Se llevó adelante este trabajo cuyo objetivo fue analizar estadísticamente dos (2) variables que, a criterio del investigador, eran las más adecuadas para evaluar el desempeño docente.

Se trabajó con resultados obtenidos de una encuesta realizada a los alumnos de la Universidad Carlos III de España, durante los años 1994-1999. Las variables en estudio fueron "Masprofesor", relativo a la pregunta "Ud. tomaría un nuevo Curso con este profesor?" e "Interés" que responde a la pregunta "El profesor despertó su interés por la asignatura?", después del cursado de la misma. Se realizó una estadística descriptiva a fin de conocer el comportamiento de cada una de las variables involucradas, y un estudio sobre la correlación entre ellas. Para la variable "Interés" se realizaron además comparaciones considerando 2 (dos) aspectos, cuatrimestres y cursos, a fin de detectar posibles diferencias significativas. Este trabajo pretende contribuir al desarrollo de la investigación sobre la calidad de la enseñanza universitaria, con énfasis en la tarea docente.

Introducción

La problemática de la evaluación de la enseñanza universitaria exige considerar los elementos indispensables que en ella intervienen: docente-alumno-conocimiento, terna denominada práctica docente. La enseñanza integra la acción de los protagonistas principales de la práctica docente: docentes y alumnos, quienes construyen y se apropian del conocimiento que socialmente se considera valioso y, en consecuencia, debe ser transmitido. Cada docente y cada alumno forman parte de esta práctica, desde lo que cada uno es y trae consigo (experiencias, afectos, conocimientos, opiniones, creencias, etc.); se encuentran en un espacio y en un tiempo común y generan una trama de vínculos que pueden facilitar o entorpecer el aprendizaje. Para que la enseñanza constituya un proceso incentivador y facilitador del aprendizaje, es necesario conciliar al menos dos aspectos:

Una relación de apropiación con el campo de conocimiento a enseñar, implica hablar de los "saberes" del docente. Cada docente desarrolla una particular relación con el conocimiento que enseña, el cual abarca no sólo los conocimientos que posee, sino también las opiniones, ideas, sentimientos y formas de generar y operar con ellos. Esta relación del docente con el conocimiento habla también de la relación posible del alumno con ese conocimiento.

Una relación facilitadora del aprendizaje con los alumnos, implica un conocimiento de los procesos de aprender de los Sujetos, de la concepción de aprendizaje que se sustenta (explícita o implícitamente) y un permanente análisis reflexivo y crítico de la trama de vínculos que surge en toda situación educativa (positiva o negativa). El saber a transmitir es el que da sentido y significado a esta situación. Pero al mediar un contacto o relación entre dos o mas Sujetos se movilizan afectos, que en un sentido u otro se transmiten, y que pueden obstaculizar o facilitar el aprendizaje.

Es decir lo que el docente "hace" nunca está aislado, siempre surge de una trama de vínculos con los alumnos y con el conocimiento que enseña. Por lo tanto, la tarea docente es fundamental para el proceso enseñanza-aprendizaje y sumamente compleja a la hora de evaluar su calidad. El objetivo de este trabajo fue analizar estadísticamente dos (2) variables que, a criterio del investigador, eran las más adecuadas para evaluar el desempeño docente y sólo pretende brindar algunos datos interesantes surgidos de uno de los protagonistas principales de las prácticas educativas: el docente.

Materiales y Métodos

Se trabajó con los alumnos de la Universidad Carlos III de España, divididos en 1020 comisiones ordenadas por cuatrimestre y por curso. Los datos fueron resultados obtenidos de una encuesta realizada a cada alumno durante los años 1994 y 1999.

De las doce variables planteadas se analizaron Interés y Masprofesor, definidas de la siguiente manera:

Interés: "puntaje promedio por comisión"

Se preguntó si después del cursado de la materia despertó el interés por la misma. El puntaje fue:

Excelente = 5; muy bueno = 4; bueno = 3; regular = 2; malo = 1.

Masprofesor: "puntaje promedio por comisión"

Se preguntó si tomarían nuevamente una clase con el mismo profesor. Esta variable fue medida mediante una escala dividida en 5 categorías:

Muy de acuerdo = 5; de acuerdo = 4; ni si ni no = 3; en desacuerdo = 2; muy en desacuerdo = 1

Para conocer el comportamiento de cada una de ellas, se realizó una estadística descriptiva, gráficos adecuados para una mejor visualización de la distribución de las variables, se hicieron pruebas estadísticas para determinar si las mismas respondían o no a una distribución normal y se llevó a cabo un estudio sobre la correlación entre ellas

Para la variable "Interés", se realizó el test t para determinar si la diferencia entre cuatrimestres era estadísticamente significativa y un análisis de la varianza (ANOVA) para determinar lo mismo, pero entre cursos. El procesamiento de los datos se realizó usando el software estadístico SPSS.

Análisis de los resultados y conclusiones

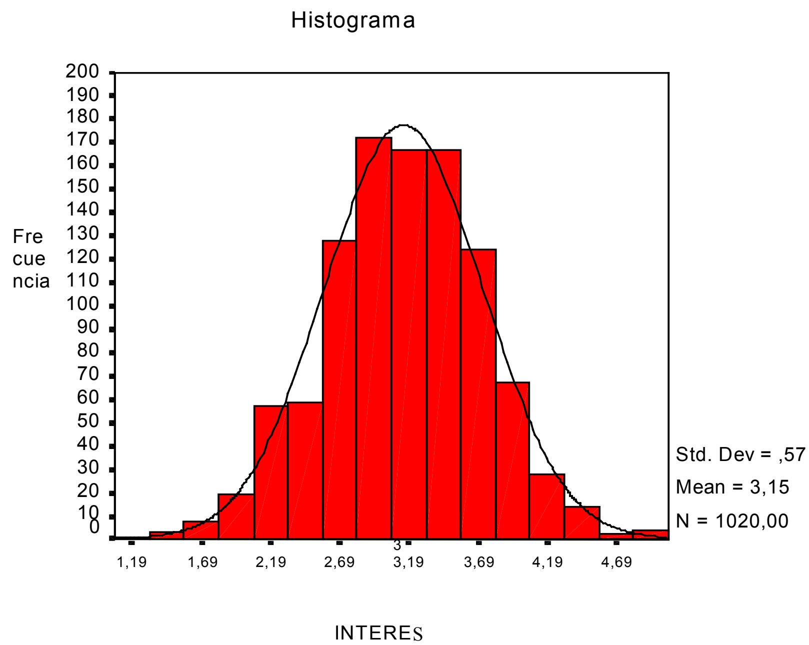
La primera variable analizada fue "Interés". El cuadro siguiente muestra los resultados:

			Statisti	Std.
INTERÉS	Mean		3,149	1,789E-
	95% Confidence Interval for Mean	Lower	3,113	
		Upper	3,184	
	5% Trimmed		3,151	
	Median		3,150	
	Varianc		,327	
	Std.		,5715	
	Minimum		1,14	
	Maximum		5,00	
	Range		3,86	
	Interquartile		,7250	
	Skewnes		-,091	,077
	Kurtosis		,142	,153

Se observa que el error estándar es pequeño, que la mediana y la media son prácticamente iguales pues difieren en el milésimo. El coeficiente de variación CV% = 18,14 %, es una medida relativa de variabilidad que se calcula como la razón de la desviación estándar a la media. El valor obtenido es próximo al 20% el cual se considera, en general, una dispersión media.

Es notable la diferencia entre el rango intercuartil y el rango, esto indica que el 50% de los datos centrales están más concentrados.

Del histograma dado mas abajo, se deduce que la distribución de la variable "Interés" es aproximadamente normal. Para corroborar si realmente responde a tal distribución se aplicaron las pruebas basadas en los coeficientes de asimetría y curtosis.



Los resultados de las mismas fueron calculados en base a los valores de la tabla descriptiva: coef. asimetría = -1,18 y coef. curtosis = 0,93. Como ambos valores son menores que 3, se puede afirmar que la distribución de la variable es normal. El valor 3,15 de la media y la concentración del 50% de los datos alrededor de la misma, indica que un importante número de alumnos mostraron gran interés por la asignatura.
En segundo lugar, se realizó el análisis descriptivo de la variable "Masprofesor" , los resultados obtenidos se muestran en el siguiente cuadro:

			Statisti	Std.
MASPRO	Mea		3,057	2,627E-
	95% Interval for	Lower	3,005	
		Upper	3,108	
	5% Trimmed		3,067	
	Media		3,110	
	Varianc		,704	
	Std.		,8391	
	Minimu		,00	
	Maximu		5,00	
	Rang		5,00	
	Interquartile		1,197	
	Skewnes		-,260	,077
	Kurtosi		-,179	,153

Se observa que la media difiere poco de la mediana y presenta una pequeña asimetría hacia la izquierda.

El coeficiente de variación CV% = 27,41%, supera al valor obtenido para la variable "Interés", lo que nos permitió afirmar que hay una mayor dispersión en la variable “Masprofesor”.

De acuerdo a las pruebas de asimetría y curtosis: coef. asimetría = 3,3 y coef. curtosis = 1,2; la distribución de esta variable es aproximadamente normal a pesar que uno de los coeficientes es levemente mayor que 3. Hay una buena cantidad de alumnos que quisieron tomar nuevamente un curso con ese profesor, es decir existe una buena aceptación por parte de los alumnos hacia los profesores, por lo tanto el nivel docente es bueno.
Con el fin de estudiar la relación entre las dos variables se realizó la correlación con su respectiva significancia.

		INTERÉS	MASPRO
INTERÉS	Pearson Correlation	1,000	,665**
	Sig. (2-tailed)	,000	,000
	N	1020	1020
MASPRO	Pearson Correlation	,665**	1,000
	Sig. (2-tailed)	,000	,000
	N	1020	1020

**. Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

La correlación entre las variables "Masprofesor" e "Interés" es altamente significativa ($p<0,01$), es decir que hay una asociación lineal importante a un nivel de significación del 1%. Pero se debe ser cuidadoso en la interpretación de este resultado, pues, calculando el coeficiente de determinación ($r^2 = 44,2\%$) indica que sólo el 44% de la variación de una de las variables es explicada por la variación de la otra. Este dato, dependiendo del investigador o del uso que se quiera dar a la correlación, será importante o no.
También se realizaron tests no paramétricos para estudiar la correlación, por el tipo de variables con las que se estaba trabajando, a pesar que por el número elevado de datos fue adecuado usar los métodos paramétricos.

			INTERÉS	MASPRO
Kendall's	INTERÉS	Correlation Coefficient	1,000	,493**
		Sig. (2-tailed)	,000	,000
		N	1020	1020
	MASPRO	Correlation Coefficient	,493**	1,000
		Sig. (2-tailed)	,000	,000
		N	1020	1020
Spearman's	INTERÉS	Correlation Coefficient	1,000	,670**
		Sig. (2-tailed)	,000	,000
		N	1020	1020
	MASPRO	Correlation Coefficient	,670**	1,000
		Sig. (2-tailed)	,000	,000
		N	1020	1020

**. Correlation is significant at the .01 level (2-tailed).

Las conclusiones a las que se arribó son las mismas que las obtenidas con el test paramétrico.

A continuación se hicieron estudios tomando sólo la variable "Interés". Se hizo el análisis descriptivo de la variable, por cuatrimestre.

Independent Samples Test

INTERÉS	Levene's Test for Equal of variances		t-test for Equality of Means						
								95% Confidence Interval of the Difference	
	F	Sig.	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Std. Error Difference	Lower	Upper
Equal variances assumed	9,571	,002	1,261	1018	,208	4,512E-02	3,578E-02	-2,51E-02	,1153
Equal variances not assumed			1,261	1001,511	,208	4,512E-02	3,578E-02	-2,51E-02	,1153

Group

	CUATRI	N	Mean	Std.	Std. Mea
INTERÉS	1,00	510	3,171	,6069	2,687E-
	2,00	510	3,126	,5334	2,362E-

Para saber si en los dos cuatrimestres el comportamiento de la variable "Interés" fue el mismo o no, se usó el test t. Para testar si existían diferencias entre las varianzas se usó el test de Levene para igualdad de varianzas. El cuadro anterior muestra la salida, donde se puede observar el valor del estadístico F con su respectivo valor de probabilidad. De ellos se deduce que existen diferencias entre las varianzas, por lo tanto se debe observar el valor del estadístico t para el caso "no se asume igualdad de varianzas". Por lo tanto tomo el valor de t = 1,261, df = 1001,511 y para este valor de t la probabilidad es p>0,05, es decir acepto la hipótesis nula de que las muestras tienen igual comportamiento con respecto a la variable estudiada, es decir que el interés de los alumnos en ambos cuatrimestres fue el mismo.

Por último, para averiguar si había diferencias significativas entre los cursos con respecto a la variable "Interés", se realizó un análisis de la varianza (ANOVA)

ANOVA

				Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
INTERÉS	Between Groups	(Combined)		10,959	4	2,740	8,640	,000
		Linear Term	Unweighted	3,942	1	3,942	12,430	,000
			Weighted	4,215	1	4,215	13,293	,000
			Deviation	6,744	3	2,248	7,089	,000
	Within Groups			321,862	1015	,317		
	Total			332,822	1019			

Debido a que el valor de la probabilidad, dado en el cuadro como significancia, correspondiente al estadístico F es prácticamente nula se concluye que hay diferencia entre los grupos (cursos). Para determinar entre qué cursos se da tal diferencia se usó el test de Bonferroni de comparaciones múltiples.

De acuerdo a los resultados obtenidos, dados mas abajo en una tabla, se encontró diferencias entre los alumnos del 1er curso con los de 3er y 5to, entre el 2do y 3er, entre el 3er y 4to y entre el 4to y 5to. De esto se concluye que las diferencias se establecen independientemente del momento en que se encuentre el alumno en la carrera, es decir que se da algo muy interesante en la población estudiada, el interés que los profesores despiertan en sus alumnos por sus materias no depende de si los alumnos son de los primeros años o de los últimos años.

Multiple Comparisons

Dependent Variable:Interés

Bonferroni

(I)	(J)	Mean Differenc (I-J)	Std.	Sig.	95% Confidence Lower	95% Confidence Upper
1,00	2,00	-7,6846E-	4,856E-	1,00	-	5,976E-
	3,00	- *	5,261E-	,000	-	-
	4,00	-5,6143E-	5,308E-	1,00	-	9,318E-
	5,00	- *	6,792E-	,001	-	-7,6533E-
2,00	1,00	7,685E-	4,856E-	1,00	-5,9759E-	,213
	3,00	- *	5,286E-	,005	-	-3,6122E-
	4,00	2,070E-	5,333E-	1,00	-	,170
	5,00	-	6,811E-	,052	-	8,566E-
3,00	1,00	,261 *	5,261E-	,000	,113	,409
	2,00	,184 *	5,286E-	,005	3,612E-	,333
	4,00	,205 *	5,704E-	,003	4,506E-	,366
	5,00	-5,9354E-	7,105E-	1,00	-	,193
4,00	1,00	5,614E-	5,308E-	1,00	-9,3179E-	,205
	2,00	-2,0703E-	5,333E-	1,00	-	,129
	3,00	- *	5,704E-	,003	-	-4,5062E-
	5,00	- *	7,140E-	,031	-	-1,0582E-
5,00	1,00	,267 *	6,792E-	,001	7,653E-	,458
	2,00	,190	6,811E-	,052	-8,5655E-	,382
	3,00	5,935E-	7,105E-	1,00	-	,205
	4,00	,211 *	7,140E-	,031	1,058E-	,412

*. The mean difference is significant at the

Bibliografía

Cantatore de Frank, Norma. 1980. Manual de Estadística Aplicada. Editorial hemisferio sur.

Lacreu, Hector Luis; Giordano, María Francisca. 1995. La pedagogía universitaria en ciencias. Publicación de la Universidad de Bs. As. Código 53A-533.

Meyer, Paul L.1973. Probabilidades y Aplicaciones Estadísticas. Editorial Fondo Educativo Interamericano, S. A.

Montgomery, Douglas. Diseño y Análisis de Experimentos. Grupo Editorial Iberoamérica.

Negri, María Cristina et al. 1995. "Jaque mate a la función docente". Publicación de la Universidad de Bs. As. Código 8.2.4.

Siegel, Sidney. Estadística No Paramétrica.

Sposetti de Croatto, A y Bas de Sar, E. 1995. El profesional de Ciencias Sociales en el marco de la evaluación de la calidad. Publicación de la Universidad de Bs As. Código 8.4.

Ya - Lun Chou. 1990. Análisis Estadístico. Edit. McGraw - Hill, 2da edición.

EL ABP EN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

María Beatriz Gómez y José Salazar
Tecnológico de Monterrey, Campus Cuernavaca, México

Resumen

El trabajo que se presenta se llevó a cabo en un curso de Trigonometría impartido en el Tecnológico de Monterrey, Campus Cuernavaca a alumnos del tercer semestre de preparatoria. En la propuesta aparecen esencialmente tres elementos: el lenguaje, la emoción y la corporalidad de los participantes en el proceso enseñanza-aprendizaje. Estos elementos giran alrededor del cambio que está implícito en el aprender. Así mismo, se toma como estrategia didáctica el modelo del Aprendizaje Basado en Problemas (ABP). el cual propicia una participación más significativa por parte de los alumnos en su proceso de aprendizaje. Los objetivos planteados fueron: a) hacer una adecuación del ABP a las características del grupo y de la materia; b) realizar un trabajo grupal que requiriera el aprendizaje de los contenidos del programa; c) reforzar el concepto de autoevaluación más que el de acreditación y d) elaboración por parte de los alumnos de un Portafolio. Para cumplir con uno de los principios del ABP, se dividió al grupo en seis equipos, considerando cada uno de ellos como un módulo. Ante la imposibilidad de que los alumnos vieran en los contenidos matemáticos un problema de interés personal por resolver, se recurrió a la construcción de un juego cuyos contenidos fueran los temas del programa y que su problema se centrara en la elaboración del mismo. El juego lo llamaron Trigotrón para el cual construyeron un tablero, una ruleta y 100 tarjetas; ellos mismos determinaron las reglas del juego. Cada tarjeta contiene 3 preguntas, y cada una corresponde a los contenidos de cada parcial. La elaboración de las preguntas y respuestas quedó a cargo de los equipos, además del trabajo específico que cada uno tuvo que realizar como fue: el tablero, la ruleta y la impresión de las tarjetas. Algunos de los resultados que se obtuvieron son: a) un cambio significativo en la relación profesor-alumno en la cual al estar el profesor más como asesor-coordinador que como expositor, dio a los alumnos la oportunidad de interiorizar en sus procesos cognitivos, de participar más en clase, de hacer investigación, de interactuar entre ellos; b) el tocar la parte emotiva con la construcción de un juego generó una atmósfera de confianza que facilitó la retroalimentación mutua, la generación de preguntas, al autoaprendizaje, a la autoevaluación del proceso del trabajo en equipo y del propio equipo y c) la revisión periódica de los portafolios permitió hacer ajustes en la conducción del grupo,

Se considera que aunque existe un problema real en el aprendizaje de las Matemáticas, los maestros debemos darnos y darles a nuestros alumnos la oportunidad de explorar nuevas formas de aprendizaje que permitan por una parte, facilitar el camino por el cual el propio alumno pueda llegar al conocimiento, y por otra propicien nuestro desarrollo personal como maestros, siendo cada vez más creativos en la planeación, aplicación, evaluación y autoevaluación de cada curso que nos sea asignado.

Introducción

El trabajo que se presenta se llevó a cabo en un curso de Trigonometría impartido en el Tecnológico de Monterrey, Campus Cuernavaca a alumnos del tercer semestre de preparatoria. En la propuesta aparecen esencialmente tres elementos: el lenguaje, la emoción y la corporalidad de los participantes en el proceso enseñanza-aprendizaje. Estos elementos giran alrededor del cambio que está implícito en el aprender. Así mismo, se toma como base el modelo "Aprendizaje Basado en Problemas" (ABP) el cual propicia una participación más significativa por parte de los alumnos en su proceso de aprendizaje ya que al cuestionarse los problemas genera preguntas: porqué lo son, cómo solucionarlos, qué información es necesaria para ello, etc. El modelo además utiliza como herramienta básica los grupos pequeños (módulos) en los cuales el profesor se integra como uno más de los elementos del módulo, así como el coordinador y asesor del mismo, surgiendo en forma natural el trabajo en equipo, ya que al ser el alumno el principal responsable de su aprendizaje le resulta necesario apoyarse en el grupo.

Antecedentes e importancia del estudio

Por lo general, el profesor de Matemáticas adopta un estilo de enseñanza de acuerdo con su personalidad, a su experiencia tanto como alumno, como profesor, programas de estudio, escuela en que trabaja, etc. Este estilo, comúnmente es expositivo, ello se debe, entre otras razones, a que los programas casi siempre son extensos, por lo cual no puede abarcar todo el material que se le exige y respetar, al mismo tiempo, el ritmo de aprendizaje del alumno. Por desgracia el precio de cubrir el programa es no dejarle a la mayoría de los alumnos otra posibilidad que una memorización rutinaria de los temas, despertando en ellos sentimientos de incapacidad, frustración y rechazo hacia las Matemáticas. Este problema es real pero no necesariamente insuperable. En este trabajo se presenta las experiencias obtenidas de la aplicación de una forma diferente de desarrollar el proceso E-A, de tal manera que el aprendizaje de las matemáticas resultara novedoso y atractivo a los alumnos

Objetivos

Se definieron los siguientes objetivos:

- Hacer una adecuación del ABP a las características del grupo y de la materia.
- Realizar un trabajo grupal, para el cual les resultara necesario el aprendizaje de los contenidos del programa.
- Reforzar el concepto de autoevaluación más que el de acreditación.
- No solamente aplicar la evaluación Departamental de los contenidos, sino elaborar y aplicar instrumentos de autoevaluación (sin valor a calificación pero que contribuyeran al cambio de actitud de los alumnos), y el diseño de formatos que permitieran dar seguimiento al proceso interno del trabajo en equipo y a los resultados del mismo.
- Elaboración por parte de los alumnos de un "Portafolio" el cual contuviera el Programa, los trabajos extraclase, los resultados de sus investigaciones y sus apreciaciones personales sobre el desarrollo del curso.

Metodología

Para cumplir con uno de los principios del ABP que es el trabajar con grupos pequeños (módulos), se dividió al grupo en seis equipos, considerando cada uno de ellos como un módulo. Ante la imposibilidad de que los alumnos vieran en los contenidos matemáticos un problema de interés personal por resolver, se recurrió a la construcción de un juego cuyos contenidos fueran los temas del programa y que su problema se centrara en la elaboración del mismo. El juego que decidieron construir lo llamaron Trigotrón para el cual tuvieron que construir un tablero, una ruleta y 100 tarjetas, así como determinar las reglas del juego. Las tarjetas contienen 3 preguntas y cada una a su vez corresponde a los contenidos cubiertos para cada uno de los exámenes parciales, la primera al primero, la segunda al segundo y así respectivamente. El cuarto periodo quedó fuera de Trigotrón por no ser temas relacionados con la Trigonometría. La elaboración de las preguntas y respuestas para las tarjetas quedó bajo la responsabilidad de todos los equipos, además del trabajo específico que cada equipo tuvo que realizar como fue: el tablero, la ruleta, la impresión de las tarjetas, etc. Las preguntas propuestas por cada equipo, las revisaban los jefes de equipo (los cuales se fueron rolando durante el semestre) con el propósito de determinar si eran preguntas de calidad, que no estuvieran repetidas y que cubrieran todos los temas del período. Después hacían llegar por correo electrónico un listado de todas las preguntas aceptadas para que el grupo se diera a la tarea de encontrar las soluciones, y el equipo encargado de la reglamentación del juego determinara qué puntaje se le asignaba a cada pregunta. Quincenalmente se reunían conmigo los jefes de equipo para decidir si las tarjetas elaboradas durante ese período formaban parte o no del Trigotrón.

Para la adquisición de conocimientos que les permitieran encontrar las soluciones de cada una de las preguntas, se hizo una partición de los contenidos del programa de tal suerte, que para cada semana quedara claro lo que se tenía que cubrir. La obligación de preparar los temas recaía en los equipos, los cuales podían solicitar asesoría siempre y cuando ya los hubieran investigado. Hubo temas que los exponían por equipo, otros en los que primero investigaban para después discutirlos en el salón de clase, en varias ocasiones fue necesario por mi parte, retomar los temas investigados o lo expuesto por ellos para aclarar, relacionar o integrar ciertos puntos, en otras tuve que asumir el rol tradicional como expositor, particularmente en aquellos temas que por su naturaleza lo requerían.

Resultados

1. Un cambio significativo en la relación profesor-alumno en la cual al estar el profesor más como asesor-coordinador que como expositor, dio a los alumnos la oportunidad de interiorizar en sus procesos cognoscitivos, de participar más en clase, de hacer investigación, de interactuar entre ellos. El tocar la parte emotiva con la construcción de un juego generó una atmósfera de confianza que facilitó la retroalimentación mutua. Así como obtener el mejor promedio en la evaluación Departamental aplicada a todos los cursos paralelos del Campus.
2. El juego Trigotrón sirvió de vía para el aprendizaje de la Trigonometría, al mantener a los alumnos motivados durante su construcción y una vez terminado, el jugarlo ayudó a la preparación del examen final.
3. Se propició el desarrollo de habilidades como son: trabajo en equipo; comunicación efectiva; liderazgo; creatividad; búsqueda de información; toma de decisiones; resolución de problemas; y el manejo del editor de ecuaciones del word, así como el paintbrush para elaborar las tarjetas.
4. La aplicación del ABP coadyuvó a la generación de preguntas, al autoaprendizaje, a la autoevaluación del proceso del trabajo en equipo y del propio equipo; además permitió la integración de los alumnos a nivel intra e inter-grupos.
5. El Portafolio permitió hacer ajustes en la conducción del grupo, ya que al leer sus comentarios, éstos servían de retroalimentación.
6. Los criterios que se incluyeron en los formatos para evaluar y autoevaluar el trabajo en equipo así como las autoevaluaciones individuales para cada período sirvieron como directrices para guiar el cambio de actitud de los alumnos.

Conclusiones

Se considera que aunque existe un problema real en el aprendizaje de las Matemáticas, los maestros debemos darnos y darles a nuestros alumnos la oportunidad de explorar nuevas formas de aprendizaje que permitan por una parte, facilitar el camino por el cual el propio alumno pueda llegar al conocimiento, y por otra propicien nuestro desarrollo personal como maestros, siendo cada vez más creativos en la planeación, aplicación, evaluación y autoevaluación de cada curso que nos sea asignado.

Bibliografía

Jakson R., Galey W. et al. (1986) *Tutorial Groups In Problem - Based Learning*, Springer Publishing CO, New York.

Ulloa, J. *Comparación de dos modelos para la enseñanza de las matemáticas*, Didac.

Acevedo, A. (1991). *Aprender jugando*, Tomo II, , Editorial Limusa, México.

Echeverría, R. (1995). *Ontología del lenguaje*, 2a. edición, Edit. Dolmen Estudio, Chile

HACIA UNA PROPUESTA PARA EL APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA

Henry Gallardo Pérez y Mawency Vergel Ortega
Universidad Francisco de Paula Santander, Cúcuta, Colombia
hjgallar@bari.ufps.edu.co , mvergel@bari.ufps.edu.co

Resumen

En nuestra región, debido al exceso de rigurosidad y formalismo con que se trabajó la geometría en épocas recientes, se creó un rechazo tanto en docentes como en estudiantes, causando un abandono casi total del área en los currículos escolares. Sin embargo, en estudios preliminares y sesiones de trabajo previas, el consenso de docentes apunta a que en la educación, el área de geometría es fundamental para lograr en el alumno el desarrollo de capacidades que le permitan alcanzar un buen nivel de abstracción de conceptos. El proyecto pretende acercar a los docentes a una enseñanza lúdica de la geometría, basándose en su reconocimiento como la técnica más indicada para comprender y asimilar nuevas propiedades, por parte de los alumnos cuyo fin es el de realizar actividades que se apoyan en vivencias, en las realidades de la vida práctica, para entenderlas primero y luego fijarlas y retenerlas mediante procesos de razonamiento. Para cumplir con este propósito, fue necesario explorar diferentes alternativas metodológicas que contribuyen al mejoramiento del proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría y al desarrollo del pensamiento lógico deductivo e inductivo de los estudiantes, en la solución de problemas de la vida real, sin olvidar que la base para que se produzca enseñanza de una ciencia, es el dominio de sus contenidos. En la primera fase del proyecto, en el año 2001, se capacitaron 60 docentes de diferentes establecimientos educativos públicos y privados de nivel básico y medio, ubicados en el área metropolitana de la ciudad de Cúcuta. El curso de 315 horas enfatizó en la didáctica de la geometría, uso de las técnicas del Origami, construcciones geométricas y aplicaciones de software para el aprendizaje de la geometría, además del estudio de la geometría Euclidiana, Transformacional y Fractal, culminando con la elaboración de una propuesta metodológica para la enseñanza de la geometría, adaptada a su medio, que permita, entre otras, vivenciar el aula taller como el instrumento metodológico imprescindible para la educación matemática, reconocer la necesidad de formar un pensamiento matemático basado en procesos mentales íntimamente ligados a la acción y que a su vez permitan la construcción del conocimiento mediante procesos lógicos, propiciar en el docente un enfoque menos algorítmico y mas heurístico de la enseñanza de la geometría e inducirlo a utilizar ambientes educativos mas placenteros, que permitan al estudiante explorar y probar sus propios modelos de pensamiento, que le lleven a alcanzar un aprendizaje significativo. A lo largo del año escolar 2002 cada docente desarrolló, en su establecimiento educativo, su propuesta metodológica con el acompañamiento permanente de los investigadores, adicionalmente se realizaron sesiones de socialización y evaluación de avances y resultados que a su vez permitieron enriquecer y mejorar su trabajo. En el presente año ellos actúan como agentes multiplicadores y se ha iniciado la capacitación con un segundo grupo.

Presentación

En nuestra región, debido al exceso de rigurosidad y formalismo con que se trabajó la geometría en épocas recientes, se creó un rechazo tanto en docentes como en estudiantes, causando un abandono casi total del área en los currículos escolares. Sin embargo, en estudios preliminares y sesiones de trabajo previas, el consenso de docentes apunta a que en la educación, el área de geometría es fundamental para lograr en el alumno el desarrollo de capacidades que le permitan alcanzar un buen nivel de abstracción de conceptos. En el año 1998, este equipo, con el apoyo del Ministerio de Educación Nacional, realizó el proyecto Capacitación de Docentes de Matemáticas de los grados 6° y 7° del Departamento Norte de Santander, en él se detectaron las falencias arriba mencionadas y, aun cuando en la evaluación del impacto del proyecto realizada en el 2000 mostró una mejoría significativa, se consideró conveniente iniciar el proceso de capacitación de profesores de educación básica y media en los términos aquí mencionados. El proyecto pretende acercar a los docentes a una enseñanza lúdica de la geometría, basándose en su reconocimiento como la técnica más indicada para comprender y asimilar nuevas propiedades por parte de los alumnos, cuyo fin es el de realizar actividades que se apoyan en vivencias, en las realidades de la vida práctica, para entenderlas primero y luego fijarlas y retenerlas mediante procesos de razonamiento. Para cumplir con este propósito, fue necesario explorar diferentes alternativas metodológicas que contribuyen al mejoramiento del proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría y al desarrollo del pensamiento lógico deductivo e inductivo de los estudiantes, en la solución de problemas de la vida real, sin olvidar que la base para que se produzca enseñanza de una ciencia, es el dominio de sus contenidos.

La población beneficiada corresponde a la población educativa del Departamento Norte de Santander. Se ha clasificado por estudiantes y docentes de los niveles de educación pre-escolar, básica y media, tanto de los sectores urbano y rural como del oficial y no oficial. Se encuentra que, para el año 2000, el total de estudiantes en el departamento es de 288.293, de los cuales el 59% están ubicados en el área metropolitana de Cúcuta, que constituyen la población estudiantil directamente beneficiada, en primera instancia, por el proyecto; en su mayoría ellos son del sector urbano y alrededor del 70% estudian en establecimientos oficiales. La población estudiantil del resto del departamento, que también se beneficiarán durante la ejecución de la segunda fase del proyecto constituye el 41% del total, de ellos solamente alrededor de la mitad están ubicados en el sector urbano y la gran mayoría estudia en colegios oficiales.

Estudiantes matriculados año 2000		**PRE ESCOLAR**	**BÁSICA PRIMARIA**	**BÁSICA SECUNDARIA**	**EDUCACIÓN MEDIA**	**TOTAL**
Cúcuta	Sector Urbano	17813	78477	49623	17825	163738
	Sector Rural	664	4446	1343	291	6744
	Total Cúcuta	18477	82923	50966	18116	170482
Resto	Sector Urbano	6929	28243	20128	7850	63150
	Sector Rural	3107	45769	4981	804	54661
	Total Resto	10036	74012	25109	8654	117811
Total Dpto.	Sector Urbano	24742	106720	69751	25675	226888
	Sector Rural	3771	50215	6324	1095	61405
	Total Dpto.	28513	156935	76075	26770	288293

Estudiantes matriculados por nivel educativo y sector geográfico

Estudiantes matriculados año 2000		**PRE ESCOLAR**	**BÁSICA PRIMARIA**	**BÁSICA SECUNDARIA**	**EDUCACIÓN MEDIA**	**TOTAL**
Cúcuta	Sector Oficial	11611	65382	36142	11977	125112
	Sector No Oficial	6866	17541	14824	6139	45370
	Total Cúcuta	18477	82923	50966	18116	170482
Resto	Sector Oficial	9329	72859	24269	7925	114382
	Sector No Oficial	707	1153	840	729	3429
	Total Resto	10036	74012	25109	8654	117811
Total **Dpto.**	Sector Oficial	20940	138241	60411	19902	239494
	Sector No Oficial	7573	18694	15664	6868	48799
	Total Dpto.	28513	156935	76075	26770	288293

Estudiantes matriculados por nivel educativo y sector educativo

Para el año 2000, el Departamento Norte de Santander contaba con un total de 13255 docentes en educación preescolar, básica y media. La mitad de ellos están ubicados en el área metropolitana de la ciudad de Cúcuta. El 80% se los docentes labora en el sector rural y, también un 80% del total de docentes labora en el sector oficial. Por otra parte, en el Departamento hay un total de 2372 planteles educativos, de los cuales sólo el 30% están ubicados en el sector urbano, pero que absorben la mayor parte de la población estudiantil, reflejándose así la alta concentración de estudiantes en los planteles educativos del sector urbano, población ésta que será beneficiada directamente por el proyecto, sin olvidar que debe enfocarse a la población estudiantil dispersa en el sector rural.

Docentes año 2000		PRE ESCOLAR	BÁSICA PRIMARIA	SECUNDARIA Y MEDIA	TOTAL
Cúcuta	Sector Urbano	713	2895	3216	6824
	Sector Rural	13	168	58	239
	Total Cúcuta	726	3063	3274	7063
Resto	Sector Urbano	283	1709	1697	3689
	Sector Rural	45	2038	420	2503
	Total Resto	328	3747	2117	6192
Total Dpto.	Sector Urbano	996	4604	4913	10513
	Sector Rural	58	2206	478	2742
	Total Dpto.	1054	6810	5391	13255

Docentes por nivel educativo y sector geográfico

Docentes año 2000		PRE ESCOLAR	BÁSICA PRIMARIA	SECUNDARIA Y MEDIA	TOTAL
Cúcuta	Sector Oficial	341	2257	2146	4744
	Sector No Oficial	385	806	1128	2319
	Total Cúcuta	726	3063	3274	7063
Resto	Sector Oficial	288	3662	1961	5911
	Sector No Oficial	40	85	156	281
	Total Resto	328	3747	2117	6192
Total Dpto.	Sector Oficial	629	5919	4107	10655
	Sector No Oficial	425	891	1284	2600
	Total Dpto.	1054	6810	5391	13255

Docentes por nivel educativo y sector educativo

Objetivos

- Vivenciar el aula taller como el instrumento metodológico imprescindible para la Educación Matemática.
- Reconocer la necesidad de formar un pensamiento matemático basado en procesos mentales íntimamente ligados a la acción y que a su vez permitan la construcción del conocimiento mediante procesos lógicos
- Identificar la Enseñanza de la Geometría como parte del proceso formativo de la persona, capaz de asumir una actitud critica y reflexiva frente al mundo desde el dominio de la ciencia y desde el Proyecto Pedagógico.

- Desarrollar el sentido responsable de la docencia y el respeto por la tarea educadora y de compromiso con el estilo de vida democrático, como co-responsable de la formación de la persona en el contexto socio-histórico particular.
- Propiciar en el docente un enfoque menos algorítmico y mas heurístico de la enseñanza de la geometría e inducirlo a utilizar ambientes educativos mas placenteros, que permitan al estudiante explorar y probar sus propios modelos de pensamiento.
- Presentar a los docentes de educación básica y media, herramientas conceptuales que le permitan proponer y liderar proyectos de investigación a partir de la exploración de la naturaleza, en los cuales vincule al estudiante en la interrelación con el medio y permita la construcción de su conocimiento geométrico.

Componentes Temáticas

La capacitación en Geometría se ofrece como resultado del proceso de Investigación en Educación Matemática, que el Departamento de Matemáticas y Estadística ha venido realizando a lo largo de todos estos años tanto en apoyo a la formación de Docentes en Matemáticas en las Licenciaturas como a la capacitación de docentes en servicio y pretende responder a las necesidades educativas de la región. Cada una de las actividades presenciales estará centrada en un tema geométrico y a través del análisis, la exploración, la confrontación de manera progresiva se pretende llevar al docente a la construcción y dominio de conceptos geométricos y al diseño de estrategias metodológicas para abordar su trabajo en el aula. El desarrollo de la capacitación gira en torno a las siguientes temáticas:

- Didáctica de la Geometría: Geometría y Lógica, Geometría e Intuición, Acercamiento a la Geometría
- Técnica del Origami: Puntos y Líneas, Rectas, Ángulos, Cuerpos
- Construcciones Geométricas: El circuplano, su utilidad como herramienta de aprendizaje, Construcciones con cuerdas, Razones Geométricas, Construcción de las Cónicas
- Software para el Aprendizaje de la Geometría: Aplicativos “El Geometra” y “Cabri”; Geometría, informática y aprendizaje; Construcciones; Ilustración de conceptos; Demostraciones; Transformaciones
- Geometría Euclidiana: La Demostración y el Aprendizaje; Historia de la Geometría; Puntos, Líneas, Rectas, Planos; Congruencias; Figuras y Cuerpos Geométricos; Sólidos de Revolución
- Geometría Transformacional: Reflexiones, Traslaciones, Rotaciones, Homotecias, Transformación Afín
- Geometría Fractal: Geometrías no Euclidianas, Geometría en la Naturaleza, Los Fractales

Aspectos Metodológicos

El programa de capacitación contempla una primera fase de reflexión sobre la enseñanza de la geometría, en la cual el docente asistente debe presentar situaciones problémicas de su experiencia en la enseñanza de la geometría, que le permitan definir un proyecto pedagógico de investigación en el aula que irá desarrollando a través del tiempo de duración del programa. Cada una de las actividades presenciales estará centrada en un tema geométrico y a través del análisis, la exploración, la confrontación de manera progresiva se pretende llevar al docente a la construcción y dominio de conceptos geométricos y al diseño de estrategias metodológicas para abordar su trabajo en el aula. A partir de las experiencias vividas por el docente en el programa, él debe diseñar, adecuar, implementar y analizar resultados de su aplicación el aula, para luego compartirlas con el grupo y redactar un informe sobre el trabajo desarrollado. Con base en los conocimientos adquiridos en el curso y las estrategias didácticas desarrolladas, los docentes elaboran una propuesta investigativa que les permita llevar a su entorno educativo la geometría y ponerla al alcance de los estudiantes de educación básica y media, así como la de implementar nuevas estrategias didácticas para la exploración y el aprendizaje de la geometría. El desarrollo de la propuesta es seguido y asesorado por los investigadores, periódicamente se realizan sesiones de socialización de resultados y complementación de conceptos y temáticas para su desarrollo. Los resultados de este trabajo se presentan en un informe final, que será publicado y se socializará dentro de la comunidad educativa de la región.

Resultados

En la primera fase del proyecto, en el año 2001, se capacitaron 60 docentes de diferentes establecimientos educativos públicos y privados de nivel básico y medio, ubicados en el área metropolitana de la ciudad de Cúcuta. El curso de 315 horas enfatizó en la didáctica de la geometría, uso de las técnicas del Origami, construcciones geométricas y aplicaciones de software para el aprendizaje de la geometría, además del estudio de la geometría Euclidiana, Transformacional y Fractal, culminando con la elaboración de una propuesta metodológica para la enseñanza de la geometría, adaptada a su medio, que permita, entre otras, vivenciar el aula taller como el instrumento metodológico imprescindible para la educación matemática, reconocer la necesidad de formar un pensamiento matemático basado en procesos mentales íntimamente ligados a la acción y que a su vez permitan la construcción del conocimiento mediante procesos lógicos, propiciar en el docente un enfoque menos algorítmico y mas heurístico de la enseñanza de la geometría e inducirlo a utilizar ambientes educativos mas placenteros, que permitan al estudiante explorar y probar sus propios modelos de pensamiento, que le lleven a alcanzar un aprendizaje significativo.
A lo largo del año escolar 2002 cada docente desarrolló, en su establecimiento educativo, su propuesta metodológica con el acompañamiento permanente de los investigadores, adicionalmente se realizaron sesiones de socialización y evaluación de avances y resultados que a su vez permitieron enriquecer y mejorar su trabajo. En un municipio cercano, los docentes participantes en el proyecto, lograron el año pasado, con el apoyo de la Alcaldía, replicar el proceso a los docentes de matemáticas de los diferentes planteles educativos. En el presente año todos los docentes del proyecto actúan como agentes multiplicadores y se ha iniciado la capacitación con un segundo grupo.

Seguimiento y Evaluación

Los aspectos a tener en cuenta para evaluar el trabajo del docente en las actividades presenciales serán los siguientes:

- Capacidad de razonamiento y análisis, conocimiento y estructuras conceptuales y procesales
- Capacidad para utilizar el lenguaje formal para comunicar ideas
- Capacidad para formular problemas, aplicar diversas estrategias para resolver problemas, comparar e interpretar resultados, generalizar soluciones

- Capacidad para dar nombre, verbalizar y definir conceptos; identificar y generar ejemplos valiosos y no válidos; utilizar modelos, diagramas y símbolos para representar conceptos; pasar de un modo de representación a otro; reconocer los diversos significados e interpretaciones de los conceptos; comparar y constatar conceptos.

Este proceso requerirá de la elaboración y aplicación de una guía de observación que brindará información suficiente para determinar el grado en que el docente ha aprovechado la fundamentación teórica recibida y la aplicabilidad de los saberes. El cambio en los fines de la enseñabilidad de la geometría en la básica secundaria y la media vocacional, en cuanto atiendan a la experimentación y a la generación de conocimientos en el aula, antes que a la memorización repetición de conceptos. La búsqueda y adecuación de procedimientos y técnicas de enseñanza que cumplan con los nuevos fines de la educación. El docente debe evidenciar una transformación en su práctica educativa: desde su cultura, mejores saberes específicos y mayor capacidad de liderazgo. Simultáneamente se estará asesorando y evaluando el proyecto de investigación que el docente debe liderar en su entorno. Los resultados de este proyecto, que se socializarán entre los compañeros en la etapa final y que serán dados a conocer a la comunidad educativa, constituyen un referente práctico válido para estimar los resultados a corto plazo del programa. El seguimiento del trabajo será ejecutado por los docentes del programa mediante visitas a las instituciones educativas donde labora el docente y a través de informes periódicos que éstos presenten para registrar su avance. El impacto del programa será evaluado mediante un seguimiento que realizará a mediano plazo el Departamento de Matemáticas y Estadística de la Universidad Francisco de Paula Santander.

Bibliografía

Gallardo, H. y otros (2000). Exploración y Aprendizaje de la Geometría Fractal. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 13, p.186-190

Gallardo, H. (2001). Una Nota Sobre Enseñabilidad de las Ciencias, *Rev. Respuestas*, Cúcuta: UFPS

Flórez, R. (1995). Hacia una Pedagogía del Conocimiento. Bogotá: McGraw Hill

Martínez, A. (1979). *Una metodología activa y lúdica para la enseñanza de la geometría*. Madrid: Síntesis

Vasco, C. (1994). Un nuevo enfoque para la didáctica de las matemáticas. Bogotá: MEN

LA VISUALIZACIÓN EN EL TRATAMIENTO DE EXPRESIONES NUMÉRICAS CON EXPONENTES Y RADICALES MEDIANTE EL ÁLGEBRA DE FUNCIONES

Alicia Ávalos, Vicente Carrión
U. Latina de América – Morelia; DME del CINVESTAV - México
aliavacau@hotmail. com , vcarrion@mail.cinvestav.mx

Resumen

A partir de un estudio en proceso con profesores del nivel medio sobre errores en el uso de expresiones numéricas que contienen exponentes y radicales se propone una forma de enseñanza basada en recursos de visualización usados en la graficación de funciones. Además de reconocer la visualización como la habilidad de los sujetos para formar y manipular imágenes mentales se acepta como la habilidad para trazar diagramas apropiados para representar un concepto matemático o un problema. Son reconocidos el valor y la importancia de las imágenes visuales, en los diagramas y de otras herramientas visuales en los procesos heurísticos, para el descubrimiento, en la enseñanza de la matemática. Se propone una forma integral de abordar el aprendizaje de exponentes y radicales que consideran recursos visuales, numéricos y algebraicos para obtener sus propiedades. La graficación de funciones que comprenden formas de expresiones con exponentes y radicales, realizada por puntos, por intervalos y en forma global, favorece el análisis de la forma en que cambian las variables e ilustra el dominio de definición de las expresiones algebraicas. Del análisis de las representaciones gráficas se obtienen las propiedades de expresiones numéricas que incluyen exponentes y radicales definidas tanto en los números reales como en los complejos. Utilizando el álgebra de estas curvas se obtienen otras propiedades numéricas. Se hace uso de la calculadora graficadora y la computadora para obtener las gráficas de las funciones y para verificar las propiedades numéricas que se establecen.

Marco teórico.

La importancia del enfoque sugerido es que relaciona varios aspectos de la matemática, aparentemente ajenos. Se interrelacionan las formas numérica, gráfica y algebraica de presentar los conceptos matemáticos. La lectura de representaciones gráficas presupone distinguir las variables visuales correspondientes en la escritura algebraica mediante una interpretación global. De acuerdo con las consideraciones visuales Duval (1993) propone tres maneras de construir una representación gráfica, una cuantitativa de punteo, una cualitativa-cuantitativa de extensión de trazo y una de interpretación global de las propiedades de las figuras. La primera se caracteriza por utilizar como único recurso puntos obtenidos con fórmulas algebraicas. Los valores de las variables independiente y dependiente se disponen en una tabla. Esta forma de graficar se limita a unir con segmentos de curva puntos marcados en el plano coordenado. La extensión del trazo efectuado corresponde a actividades de interpolación y extrapolación. No sólo se apoya en un conjunto finito de puntos, se basa en el trazo de segmentos de curvas asociados a conjuntos infinitos de puntos potenciales, contenidos en un intervalo que se define entre dos puntos predeterminados de la curva. La interpretación global de las propiedades de una representación gráfica requiere de una imagen para un “objeto” descrito por una expresión algebraica. Una modificación de la imagen que conduce a un cambio en la escritura de la expresión algebraica determina una variable visual pertinente para la interpretación de la gráfica. Esta vía de graficación requiere de la asociación de una variable visual de la representación con una la unidad significativa de la escritura algebraica.

El término visualización no es muy familiar en matemáticas. Desde esta perspectiva no es usual restringir la visualización a la habilidad de los sujetos para formar y manipular imágenes mentales como es el uso común en psicología; se toma como la habilidad para trazar un diagrama con lápiz y papel con calculadora o computadora. El diagrama sirve para representar un concepto matemático, ayuda a comprenderlo; o para representar un problema, ayuda a resolverlo. La visualización es un medio para conseguir comprensión en el aprendizaje de los conceptos matemáticos (Zimmermann & Cunningham;1991). No se habla de visualizar un diagrama sino de visualizar un concepto o un problema. La visualización de un diagrama significa formar una imagen mental del diagrama; la visualización de un problema significa entender el problema en términos de un diagrama o de una imagen visual. La visualización en matemáticas es un proceso para formar imágenes mentales con lápiz y papel, o con ayuda de tecnología, para el descubrimiento y comprensión de nociones matemáticas, utilizándola con efectividad. Los psicólogos se han interesado en la relación entre la visualización y los procesos mentales del razonamiento humano. Los matemáticos reconocen el valor de los diagramas y de otras herramientas visuales, en la enseñanza de la matemática y en los procesos heurísticos, para el descubrimiento de la matemática. Sin embargo, conscientes de la importancia obvia de las imágenes visuales en las actividades cognitivas humanas las representaciones visuales permanecen en segundo término, tanto en la matemática como en su enseñanza (Barwise & Etchemendy; 1991). Múltiples causas de las dificultades en el aprendizaje de la matemática se deben a problemas con las conexiones entre los aspectos visuales y analíticos de los conceptos y de los procedimientos matemáticos. Razonar a partir de lo visual demanda hechos cognitivos de mayor nivel que hacerlo algorítmicamente y resulta más natural para los estudiantes actuar lejos del pensamiento visual. Eisenberg & Dreyfus (1991) afirman que la preferencia de los estudiantes para hacer argumentos no visuales no es accidental. El argumento analítico es corto, claro, con pocas suposiciones y da el resultado sin implicaciones extensas; para el estudiante es fácil de aprehender y aplicar a ejercicios procediendo mecánicamente en los cálculos; para el profesor, es fácil de enseñar, no requiere la preparación de una gráfica o elaborar un programa, o correrlo. El argumento visual requiere prerrequisitos relacionados con cierto manejo de conocimiento visual, muestra información adicional relacionada, es difícil de entender y provoca discusión. Los autores citados distinguen tres tipos de razones que tienen los estudiantes para evitar la visualización, una cognitiva: lo visual es más difícil de comprender; una sociológica: lo visual es más difícil de enseñar; y una relacionada con la naturaleza de la matemática: se dice que lo visual no pertenece a la matemática.

Metodología . Se presentó a profesores de bachillerato un examen que incluyó las siguientes expresiones aritméticas con radicales.

1. $\sqrt{(-3)^2} =$	*6*. Resolver la ecuación $x^2 = 4$
2. $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-2} =$	*7*. $-\sqrt{3} \cdot \sqrt{-3} =$
3. Resolver la ecuación $x^2 = (-3)^2$	*8*. $-\sqrt{(-2)^2} =$
4. $\sqrt{-6^2} =$	*9*. Resolver la ecuación $x^2 = -(5)^2$
5. $-\sqrt{7^2} =$	*10*. $-\sqrt{-2^2} =$

Se aplicó a 52 profesores del nivel medio superior. Se analizaron los resultados. Del análisis se vio la necesidad de implementar actividades de enseñanza tendientes a la comprensión de las propiedades de los radicales, dirigidas a profesores. Se presentan las respuestas diferentes que dieron los profesores para la expresión 2.

$\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-2}=\sqrt{(-2)(-2)}=\sqrt{(-2)^2}=\sqrt{4}=2$	14	26.9%
$\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-2}=\sqrt{(-2)(-2)}=\sqrt{(-2)^2}=-2$	11	21.2%
$\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-2}=\left(\sqrt{-2}\right)^2=-2$	5	9.6%
$\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-2}=(-2)^{\frac{1}{2}}\cdot(-2)^{\frac{1}{2}}=(-2)^{\frac{2}{2}}=\left((-2)^2\right)^{\frac{1}{2}}=(4)^{\frac{1}{2}}=2$	1	1.9%
$\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-2}=(-2)^{\frac{1}{2}}\cdot(-2)^{\frac{1}{2}}=(-2)^{\frac{2}{2}}=(-2)^1=-2$	7	13.5%
$\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-2}=(-2)^{\frac{1}{2}}\cdot(-2)^{\frac{1}{2}}=(-2)^{\frac{2}{2}}=\left((-2)^{\frac{1}{2}}\right)^2=\left(\sqrt{-2}\right)^2$ $=\left(i\sqrt{2}\right)^2=2i^2=-2$	1	1.9%
$\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-2}=(-2)^{\frac{1}{2}}\cdot(-2)^{\frac{1}{2}}=(-2)^{\frac{2}{2}}=(-2)^1=-2$	1	1.9%
$\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-2}=\left(\sqrt{-2}\right)\left(\sqrt{-2}\right)=\left(i\sqrt{2}\right)\left(i\sqrt{2}\right)=2i^2=-2$	3	5.8%
$\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-2}=\left(\sqrt{-2}\right)^2=\left(i\sqrt{2}\right)^2=2i^2=-2$	4	7.7%
$\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-2}=\left(i\sqrt{2}\right)\left(i\sqrt{2}\right)=\left(i\sqrt{2}\right)^2=2i^2=-2$	5	9.6%

Algunos errores que están presentes en la resolución del problema 2 son los siguientes. Se relacionan con definiciones mal establecidas o con el uso de propiedades que son válidas en el sistema de números reales y no lo son en el sistema de los números complejos.

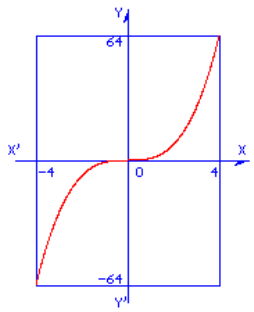
$\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-2}=\sqrt{(-2)(-2)}$	$\sqrt{(-2)^2}=-2$	$(-2)^{\frac{2}{2}}=-2$
$\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-2}=\sqrt{(-2)^2}$	$(-2)^{\frac{1}{2}}\cdot(-2)^{\frac{1}{2}}=(-2)^{\frac{2}{2}}$	$(-2)^{\frac{2}{2}}=\left((-2)^2\right)^{\frac{1}{2}}=(4)^{\frac{1}{2}}=2$
$\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-2}=\left(\sqrt{-2}\right)^2$	$(-2)^{\frac{2}{2}}=\left((-2)^2\right)^{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{-2}=(-2)^{\frac{1}{2}}$

Se propone una forma integral de abordar el aprendizaje del tema de exponentes y radicales poniendo en juego recursos visuales, numéricos y algebraicos. La graficación de funciones que comprenden expresiones con exponentes y radicales, realizada por puntos, por intervalos y en forma global, favorece el análisis de la manera en que cambian las variables e ilustra el dominio de definición de expresiones algebraicas. En esta parte se examinan las gráficas de curvas de la forma $\boldsymbol{y}^{\mathrm{n}}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{m}}$, donde m y n son números enteros positivos y primos relativos. Otras fórmulas para expresar estas curvas son las siguientes: $\boldsymbol{y}=\sqrt[\mathrm{n}]{\boldsymbol{x}^{\mathrm{m}}}$ o $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}^{\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}}}$; sin embargo, debe precisarse el dominio donde las tres expresiones algebraicas representan una misma curva. Del análisis de las representaciones gráficas se obtienen las propiedades numéricas de las expresiones en estudio. En lo que sigue $\boldsymbol{x}$ representa un número real y ***m*** y ***n*** son números naturales.

1. Se exhiben ejemplos de casos en que m y n son impares positivos $m \geq n$.

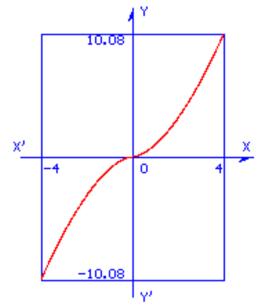
$0 < m < n, \quad n = 1$

$y = x^3$



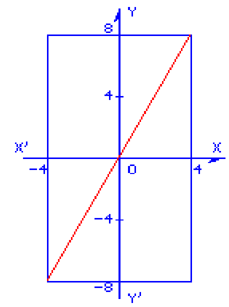
$0 < n < m, \quad n \neq 1$

$y^3 = x^5$ o $y = \sqrt[3]{x^5}$



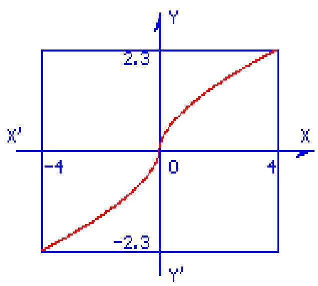
$0 < m = n$

$y = x$



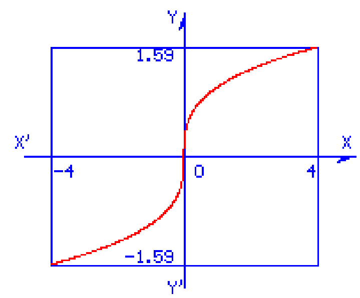
$0 < m < n, \quad m \neq 1$

$y^5 = x^3$ o $y = \sqrt[5]{x^3}$



$0 < m < n, \quad m = 1$

$y^3 = x$ o $y = \sqrt[3]{x}$

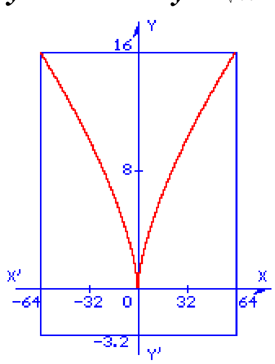


La expresión $\sqrt[n]{x^m}$ es un número real si m y n son enteros impares. Es positivo si x es positivo, cero si x es cero y negativo si x es negativo.

2. Se muestran ejemplos de casos en que m es entero par y n es entero impar, ambos positivos $m < n$.

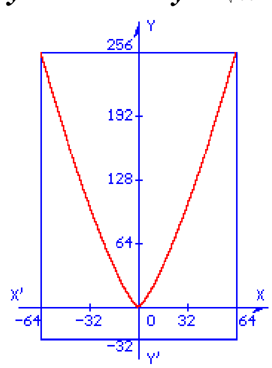
$1 < m < n$

$y^3 = x^2$ o $y = \sqrt[3]{x^2}$



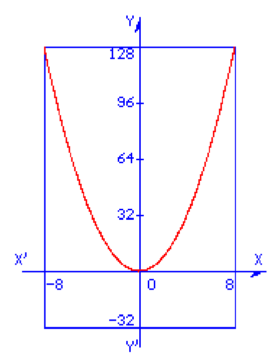
$1 < n < m$

$y^3 = x^4$ o $y = \sqrt[3]{x^4}$



$m \geq 2, \quad n = 1$

$y = x^2$

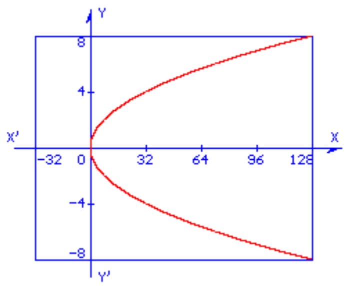


La expresión $\sqrt[n]{x^m}$ es un número real positivo si m es entero par y n es entero impar, ambos positivos; es cero si x es cero.

3. Se ilustra con ejemplos el caso en que m impar positivo, n par positivo y m > n.

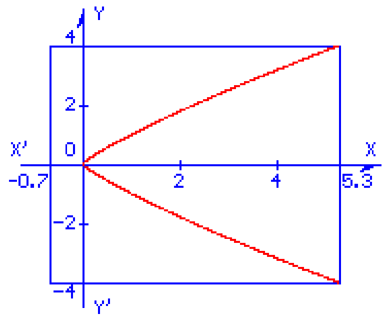
$m = 1, \quad n \geq 2$

$y^2 = x \quad \text{o} \quad y = \pm\sqrt{x}$



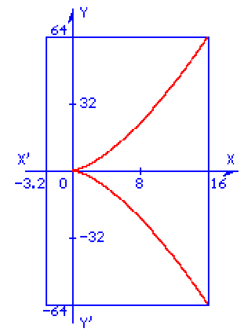
$1 < m < n$

$y^6 = x^5 \quad \text{o} \quad y = \pm\sqrt[6]{x^5}$



$1 < m < n$

$y^2 = x^3 \quad \text{o} \quad y = \pm\sqrt{x^3}$



La expresión $\sqrt[n]{x^m}$ es un número real positivo si m es entero impar y n es entero par, ambos positivos; es cero si x es cero. Además, $-\sqrt[n]{x^m}$ es número real negativo si m es entero impar y n es entero par, ambos positivos; es cero si x es cero.
Obsérvese que si x es menor que cero, para los mismos valores de m y n la expresión $\sqrt[n]{x^m}$ no está definida en los números reales. Este hecho es punto de partida interesante y buena motivación para introducir el sistema de números complejos y las propiedades de expresiones con exponentes y radicales en este sistema de números.
Se describen los casos posibles para expresiones numéricas con exponentes y radicales.

Características del índice **n** del radical y del exponente **m** (**m** y **n** son primos relativos)			**Expresión radical o potencial**	**Dominio e imagen de las expresiones radicales o potenciales**
m y n números impares positivos	m > n	n = 1	$Y = x^m$	• Si x es número real positivo y es real positivo. • Si x es número real positivo y es real positivo. • Si x es cero y es cero.
		n >1	$y = \sqrt[n]{x^m}$	
	m = n	m = 1 y n = 1	$Y = x$	
	m < n	m = 1	$y = \sqrt[n]{x}$	
		m > 1	$y = \sqrt[n]{x^m}$	
m número par positivo y n impar positivo	m > n	n = 1	$y = x^m$	• Si x es número real positivo y es real positivo. • Si x es número real negativo y es real positivo. • Si x es cero y es cero.
		n >1	$y = \sqrt[n]{x^m}$	
	m < n	n ≥ 1	$y = \sqrt[n]{x^m}$	
m número impar positivo y n par positivo	m > n	m = 1	$y = \pm\sqrt[n]{x}$	• Si x es número real positivo $\sqrt[n]{x^m}$ es real positivo y $-\sqrt[n]{x^m}$ es real negativo. • Si x es número real negativo y no es número real. • Si x es cero y es cero.
		m >1	$y = \pm\sqrt[n]{x^m}$	
	m < n	m ≥ 1	$y = \pm\sqrt[n]{x^m}$	

Algunas propiedades sobre expresiones numéricas que contienen exponentes y radicales que pueden derivarse del análisis de las gráficas de las funciones anteriores son las siguientes:

1. Si $\boldsymbol{a}$ es un número real positivo la ecuación $\boldsymbol{x}^2 = \boldsymbol{a}$ tiene dos soluciones reales, las raíces cuadradas de $\boldsymbol{a}$: $\boldsymbol{x}_1 = -\sqrt{\boldsymbol{a}}$ y $\boldsymbol{x}_2 = \sqrt{\boldsymbol{a}}$. Si $\boldsymbol{a} = 0$ entonces $\boldsymbol{x} = 0$.
2. Si n es número entero positivo par la ecuación $\boldsymbol{x}^{n} = \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a} > 0$, tiene dos soluciones reales, $\boldsymbol{x}_1 = -\sqrt[n]{\boldsymbol{a}}$ y $\boldsymbol{x}_2 = \sqrt[n]{\boldsymbol{a}}$; tiene otras raíces que no son reales. Si $\boldsymbol{a} = 0$ entonces $\boldsymbol{x} = 0$.
3. Si $\boldsymbol{x} \in \Re$ entonces $\sqrt{\boldsymbol{x}^2} = |\boldsymbol{x}|$ y $-\sqrt{\boldsymbol{x}^2} = -|\boldsymbol{x}|$.
4. Propiedades que se derivan del álgebra de funciones. $\boldsymbol{x} \in \Re$, y $\boldsymbol{x} \geq 0$, m y n enteros positivos.

a. $\boldsymbol{x}^{m}\boldsymbol{x}^{n} = \boldsymbol{x}^{m+n}$	*b.* $\left(\boldsymbol{x}^{m}\right)^{n} = \boldsymbol{x}^{m\,n}$	*c.* $\dfrac{\boldsymbol{x}^{m}}{\boldsymbol{x}^{n}} = \boldsymbol{x}^{m-n},\ \boldsymbol{x} \neq 0$
d. $(\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{y})^{n} = \boldsymbol{x}^{n}\boldsymbol{y}^{n}$	*e.* $\left(\dfrac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}}\right)^{n} = \dfrac{\boldsymbol{x}^{m}}{\boldsymbol{y}^{n}},\ \boldsymbol{y} \neq 0$	m > n exponente entero positivo. m = n exponente cero. m < n exponente entero negativo.

5. Otras propiedades derivadas del álgebra de funciones; $\boldsymbol{x} \geq 0$, m y n enteros positivos.

f. $\left(\sqrt[n]{\boldsymbol{x}}\right)^{n} = \sqrt[n]{\boldsymbol{x}^{n}} = \boldsymbol{x}$	*g.* $\left(\sqrt[n]{\boldsymbol{x}}\right)^{m} = \sqrt[n]{\boldsymbol{x}^{m}}$	*h.* $\sqrt[m]{\sqrt[n]{\boldsymbol{x}}} = \sqrt[m\cdot n]{\boldsymbol{x}}$
i. $\sqrt[n]{\boldsymbol{x}} \cdot \sqrt[n]{\boldsymbol{y}} = \sqrt[n]{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}}$	*j.* $\sqrt[n]{\dfrac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}}} = \dfrac{\sqrt[n]{\boldsymbol{x}}}{\sqrt[n]{\boldsymbol{y}}},\ \boldsymbol{y} \neq 0$	*k.* $\sqrt[m]{\boldsymbol{x}} \cdot \sqrt[n]{\boldsymbol{y}} = \sqrt[m\cdot n]{\boldsymbol{x}^{n}\boldsymbol{y}^{m}}$
l. $\dfrac{\sqrt[m]{\boldsymbol{x}}}{\sqrt[n]{\boldsymbol{y}}} = \sqrt[m\cdot n]{\dfrac{\boldsymbol{x}^{n}}{\boldsymbol{y}^{m}}},\ \boldsymbol{y} \neq 0$	*m.* $\sqrt[m]{\boldsymbol{x}} \cdot \sqrt[n]{\boldsymbol{x}} = \sqrt[m\cdot n]{\boldsymbol{x}^{m+n}}$	*n.* $\dfrac{\sqrt[m]{\boldsymbol{x}}}{\sqrt[n]{\boldsymbol{x}}} = \sqrt[m\cdot n]{\boldsymbol{x}^{m-n}},\ \boldsymbol{x} \neq 0$

6. De las propiedades 1-5, ¿cuáles se cumplen, y cuáles no lo hacen, para los números complejos?
7. ¿Para qué valores de m, n y $\boldsymbol{x}$ se cumple la igualdad $\sqrt[n]{\boldsymbol{x}^{m}} = \boldsymbol{x}^{\frac{m}{n}}$? ¿Para qué valores de m, n y $\boldsymbol{x}$ no se cumple la misma igualdad?
8. Hacer una lista de propiedades de los exponentes y radicales válidas para números complejos.

Conclusiones

Con un ejemplo se han ilustrado los errores en los que incurren los profesores del nivel medio en la transformación de expresiones numéricas que contienen exponentes y radicales. Se propone una forma de abordar la enseñanza del tema con el uso de recursos visuales para graficar cierta clase de funciones y en operaciones algebraicas definidas entre ellas. Se hace uso de la calculadora graficadora y la computadora para obtener las gráficas de las funciones y para verificar las propiedades numéricas establecidas, relacionadas con los exponentes enteros y racionales, positivos cero o negativos, y determinar los dominios donde tales expresiones representan números reales o complejos relacionando las formas numérica, gráfica y algebraica de presentar los conceptos matemáticos. Con ello se propicia que el estudiante construya e incremente su propio discurso matemático.

Bibliografía

Barwise, J & Etchemendy J. (1991).Visual Information and Valid Reasoning. En *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*. Editores: W. Zimmermann y S. Cunnungham.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotica et functionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique el de Sciences Cognitives,* 5 (1993), pp. 37-65. IREM de Strasbourg. Traducción: Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN. México.

Eisenberg, T. & Dreyfus T. (1991). *On the Reluctance to Visualize in Mathematics. En Visualization in Teaching and Learning Mathematics*. Editores: W. Zimmermann y S. Cunnungham.

Zimmermann, W. & Cunningham S. (1991). Editors'Introduction: What is Mathematical Visualization? En *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*. Editores: W. Zimmermann y S. Cunningham.

PREFLEXIONES, MARCOS DE ANTECEDENTES E ILUSTRACIONES

Aquí se consignan reflexiones, reseñas en campos de investigación de la disciplina, ilustraciones de métodos y técnicas novedosas, en el marco de la preocupación por fortalecer aprendizajes y mejorar la gestión de procesos de enseñanza, entre otros aspectos. Sin constituir investigaciones acabadas, se refieren aquí intuiciones, experiencias directas anteriores a la reflexión que sistematiza, con la potencialidad de dar cuerpo a proyectos de investigación

APORTES DEL CÁLCULO Y LA TECNOLOGÍA A LA MEDICINA

Arturo Baeza, Armando Maldonado
P.Universidad Católica de Chile
aebaeza@puc.cl, ajmaldon@puc.cl

Resumen

El tratar de complementar dos ciencias que parecen tan alejadas entre si como lo son las matemáticas y la ciencia médica, es algo que puede parecer difícil, pero en realidad no lo es y además es algo necesario. La medicina, de hecho, necesita de las matemáticas en muchos aspectos, desde la estadística hasta ayudar a comprender y modelar cómo trabaja el corazón cómo funciona el sistema respiratorio. Es claro que esta complementación podría tornarse más complicada y confusa si no se contara con la ayuda de la tecnología, elemento que no debe ser considerado como un ente simplificador del pensamiento, sino de hecho, como una herramienta útil en la obtención del conocimiento mismo. La medicina basa sus resultados en gran medida en la experimentación para poder comprobar o reformular alguna hipótesis, y el cálculo diferencial e integral es una herramienta indispensable para poder evaluar estos experimentos. Si además se complementa con el uso de tecnología para la obtención y análisis de datos, el proceso de producción del conocimiento es más veloz y eficiente. En ningún caso es remplazado por la máquina. El trabajo que se realiza con el curso de Cálculo para Medicina de la Pontificia Universidad Católica de Chile, ha trazado una vía que habilita el entrelazamiento y la complementación profunda entre el Cálculo, la Medicina y la formación médica. Se parte de diferentes modelos de la ciencia médica, y se abordan mediante el Cálculo y la complementación adecuada de la tecnología a través de la programación con calculadoras. Dentro del trabajo realizado en el curso de Cálculo, se exponen a continuación dos ejemplos de lo antes descrito:

– Análisis matemático de las consecuencias de una estenosis de la válvula aórtica en la función del corazón, su regulación por parte en el seno carotídeo y la hipertrofia cardiaca compensatoria que se desarrolla. Se trabaja con el teorema de Bernoulli de la conservación de la energía de fluidos y del Número de Reynolds, mediante la programación en calculadoras.

– Análisis de la función respiratoria normal expresada en forma gráfica y mediante el uso de programación con calculadoras. Evaluación de condiciones patológicas del sistema respiratorio en que se puede obtener una limitación del flujo aéreo o una restricción del volumen ventilatorio, mediante el análisis de gráficas usando programación en calculadora (programa que analiza la condición del paciente a partir de los valores obtenidos durante su espirometría, entregando un diagnóstico de limitación del flujo aéreo o de restricción del volumen ventilatorio)

Análisis matemático y fisiopatológico de la estenosis aórtica e hipertrofia ventricular.

El orificio aórtico mide aproximadamente 2,5 cm de diámetro y se sitúa en la porción posterosuperior derecha del ventrículo izquierdo. Está rodeado por un anillo fibroso, en el que se insertan las tres valvas semilunares de la válvula aórtica. En ocasiones, los bordes de la válvula aórtica suelen unirse, formando una cúpula con un orificio muy estrecho en la estenosis de la válvula aórtica. Esta unión puede ocurrir en el nacimiento (congénita) o desarrollarse después (adquirida). La estenosis valvular impone un mayor trabajo al ventrículo izquierdo que se hipertrofia. Así mismo se ausculta un soplo cardíaco por el flujo turbulento de la sangre a través d la válvula estenosada. Sabiendo que $\rho = 1{,}1 \times 10^3\ kg/m^3$, $\mu = 2{,}084 \times 10^{-3}\quad Pascal \bullet segundo\ \left[N\,s\,m^{-2}\right]$, presión arterial intraventricular durante la sístole de 115 mm Hg y el flujo $Q = 5\,lt/\min$; determinar:

a) ¿Qué porcentaje de disminución mínima del radio de la válvula aórtica es necesario para causar un flujo turbulento, y así poder auscultar un soplo (determinarlo en forma numérica, algebraica y gráfica)?
b) ¿Cuál es el flujo por la estenosis?

c) ¿En qué porcentaje disminuye la diferencia de presión?, ¿qué consecuencias podría tener?, ¿en qué afecta a la hipertrofia del ventrículo izquierdo?

d) Diseñar un programa para la calculadora que pueda calcular el número de Reynolds y que al entregar el resultado pueda decir si el flujo es laminar o turbulento

Solución

a) Para determinar el radio mínimo al cuál ocurriría flujo turbulento (y como consecuencia se auscultaría un soplo cardíaco), es necesario encontrar a que radio el número de Reynolds es 2000. $R_e = \frac{R\,v\,\rho}{\mu} = 2000$

Pero en la expresión se observa que mientras más grande sea el radio, más grande es el número de Reynolds, y nosotros buscamos lo contrario ¿es posible entonces que a menor radio tengamos flujo turbulento? La respuesta es sí, dado que si nosotros mantenemos el flujo (o *gasto cardíaco*) y disminuimos el área de sección por el cual va ese flujo, la velocidad con la que avanza es mayor, lo que nos permite tener un flujo turbulento pese a disminuir el radio. En otras palabras $Q = A\,v$

$$v = \frac{Q}{A}$$

donde el área transversal es $A = \pi R^2$, por lo cual

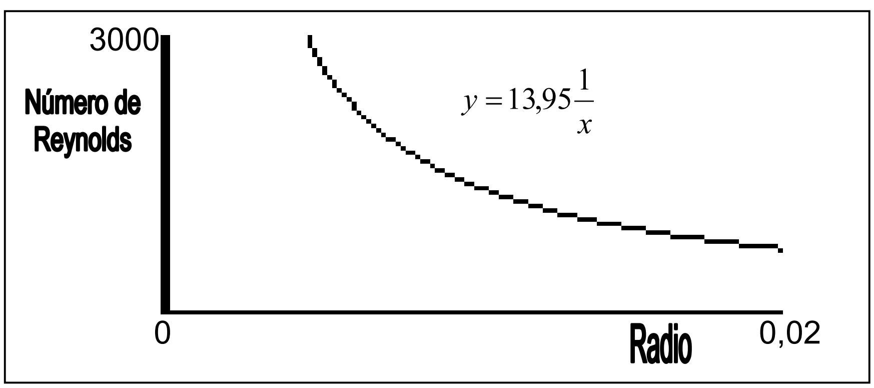
$$v = \frac{Q}{\pi R^2}$$

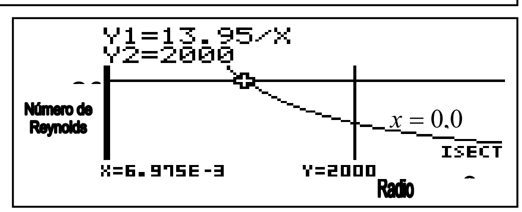
y podemos rescribir la ecuación de Reynolds así:

$$R_e = \frac{R\frac{Q}{\pi R^2}\rho}{\mu}$$

$$R_e = \frac{1}{R} \times \frac{Q\,\rho}{\pi\,\mu}$$

A partir de esta nueva expresión podemos ver que mientras menor sea el radio, es posible tener un flujo turbulento, siempre y cuando el flujo sea el mismo. Ahora estamos en condiciones de calcular el mínimo radio a partir de $R = \frac{1}{R_e} \times \frac{Q\,\rho}{\pi\,\mu}$ donde si reemplazamos los valores, obtenemos





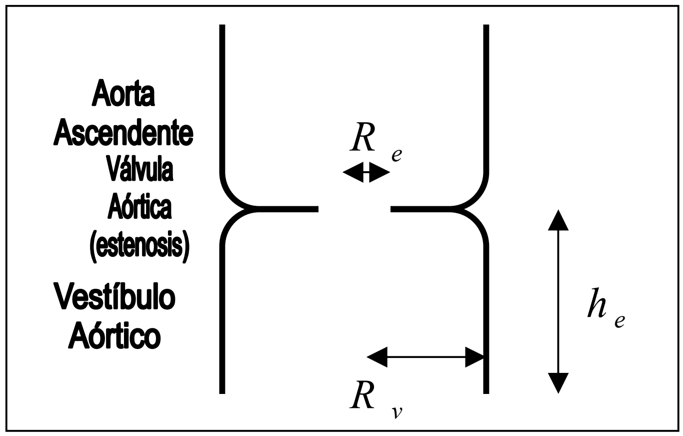
$$R = \frac{5\,lt/\min \times 1{,}1\times 10^{3}\ kg/m^{3}}{2000\times 3{,}14\times 2{,}084\times 10^{-3}\ Ns/m^{2}} = \frac{8{,}3\times 10^{-5}\ m^{3}/seg \times 1{,}1\times 10^{3}\ kg/m^{3}}{2000\times 3{,}14\times 2{,}084\times 10^{-3}\ Ns/m^{2}} = 0{,}007\,m$$

y para saber que porcentaje es del radio normal

$$\frac{0{,}007m \times 100}{0{,}0125m} = 56\%$$

Es decir, una disminución de un 44% puede causar flujo turbulento por la válvula. Pero este resultado podemos obtenerlo de otra forma, mediante la gráfica de la función $y = 13{,}95\frac{1}{x}$, donde nuestra variable dependiente es el número de Reynolds, y la variable independiente es el radio.

Para encontrar el radio, dibujaremos la recta *y = 2000* y buscaremos donde se interfecta con nuestra curva. Además incluiremos la recta *x = 0,0125* como referencia. Podemos ver entonces que con 1,4 cm de diámetro es posible tener flujo turbulento, y así podremos auscultar un soplo cardiaco, y que en condiciones normales hay flujo laminar, con un número de Reynolds de 1116.



b) Por la ley de la continuidad y por lo expuesto en el punto a), el flujo no varía, lo que cambia es la velocidad.

c) La anatomía del corazón nos muestra que antes de la válvula aórtica está la *vía de salida* del corazón, el *vestíbulo aórtico*. Para los fines del análisis matemáticos, tomaremos un centímetro desde la válvula hacia el vestíbulo y podemos definir algunos parámetros de interés para el análisis: radio de la estenosis $R_e = 0{,}007\,m$; radio del vestíbulo $R_v = 0{,}0125\,m$ (asumiremos que es el mismo que el de la válvula normal); $h_1 = 0$ y $h_2 = 0{,}01m$.

Para continuar, utilizaremos el teorema de Bernuolli que da una relación entre la presión, la velocidad y la altura de un fluido

$$p_v + \frac{1}{2}\rho v_v^2 + \rho g h_v = p_e + \frac{1}{2}\rho v_e^2 + \rho g h_e$$

$$p_v - p_e = \frac{1}{2}\rho\left(v_e^2 - v_v^2\right) + \rho g h_e$$

Pero como $v = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\pi R^2}$, podemos reemplazar y queda

$$p_v - p_e = \frac{1}{2}\rho\left(\left(\frac{Q}{\pi R_e^2}\right)^2 - \left(\frac{Q}{\pi R_v^2}\right)^2\right) + \rho g h_e$$

donde el flujo es el mismo, de *5 lt/min.* Al ir desarrollando la ecuación y factorizando, nos queda:

$$p_v - p_e = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{Q^2}{\pi^2 R_e^4} - \frac{Q^2}{\pi^2 R_v^4}\right) + \rho g h_e$$

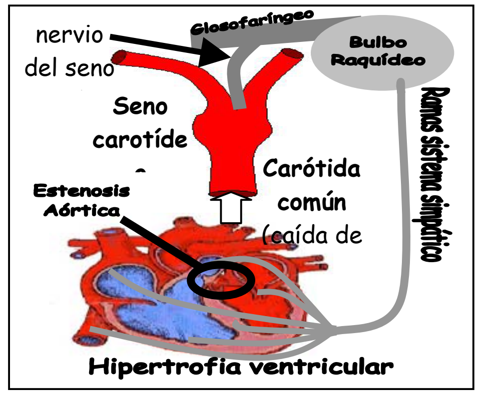
$$p_v - p_e = \frac{\rho Q^2}{2\pi^2}\left(\frac{1}{R_e^4} - \frac{1}{R_v^4}\right) + \rho g h_e$$

Expresión que resuelta da:

$$p_v - p_e = \frac{1{,}1\times10^3 kg/m^3\left(8{,}3\times10^{-5} m^3/seg\right)^2}{2\times\pi^2}\left(\frac{1}{(0{,}007m)^4}-\frac{1}{(0{,}0125m)^4}\right)-1{,}1\times10^3 kg/m^3 9{,}8m/seg^2\,0{,}01m$$

$$p_v - p_e = 144{,}2\ N/m^2 - 107{,}8\,N/m^2 = 36{,}4\,N/m^2 = 0{,}27\,mm\,Hg$$

Tenemos cuanto es la diferencia de presiones, y para obtener el porcentaje, ocupamos la presión sistólica intraventricular durante la eyección, de 115 mm Hg



$$\frac{p_v - p_e}{p_v} = \frac{0{,}27\,mm\,Hg}{115\,mm\,Hg} = 0{,}00023 = 0{,}23\%$$

Este porcentaje pude ser no muy alto, pero igual es significativo, dado que un descenso en la presión puede ayudar aún más a la hipertrofia del ventrículo izquierdo. El mecanismo mediante el cual la baja de presión causada por la estenosis ayuda a la hipertrofia es por estimulación de los barorreceptores ubicados en el *seno carotídeo* (ubicado en la bifurcación de la arteria carótida común. Esta estructura es capaz de censar una baja de presión y estimular un aumento de la actividad simpática en el corazón, el cuál tiene efectos inotrópicos (aumenta la contractibilidad) y cronotrópicos (aumenta la frecuencia) positivos sobre el músculo cardíaco. Estos efectos entran en un círculo vicioso que aumenta la hipertrofia del ventrículo. Además, el flujo turbulento de la sangre a causa de la estenosis causa daño endotelial y también a los elementos figurados de la sangre.

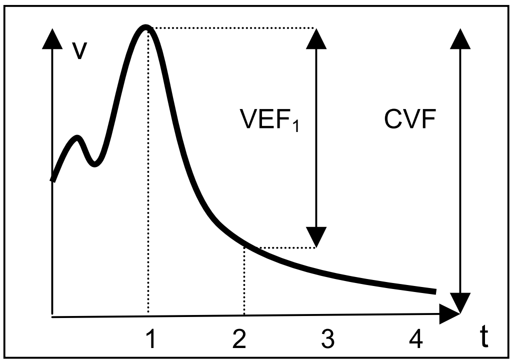
d) Programación (*Casio CFX-9850-G Plus y Álgebra FX-2.0 Plus):* Para poder programar utilizando un menú, debemos ingresar en una variable la cual es la elección del usuario, y luego confrontar esa variable con diversas posibilidades mediante los comandos *If, Then Goto, If End,* ubicado en el submenú *PRGM (se activa presionando SHIFT VARS)*. Además es necesario usar el comando *Lbl* (ubicado también en *PRGM*). La sintaxis es la siguiente:

```
If A=1↵
Then Goto 1↵
IfEnd↵
Lbl 1↵
```

Lo que hace esta sintaxis es preguntar que si la variable *A* es igual a *1*, entonces enviar al *nivel 1*, para luego ejecutar todo lo que este en el nivel 1 (*Lbl 1)*. Hay que tener en cuenta que al momento de escribir el programa se deben escribir seguidas todas las "preguntas" (el conjunto *If, Then Goto, If End,* dado que la calculadora "lee hacia abajo", es decir, si la variable no cumple con el requisito dado, pasa inmediatamente a la línea de abajo, buscando la condición válida. Pondremos siempre al final de cada nivel una orden para que vuelva al principio del programa, y para poder salir de él, basta con apretar la tecla *AC.* Con estos comandos estamos en condiciones de diseñar nuestro programa:

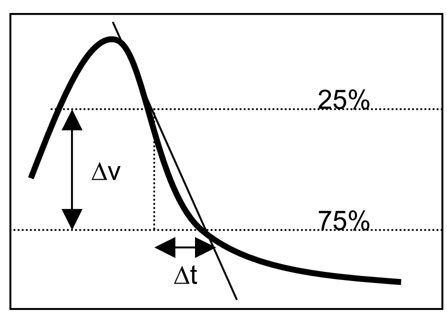
```
Lbl 0↵
"RADIO TUBO (M)"? →R↵
"VELOCIDAD MEDIA (M/S)"? →V↵
"DENSIDAD (KG/M^3)"? →D↵
"VISCOSIDAD (PASCAL/S)"? →U↵
"NRO. REINOLDS":(R×V×D)/U→T◢
If T≤2000↵
Then Goto 1↵
IfEnd↵
If T>2000↵
Then Goto 2↵
IfEnd↵
Lbl 1↵
"      FLUJO LAMINAR"◢
Goto 0↵
Lbl 2↵
"    FLUJO TURBULENTO"◢
Goto 0↵
```

2) Fisiología respiratoria y análisis matemático de la espirometría. El principal objetivo del sistema respiratorio es permitir el intercambio de gases, incorporando oxigeno y expulsando el exceso de dióxido de carbono, para ello funciona como un fuelle, el que genera diferencias de presión para permitir el flujo de aire desde el ambiente a los alvéolos, minúsculos sacos en el parénquima pulmonar donde se desarrolla el intercambio. Son los músculos respiratorios los encargados de permitir en última instancia del movimiento del aire. Debido a que es prácticamente imposible cuantificar el trabajo que desarrollan directamente estos músculos, se hace indirectamente, evaluando la cantidad de aire que se mueve, el tiempo en que lo hace y la velocidad que desarrolla.



Veamos un ejemplo de cómo podemos utilizar las matemáticas con fines diagnósticos para enfermedades respiratorias. Un instrumento bastante utilizado en respirología es el **espirómetro** el cual un sujeto inspira a su máxima capacidad y luego espira con la mayor potencia posible (espiración forzada máxima). Dos mediciones efectuadas son el VEF_1 que consiste en cuantificar el volumen espirado en el primer segundo, y aunque la espiración completa dura 5-6 segundos durante el primer segundo se espira alrededor del 80% de la capacidad vital forzada o CVF (cantidad total de aire que se puede inspirar en una inspiración forzada). La gráfica obtenida es la inmediatamente anterior. Esta medición simple otorga una valiosa información acerca de la fuerzas que permiten la salida del aire, así como las fuerzas que se oponen a la salida de éste (resistencia de las vías aéreas, y por lo tanto su calibre). El cálculo una vez con el registro es bastante sencillo, ¿qué pasos habría que realizar para desarrollar un programa que nos indique si el individuo se encuentra sano o no

1- Obtener los datos a partir del registro.
2- Ajustar una curva que responda de una manera adecuada a los datos (exponencial) se deben relacionar el tiempo y el volumen.
3- Obtener f (0)- f (1), para luego dividirlo por la capacidad vital forzada.
4- Compararlo con valores normales.



Del análisis espirométrico podemos obtener otras conclusiones acerca del estado de salud del individuo a analizar, el parámetro a estudiar en esta ocasión es el $FEF_{25\text{-}75}$ el cual se intersectan las funciones f(x)=25% y f(x)=75%(porcentaje con respecto a la CVF) ,luego se unen los puntos de intersección mediante una recta , finalmente obtenemos la pendiente de dicha recta en la forma siguiente

El valor de la pendiente nos indica la velocidad con que el paciente puede expulsar una cierta cantidad de aire, así pues mientras menor es la pendiente sugiere que existe baja elasticidad en el pulmón, o bien que la resistencia de la vías aéreas está aumentada, por ejemplo con la disminución del diámetro de dichas vías durante una reacción anafiláctica en los bronquios. Aquí se presenta un ejemplo bastante sencillo de cómo la pendiente de la recta nos otorga valiosa información acerca de un fenómeno fisiológico. Ahora nuestra tarea será desarrollar un análisis matemático, para luego relacionarlo con la situación real correspondiente, además de una posible interpretación patológica,

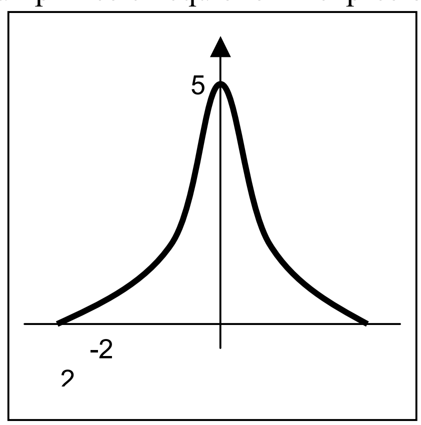
a) Describir el significado de los valores de la pendiente para distintos tiempos.
b) ¿Qué fenómeno puede causar una variación de la pendiente obtenida en el FEF_{25-75}?
c) ¿Como puede relacionar la variación de la pendiente, con el comportamiento de los músculos con relación a su tensión y longitud?

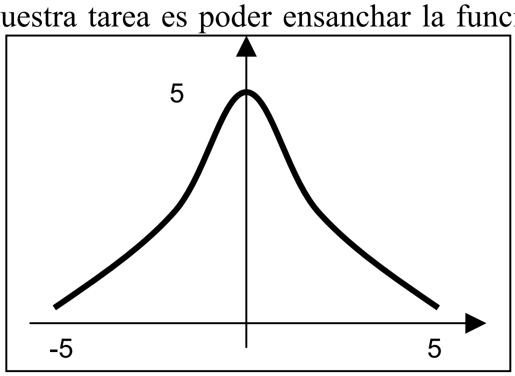
Solución

Una forma matemáticamente exacta de resolver la pregunta es obtener una tabla de datos los cuales, luego de una regresión, podríamos analizar obteniendo la derivada de la función obtenida, pero el desarrollo sería más largo de lo necesario, pues podemos comparar la gráfica obtenida con alguna función que conozcamos previamente y luego comparar los puntos. ¿Conoces alguna función de esta forma?. Por supuesto la respuesta la obtenemos de la campana de gauss, pero debemos hacer algunos reparos para que la curva se ajuste bien a nuestros datos, Primero es necesario conocer cual es el dominio y el recorrido de nuestra función modelo, calculémoslo (La campana de Gauss tiene la forma e^{-x^2})

$$e^{-x^2} = y$$
$$\ln e^{-x^2} = \ln y$$
$$-x^2 = \ln y$$
$$x^2 = \ln\left(\frac{1}{y}\right)$$
$$x = \sqrt{\ln\left(\frac{1}{y}\right)}$$

Por lo tanto la expresión $\ln\left(\frac{1}{y}\right)$>0,puesto que no existen raíces de números negativos (en los números reales), para cumplir este requisito la expresión *(1/y)* debe ser mayor que 1 ,puesto que los logaritmos entre 0 y 1 tienen un valor negativo, para lo cual f(x) solo puede tener lo valores entre 0 y 1, sin embargo el valor 0 está prohibido para f(x) por ser el denominador de la fracción, por lo tanto el recorrido (o codominio) será]0,1].No existe ninguna restricción para x por lo que el recorrido son todos los reales. En nuestro caso el recorrido es de 0 a 5 (en litros), la conversión es fácil solo tenemos que multiplicar por 5 la función que define a la campana de Gauss, , en la realidad la espiración finaliza a los 5 segundos mientras, que como acabamos de calcular, el recorrido son todos los reales, un análisis gráfico nos muestra lo siguiente. A pesar que el recorrido son todos los reales la visualización de la gráfica nos muestra que para valores cercanos a 2 por la derecha y a –2 por la izquierda la función se hace prácticamente 0, nuestra tarea es poder ensanchar la función, para lo debemos logra que a un determinado valor de x le corresponda una imagen mayor a la que le corresponde a la función original, esto lo logramos multiplicando x por un factor entre 0 y 1 ,pues así logramos que 1/e se elevado por un número menor obteniendo por consiguiente un valor mayor ¿puede explucar por que razón se utilizó un factor que multiplicara a x y no, por ejemplo, un valor que sume o reste a A?. Algo similar veremos que ocurre al ajustar un modelo para le hemoglobina. El factor más adecuado





para responder a los valores reales es 0,2. Por lo tanto la función obtenida es : $5e^{-0,2x^2}$ que corresponde a la gráfica siguiente:

```
"FACTOR DE CORRECCION"?→A↲
"CAPACIDAD VITAL
FORZADA"?→B↲
CLrGraph↲
ViewWindow 0,B,1,0,B,1↲
Y=Type↲
"Be(-Ax1.4xX) "→Y1↲
```

Así la grafica obtenida resulta muy adecuada puesto que para los valores positivos de x el proceso será espiratorio, para los valores negativos será inspiratorio. Es importante recalcar que este modelo fundamentalmente describirá valores de x positivos puesto que corresponde a la medición de volúmenes espiratorios (expiración forzada). ¿Es posible desarrollar un mejor modelo?, la respuesta es si, sin embargo éste no podrá incluir parte del proceso inspiratorio. Este modelo lo incluiremos en el siguiente programa el cual introduciendo ciertas variables podremos emular posibles registros espirométricos en forma gráfica, en la cual obtendremos los valores del VEF_1 FEF ,estos serán comparados con el intervalo de valores reales , para luego obtener una conclusión , el programa es el siguiente:

En esta primera parte del programa introducimos las variable, el factor de corrección es un valor que va a determinar que tan abrupta es la caída de la curva , la capacidad vital forzada, como ya comentamos será el volumen total que expulse el individuo en una espiración máxima, si el factor de corrección es 1 y la capacidad vital es 5 la curva graficada es la curva normal, esto puede pareces extraño, pues existe mucha variación en la edad, talla, peso, etc. Entre los distintos individuos como para estimar que existe solo una curva de normalidad, esto es verdad, pero hemos hecho el programa simple para que sea fácilmente comprensible, sin embargo, es posible complejizarlo más introduciendo las variable como edad, talla o peso, ¿puedes hacerlo?. Ahora continuemos con nuestro programa.

```
"VOLUMEN ESPIRATORIO FORZADO 1":((Be(-axi.4x0))-(Be(-Ax1.4x1)))→C◢
"PORCENTAJE VEF1/CVF":C/BX100→D◢
"FRACCIÓN ESPIRATORIA FORZADA":(Be(ln0.75)-Be(ln0.25)◢
```

En esta sección obtenemos resultados, para calcular el volumen espiratorio forzado Se busca el valor de la función para x =0 y x =1 enseguida obtener la diferencia, así obtendremos el volumen de aire que se espira en el primer segundo. El porcentaje de VEF 1/CVF(capacidad vital forzada) significa que parte de todo el aire espirado forzadamente se expulsa en el primer segundo, será importante para determinar que clase de patología, en el caso de existir, tiene el individuo en estudio. La fracción espiratoria forzada corresponde, como ya se comento, a la pendiente de la recta que se traza al unir los puntos (f(25%),25%) y (f(75%),75%) donde el porcentaje es en relación a la capacidad vital forzada, esta medición descarta el primer 25% del proceso, ya que este depende de contracción voluntaria de los músculos ventilatorios, y el último 25% del proceso que dependerá de cuanto tiempo sostenga la respiración el sujeto, el análisis se concentra en el 50% central donde las propiedades elásticas del pulmón del pulmón son predominantes.

```
If C<3 And  D<73↲
Then"LIMITACION DEL FLUJO AEREO"↲
Else Goto 1↲
Lb 1 ↲
If C<3 And D>73↲
Then"REDUCCION DEL VOLUMEN CON FLUJO NORMAL"↲
```

Conclusiones. Se estima como límite inferior de normalidad un valor de 3 litros en el VEF1 y un porcentaje VEF1/CVF de 73%. Puede parecer extraño que cuando no se cumplen las dos condiciones dadas determinemos al sujeto como normal, pero esto se explica por que biológicamente son posible solo algunos valores, de cuales determinan (en la mayoría de los casos, pues las excepciones siempre existen) un individuo sano.

Bibliografía

Riera, G. y Preiss R. (2003). *Modelos del Cálculo para las Ciencias Médicas.* En prensa**,** Editorial P. U. C. de Chile.

BUSCANDO QUE LOS ESTUDIANTES CONSTRUYAN DEMOSTRACIONES

Alejandra Pollio y Berenice Verdier
St. Catherine´s School de Montevideo, Uruguay
apole@adinet.com.uy; bereniceverdier@hotmail.com

Resumen

El rol del aprendizaje significativo mediante la utilización de nuevas estrategias de enseñanza. Este aprendizaje involucra un proceso en el que lo que aprendemos es el producto de la información nueva, interpretada a la luz de lo que ya sabemos. Para que haya aprendizaje significativo, es necesario que el alumno pueda relacionar el material de aprendizaje con la estructura de conocimientos de que ya dispone. De esta forma, junto con la motivación favorable para la comprensión, y, los esfuerzos que requiere, una condición esencial del aprendizaje de conceptos será que estos se relacionen con los conocimientos previos de los alumnos. El nuevo conocimiento, que queremos que el alumno aprenda en esta oportunidad, surgirá de un adecuado desarrollo del razonamiento deductivo y manejo de los conocimientos previos. Entendiendo por razonamiento deductivo al proceso de razonamiento en que, para obtener una conclusión lógicamente necesaria a partir de ciertas premisas, los pasos están encadenados siguiendo ciertas reglas lógicas y son justificados rigurosamente. Las justificaciones están basadas en los axiomas y definiciones de la teoría respectiva, en teoremas demostrados con anterioridad y en las premisas o hipótesis del problema o teorema. El docente debe ayudar al estudiante a desarrollar y usar el poder del razonamiento deductivo comprometiéndolo permanentemente a pensar, analizar y deducir conjeturas en clase, además debe crear y seleccionar tareas apropiadas que puedan involucrar la generalización, la organización de datos para validar o refutar una conjetura. Un grupo de bachillerato del último año desarrolló la demostración de un teorema de convergencia de series, con los resultados de un 46% que la realizó exitosamente, versus un 36% que no lo logró. Los alumnos que lograron hacer la demostración, no eran los más estudiosos pero tenían una buena capacidad de razonamiento. En cambio los que generalmente preparan las evaluaciones y que se apoyan mucho en la memoria, no lograron un buen desempeño.

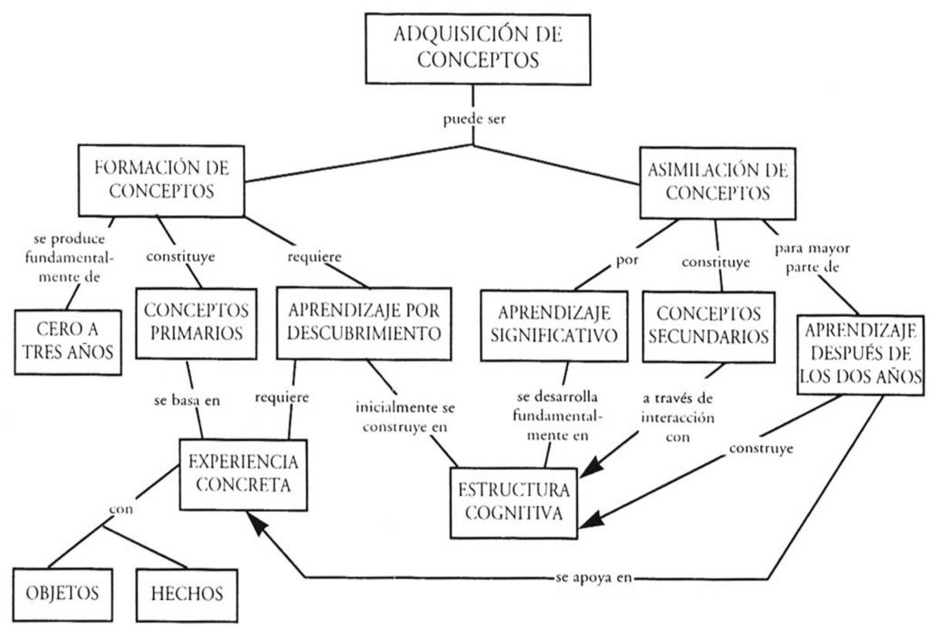
Introducción

En la enseñanza de conceptos hay que trabajar con estrategias que eviten que nuestros alumnos se limiten a aprender información carente de significado para ellos, superando así un aprendizaje exclusivamente memorístico. Con este objetivo y buscando que desarrollen su capacidad de comprender de modo significativo es que propusimos la tarea que comunicamos en este trabajo. La experiencia de aula que se presenta buscaba evaluar la comprensión de un conjunto de proposiciones. La tarea consistía en ordenar estas proposiciones según una secuencia lógica de modo que construyeran la demostración de un teorema. El marco teórico que sustenta nuestra propuesta es el del aprendizaje significativo. El que cada alumno tuviera que ordenar las proposiciones en forma individual implicaba que en primera instancia debía analizar y comprender lo que cada proposición involucraba, en segunda instancia debía de conectarlas entre sí. Esta actividad permitiría a cada alumno dotar de significado a cada proposición y al todo.

Marco teórico

Nuestra propuesta se apoya en el aprendizaje significativo. Pretendemos capacitar a los estudiantes para hacerse cargo de su propia construcción de significados. De acuerdo a Novack (1998): Construir significados implica pensar, sentir y actuar, aspectos, todos ellos, que hay que integrar para conseguir un aprendizaje significativo diferente y, sobre todo para crear nuevo conocimiento". El aprendizaje significativo tiene lugar cuando el aprendiz elige relacionar la nueva información con las ideas que ya conoce.

Partiendo de la base que los seres humanos piensan, sienten y actúan; en todas sus experiencias intervienen el pensamiento, el sentimiento y la acción. El significado de un hecho u objeto depende de lo que ya sabemos sobre él y está en función de cómo ha experimentado la combinación del pensamiento, el sentimiento y la acción a lo largo de sus experiencias en la vida.
El aprendizaje significativo involucra un proceso en el que lo que aprendemos es el producto de la información nueva, interpretada a la luz de lo que ya sabemos.
La enseñanza de conceptos solo podrá ser eficaz si se parte de los conocimientos previos de los alumnos logrando activarlos y conectarlos adecuadamente con el material de aprendizaje.
Para que haya aprendizaje significativo es necesario que el alumno pueda relacionar el material de aprendizaje con la estructura de conocimientos de que ya dispone. De esta forma, junto con la motivación favorable par la comprensión y los esfuerzos que requiere, una condición esencial del aprendizaje de conceptos será que estos se relacionen con los conocimientos previos de los alumnos.
El significado que adquirimos de un concepto se forma a partir de un conjunto de preposiciones que sabemos que lo contienen. El aprendizaje de un concepto se produce por dos vías: la formación del concepto y la asimilación del concepto. En el esquema siguiente (Novack,1998:65) se presenta el desarrollo de cada una de estas vías.



Las dos formas de adquisición de conceptos y su relación con la experiencia y la estructura cognitiva.

El nuevo conocimiento, que queremos que el alumno aprenda en esta oportunidad, surgirá de un adecuado desarrollo del razonamiento deductivo y manejo de los conocimientos previos. Entendiendo por Razonamiento deductivo al proceso de razonamiento en que, para obtener una conclusión lógicamente necesaria a partir de ciertas premisas, los pasos están encadenados siguiendo ciertas reglas lógicas y son justificados rigurosamente. Las justificaciones están basadas en los axiomas y definiciones de la teoría respectiva, en teoremas demostrados con anterioridad y en las premisas o hipótesis del problema o teorema (Hardmeyer, 2000).

El docente debe ayudar al estudiante a desarrollar y usar el poder del razonamiento deductivo comprometiéndolo permanentemente a pensar, analizar y deducir conjeturas en clase.

El docente debe crear y seleccionar tareas apropiadas que puedan involucrar la generalización, la organización de datos para validar o refutar una conjetura.

La principal condición que debe cumplir un material de aprendizaje para que pueda ser comprendido es que tenga una organización conceptual interna: cada parte debe de tener una conexión lógica o conceptual con el resto de las partes. Además de requerir que el material que estudia el alumno tenga una estructura conceptual conviene que la terminología y el vocabulario empleado no sean excesivamente novedosos ni difíciles para el alumno. Además del problema conceptual, dificultad para atribuir significados a términos conocidos, nos encontraríamos con un problema terminológico o de vocabulario. Los alumnos deben ir adquiriendo un cierto vocabulario específico de las materias, pero este aprendizaje ha de ser progresivo, evitando que se introduzcan en un mismo material muchos términos nuevos, ya que así sería más difícil que el alumno estableciera relaciones significativas entre ellos y, por tanto, impediría su comprensión. Pero la dificultad terminológica no es una cualidad del texto por sí sola, sino que también depende del alumno al cual va dirigido el material.

Si el material que presentamos tiene una estructura lógica interna y un vocabulario adecuado pero no ayuda a activar un conocimiento previo: es decir que le permita relacionar el material con la estructura de conocimiento que ya dispone, decimos que no estará en condiciones de comprenderlo.

La actividad

La actividad fue aplicada a un grupo del último año del Bachillerato, Opción Ingeniería como una parte de la evaluación del tema "Series".

El objetivo de la actividad era que los estudiantes construyeran la demostración del teorema: $\sum |a_n|$ ***Converge*** $\Rightarrow \sum a_n$ ***Converge***

Los conocimientos previos de lo alumnos eran la definición y propiedades de valor absoluto, definición de Serie Convergente, la condición necesaria y suficiente de Cauchy para que una serie converja. En clase se habían trabajado criterios para clasificar serie de términos no negativos.

La tarea que el alumno debía llevar a cabo era elaborar una secuencia lógica que lo condujera a la demostración del teorema antes mencionado, reconociendo y partiendo de la Hipótesis para reconocer y llegar a la Tesis. El material que se les entregó a cada estudiante, consistió en un sobre conteniendo un conjunto de tarjetas en las que en algunas de ellas se había escrito una proposición , en otras solo ($\Rightarrow$) y otras estaban en blanco . Los dos últimos grupos de tarjetas se pusieron para conectar las proposiciones y justificar usando los conocimientos previos cada conexión.

La propuesta era la siguiente :

Ordene según una secuencia lógica las fichas del sobre numerándolas en extremo inferior izquierdo. Indique en la ficha correspondiente la Hipótesis y la Tesis del teorema demostrado

Se adjunta el conjunto de fichas

$\sum \lvert a_n \rvert$ Converge	$\lvert a_{n+1}\rvert + \lvert a_{n+2}\rvert + \ldots\ldots + \lvert a_{n+p}\rvert < \varepsilon$
$\Rightarrow$	Por ....
$\varepsilon > 0.\ n_0 /\ n > n_0$ es $\lvert S_{n+p} - S_n \rvert < \varepsilon$	$\lvert a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots\ldots + a_{n+p} \rvert \le \lvert a_{n+1}\rvert + \lvert a_{n+2}\rvert + \ldots\ldots + \lvert a_{n+p}\rvert$
$\lvert S_{n+p} - S_n \rvert = \lvert\, \lvert a_{n+1}\rvert + \lvert a_{n+2}\rvert + \ldots\ldots + \lvert a_{n+p}\rvert \,\rvert$	De .... se deduce $\lvert a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots\ldots + a_{n+p} \rvert < \varepsilon$
$\Rightarrow$	$\Rightarrow$
$\lvert\, \lvert a_{n+1}\rvert + \lvert a_{n+2}\rvert + \ldots\ldots + \lvert a_{n+p}\rvert \,\rvert < \varepsilon$	$\sum a_n$ Convergente
$\Rightarrow$	Hipótesis: Tesis:

Los resultados

Adjuntamos el diagrama que resumen el desempeño de los estudiantes en dicha actividad. Una observación a destacar es que muchos de aquellos alumnos lograron hacer la demostración no eran los mas estudiosos pero tenían una buena capacidad de razonamiento. En cambio los que generalmente preparan las evaluaciones, pero que se apoyan mucho en la memoria, no lograron un buen desempeño.

Bibliografía

Novak, Joseph, (1998) *Conocimiento y aprendizaje. Los mapas conceptual como herramienta facilitadora para escuelas y empresas*, Madrid, Alianza Editorial

Pozo, Juan Ignacio (1992) El Aprendizaje y la Enseñanza de hechos y conceptos en *Los contenidos en la Reforma. Enseñanza y Aprendizaje de Conceptos, Procedimientos y Actitudes* (pp 19 – 79) Buenos Aires, AULA XXI Santillana

González Guajardo,Hernán (1999) *El Implicano. Un medio para apoyar el descubrimiento guiado deductivo* Ponencia presentada en X CIAEM, Maldonado, Uruguay

Hardmeyer, Renate Laudien (2000) *Comprensión de la implicación.* Ponencia presentada en V Reunión de Didáctica Matemática del Cono Sur. Santiago de Chile, Chile

DESARROLLO DEL PENSAMIENTO ESTOCASTICO

Eddy Herrera Daza
Pontificia Universidad Javeriana. Colombia.
. eherrera@javeriana.edu.co

Resumen:
En este trabajo se presenta un recorrido rápido de la evolución del pensamiento estocástico a través del desarrollo de las matemáticas y la física principalmente, posteriormente se analizan algunas de las investigaciones sobre razonamiento estocástico, la de los psicólogos preocupados principalmente por observar y describir lo que pasa cuando un sujeto se enfrenta a razonamientos inferenciales, para estudiar así la estructura de pensamiento ligada a éste tipo de razonamiento y el punto de vista de los matemáticos y estadísticos, que mayoritariamente persiguen modificar las concepciones sobre probabilidad y estadística. Finalmente se plantean algunas sugerencias para propiciar un pensamiento estocástico en los estudiantes, producto de las dificultades encontradas en los cursos de probabilidad, para estudiantes de las Ingeniería

El Desarrollo en la Matemática

Los conceptos de azar e incertidumbre son tan viejos como la civilización misma. Aproximadamente por el año 3500 a.c, los juegos de azar eran practicados con objetos de hueso, considerados como los precursores de los dados y fueron ampliamente desarrollados en Egipto y otros lugares. Así la estadística descriptiva tiene su origen mil o dos mil de años antes de Cristo, en Egipto, China y Mesopotamia, donde se hacían censos para la administración de los imperios. Los egipcios tuvieron el barómetro económico más antiguo: un instrumento llamado "nilometro", que medía el caudal del Nilo y servia para definir un índice de fertilidad, a partir del cual se fijaba el monto de los impuestos. En las ideas de Aristóteles (384-322 AC) se encuentran tres tipos de nociones de probabilidad, que definen más bien actitudes frente al azar y la fortuna, que siguen vigentes hoy en día: (1) el azar no existe y refleja nuestra ignorancia; (2) el azar proviene de causas múltiples y (3) el azar es divino y sobrenatural. Sin embargo, pasó mucho tiempo antes de que alguien intentara cuantificar el azar y sus efectos. En la sociedad francesa, el juego era uno de los entretenimientos más frecuentes. Los juegos cada vez más complicados y las apuestas muy elevadas hicieron sentir la necesidad de calcular las probabilidades de los juegos de manera racional. El caballero de Méré, planteó algunas preguntas que permitieron, en particular, iniciar una discusión entre Blaise Pascal y Pierre Fermat (1601-1665) y así el desarrollo de la teoría de las probabilidades. El caballero De Méré, que jugaba con frecuencia, había acumulado muchas observaciones en diversos juegos y constató una cierta regularidad en los resultados. Esta regularidad, a pesar de tener como base un hecho empírico, permitió relacionar la frecuencia relativa de la ocurrencia de un suceso y su probabilidad. Las reglas de cálculo desarrolladas hasta entonces para los juegos de azar vieron sus aplicaciones en otras disciplinas. Los censos demográficos, que se hacían desde la antigüedad, requieren recolectar muchos datos. Si bien la extensión de los juegos de azar a la demografía o a la matemática actuarial fue extremadamente importante, su planteamiento tiene grandes limitaciones debido a que considera todos los resultados posibles simétricos. Durante los siglos XVIII y XIX la estadística se expandió sin interrupción mientras la teoría de las probabilidades no mostró progreso. Una de las aplicaciones importante fue desarrollada al mismo tiempo por Gauss (1777-1855), Legendre (1752-1833) y Laplace: el análisis numérico de los errores de mediciones en física y astronomía. Aparte de la demografía y la matemática actuarial, otras disciplinas introdujeron la teoría de las probabilidades.

La estadística se empezó a usar de una manera u otra en todas las disciplinas, a pesar de un estancamiento de la teoría de las probabilidades. Para concluir, si bien la historia de la estadística no se puede separar de la historia del cálculo de las probabilidades, la estadística no puede considerarse como una simple aplicación del cálculo de las probabilidades. El cálculo de las probabilidades es una teoría matemática y la estadística es una ciencia aplicada donde hay que dar un contenido concreto a la noción de probabilidad.

El desarrollo en la Física

A lo largo de la historia la Física se ha enfrentado a la dificultad de explicar los procesos físicos naturales, un ejemplo de esto es el caso de Maxwell, que dio forma definitiva a las ecuaciones de los campos electromagnéticos y que son un claro exponente de determinismo. Si embargo, Maxwell fue el primero en afirmar que el segundo principio de la termodinámica es de naturaleza estadística y con esto lo llevó a afirmar “ la verdadera lógica de este mundo es el cálculo de probabilidades”
En general, el comportamiento no determinista de los sistemas se debe a su naturaleza no lineal de las leyes que lo controlan, como por ejemplo las ecuaciones de la dinámica de fluidos conocidas con el nombre de Navier-Stokes ya que basta observar un torrente para apreciar el movimiento imprevisible de las moléculas. Lo verdaderamente significativo, es que a pesar de las evidencias en algunos fenómenos la ciencia ha seguido principios de causalidad y determinismo como principio fundamental y de esta manera el no determinismo de los procesos naturales ha quedado oculto a la ciencia.
A mediados del siglo XIX, Boltzmann, estableció las bases teóricas de la física estadística. Para ello definió el concepto de probabilidad termodinámica, en el que por primera vez, se describe un sistema por la probabilidad de encontrarse en un determinado estado en cada instante, en contraposición con el concepto clásico, en la que se define de forma determinística. Con el nacimiento de este siglo, Planck realizó un postulado cuántico, que supone que la energía total radiada por los osciladores está formada por elementos finitos. esto choca frontalmente con el concepto de procesos deterministas.
Sin embargo a medida que la teoría cuántica avanzó, el hecho estocástico se fue haciendo más patente, lo que conduce a un cambio de mentalidad. Un ejemplo de este cambio fue Einstein determinista profundo

La perspectiva psicológica sobre el razonamiento estocástico
Los investigadores en sicología del desarrollo, educativa y cognitiva han estado interesados por el razonamiento estocástico y en cómo se desarrolla y algunos psicólogos notables (e.g., Piaget y Inhelder, 1951;Fischbein, 1975; Kahneman, Slovicy Tversky, 1982) continúan proporcionando una base importante a la investigación en este campo. Sin embargo Lecoutre muestra que las concepciones erróneas sobre la probabilidad, han inducido respuestas estereotípicas en las personas y han reflejado más el conocimiento teórico de los sujetos sobre la probabilidad que sus opiniones o sus formas de razonar. En consecuencia, estos retractores sugieren que se debería estudiar el origen de las concepciones estadísticas erróneas con mayor profundidad. En consecuencia un objetivo primario de cualquier investigación en educación estadística sería proporcionar una descripción analítica de los procesos cognitivos subyacentes en estas concepciones erróneas con el fin de encontrar si hay alguna coherencia interna en los juicios y razonamientos espontáneos.

La Intuición del Azar

El primer paso para comenzar a estudiar el pensamiento estocástico y el desarrollo de un tipo de pensamiento diferente en nuestros estudiantes al determinístico, desarrollado en los curso de Cálculo, es asegurarnos que nuestros estudiantes sean capaces de diferenciar las situaciones aleatorias, de las determinísticas, es decir que puedan distinguir algunas de las características básicas de la aleatoriedad. Una característica particular de los experimentos aleatorios es su carácter irreversible, destacado ya desde los trabajos de Piaget e Inhelder (1951), para quienes la aleatoriedad se produce por la interferencia de una serie de cadenas causales actuando independientemente, que llevan a un resultado impredecible. Una vez producido un resultado aleatorio, no es posible volver al estado inicial con seguridad. Por lo tanto hasta que no se comprenda la idea de causa y se realice un razonamiento combinatorio, para poder concebir las distintas posibilidades existentes en estas situaciones, no se tendrá un marco de referencia para identificar los fenómenos aleatorios.

Con la adquisición de esquemas operacionales espacio –tiempo y lógico-matemático, el niño ya comienza a distinguir entre lo aleatorio y determinístico ya que comienza a comprender la interacción de cadenas causales que conducen a sucesos impredecibles y la irreversibilidad de los fenómenos aleatorios. La idea de Probabilidad surge solo cuando se comprende que mediante un razonamiento combinatorio se pueden determinar el conjunto de posibilidades asociadas a un fenómeno aleatorio. Por lo tanto para Piaget la idea de aleatorio y de probabilidad, no son totalmente adquiridas hasta que se desarrolle el razonamiento combinatorio, en la etapa de la operaciones formales.

Empleo de Heurísticas

El término heurística puede definirse como un proceso cognitivo que se utiliza para reducir la complejidad de un problema durante el proceso de resolución. Las investigaciones de los psicólogos Daniel Kahneman y Amos Tverskey indican que los sujetos emplean un número limitado de heurísticas parea realizar inferencias inductivas, esto contribuye a un cambio en la forma de concebir el razonamiento no determinístico. Kahneman (1982) define tres tipos de heurísticas atendiendo al proceso cognitivo empleado: representatividad, disponibilidad y ajuste y anclaje.

La heurística de la representatividad consiste en calcular la probabilidad de un suceso sobre la base de la representatividad del mismo respecto a la población de la que proviene. Esta heurística aparece asociada a la creencia de que una muestra debería reflejar la distribución de la población de la que se obtiene, sin embargo esta heurística no tiene en cuenta el tamaño de la muestra en el momento de realizar las inferencias inductivas. La Heurística de la disponibilidad, se usa al juzgar la frecuencia de una muestra.

Las heurísticas estadísticas se consideran reglas generales, intuitivas, y procesos inferenciales. No obstante las personas no aplican siempre mecanismos de pensamiento estadístico, ya sea por:

- La claridad en la construcción del espacio muestral
- Reconocimiento del papel del azar en una situación particular.
- Prescripciones culturales para razonar estadísticamente sobre eventos de un determinado tipo.

PROPUESTA DE APRENDIZAJE

Dentro de la perspectiva del aprendizaje activo, las mejores situaciones son aquellas donde los sujetos son llevados a construir por sí mismo las representaciones adecuadas. Tal construcción activa parece ser un factor de estabilización de dichas representaciones. Esto concuerda con el marco de muchos programas de investigaciones recientes en educación estadística, en los que se enfatiza que es importante que los estudiantes construir su propio conocimiento y desarrollar conceptos probabilísticos y estadísticos a través del uso del aprendizaje activo. Este enfoque parece tener implicaciones didácticas significativas para la enseñanza de conceptos estadísticos. Dentro de este enfoque se debe tener en cuenta lasa áreas donde podemos propiciar un pensamiento estadístico en los estudiantes universitarios

Investigación empírica

En la investigación empírica, los procesos de pensamiento estadístico son operacionalizados cuando se plantean problemas durante la definición de un problema y el estudio del diseño y cuando los datos se recogen y analizan para hacer un juicio informado sobre una situación. Esta área está ya siendo investigada (e.g., Hancock et al., 1992; Konoldet al., 1997, Ben-Zvi y Friedlander, 1997) quizás porque los proyectos usando la estadística son ahora relativamente comunes en los planes de estudio actual. Sin embargo, se necesita mucha más investigación sobre:

- cómo hacer que los estudiantes desarrollen una forma de pensamiento estadístico durante la investigación empírica
- Los modos particulares de pensamiento hacia los cuales debiera enfocarse la atención de los estudiantes mientras conducen una investigación.
- Los tipos de preguntas que los estudiantes debieran investigar para promover el desarrollo del pensamiento estadístico.

Evaluación de investigaciones

La segunda área en la que opera el pensamiento estadístico es cuando una investigación empírica se describe en un artículo de investigación, en los medios de difusión, en un informe de recomendación para una compañía, etc. Esta área requiere diferentes tipos de procesos de pensamiento estadístico, no sólo sobre cómo leer el informe, sino también sobre cómo reaccionar a lo que está presente y no está presente en el informe. La interpretación y juicio de los informes estadísticamente fundamentados debería ser mirados como una prioridad para la investigación. Y encontrar métodos efectivos de enseñanza para la lectura y juicio de informes estadísticamente fundamentados

La vida cotidiana

La tercera área en que se requiere el pensamiento estadístico es en la vida cotidiana, donde la información que no se recoge formalmente como dato se usa para operar y comprender el propio medio, para comprender las propias reacciones y racionalizar los sucesos. De acuerdo con Snee (1999, p. 257): “podemos usar el pensamiento estadístico sin datos".

Conclusión

Las situaciones de tipo aleatorio tienen una fuerte presencia en nuestro entorno. Si queremos que un estudiante valore el papel de la probabilidad y la estadística, es importante que los ejemplos y aplicaciones que mostramos en la clase hagan ver de la forma más amplia posible esta fenomenología

La estadística y la educación estadística son disciplinas nuevas, que necesitan nuevas formas de conceptualizar el método intelectual y el razonamiento de la disciplina estadística y que deben evolucionar con la investigación en educación estadística que busca comprender el pensamiento, aprendizaje y enseñanza de la estadística. Plantear las tres áreas de investigación sobre investigación empírica, evaluación de la investigación y vida cotidiana promovería el desarrollo del pensamiento estadístico. conceptos teóricos y métodos.

La interdisciplinariedad es también visible al enseñar estadística bajo la perspectiva del análisis exploratorio de datos. En este enfoque, los estudiantes pueden llegar a trabajar en tareas y proyectos en los que necesitan planear un problema y recoger datos. Estos proyectos podrían surgir desde otras disciplinas como biología, geografía o ciencias sociales.Si queremos que un estudiante valore el papel de la probabilidad y la estadística, es importante que los ejemplos y aplicaciones que mostramos en la clase hagan ver de la forma más amplia la importancia y su carácter intersisciplinario

DISCUSIÓN

Das siguientes temas podrían considerarse para estudios posteriores:

- ¿ Qué modelos psicopedagógicos pueden ayudarnos a comprender el desarrollo de razonamiento estocástico y como se pueden usar estos modelos para facilitar su desarrollo?.
- ¿ Qué teorías de enseñanza y aprendizaje nos pueden ayudar a comprender y a explicar la enseñanza de la estadística?.
- ¿ Cuáles son las metas de desarrollo de los estudiantes de estos tipos de procesos cognitivos y cómo evaluarlos?

Bibliografía

Ausubel, D. P., Novak, J. D. y Hanesian, H. (1983). *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo*. México: Trillas.

Batanero, C. y Serrano, L.(1995). Aleatoriedad, sus significados e implicaciones educativas. *UNO*, 5, 15-28.

Batanero, C. (1998). Recursos para la educación estadística en Internet. *UNO,* 15,13-25.

Cañizares, M. J. (1997). *Influencia del razonamiento proporcional y combinatorio y de creencias subjetivas en las intuiciones probabilísticas primarias.*

ESTRATEGIAS DE ENSEÑANZA PARA LA FUNCION CUADRÁTICA

Rey Genicio, María ; Lazarte, Graciela ; Forcinito, Silvia ; Hernández, Clarisa
Facultad de Ingeniería- Universidad Nacional de Jujuy- Argentina
tresm@imagine.com.ar

Resumen

Intentar cambios en los modelos tradicionales de la enseñanza, en este caso específico en la enseñanza de la matemática, es una tarea compleja. Si estamos dispuestos a construir una didáctica transformadora de tradiciones pedagógicas rutinarias, necesariamente hay que tener en cuenta que el docente debe reflexionar sobre sus prácticas, interiorizarse sobre los resultados de las nuevas investigaciones educativas, analizar y debatir sus resultados, cotejar lo viejo y lo nuevo para hacer las rupturas necesarias y obtener nuevas conclusiones, rescatando lo positivo de cada una de ellas. Pero este es un camino que no es fácil de andar, por eso se justifica crear modalidades que nos posibiliten *acompañarnos,* como es la intención de este taller.

Este taller está dirigido al docente de matemática que cotidianamente está en la búsqueda de actividades y estrategias nuevas, o bien diferentes, para que los alumnos se sitúen frente a los problemas de la matemática, pongan en juego sus estrategias personales y discutan, analicen, comparen, etc, actividades mentales que los ayudarán a construir nuevos conceptos, aprehenderlos, y finalmente aplicarlos

El taller comienza con la presentación de un problema que se complejiza a través de la variable didáctica, con el objetivo de construir el concepto de Función Cuadrática, continuará con el análisis comparativo de distintas estrategias para el estudio de las transformaciones (traslación, compresión, estiramiento) de la parábola y finalizará con una secuencia de actividades, debidamente graduadas, que apuntan a la resolución de la ecuación de segundo grado. Todas estas instancias están acompañadas por el debate y la reflexión crítica de las mismas.

Objetivos

En el desarrollo del taller se espera que las y los participantes

a. Analicen estrategias innovadoras elaboradas para la enseñanza de función cuadrática y ecuación cuadrática, en el marco de una "Ingeniería didáctica"
b. Analicen críticamente las prácticas docentes habituales mediante la reflexión y el debate constructivo

Al finalizar el taller se espera que, las y los participantes

a. Tomen contacto con una " Ingeniería Didáctica" para la construcción de un concepto matemático por parte de los alumnos.
b. Consideren la necesidad de superar las metodologías rutinarias tradicionales
c. Adquieran conceptos básicos sobre "Ingeniería Didáctica" y sobre "La Dialéctica instrumento-objeto".

El taller contribuye a procesos más generales, como favorecer un cambio positivo sobre la forma de enseñar matemática con respecto a las viejas metodologías.

Metodología de trabajo

Se utilizan estrategias participativas a nivel áulico, derivadas de la concepción del trabajo grupal como una forma de resolver problemas. Además Se fomentará también en distintos momentos, el trabajo individual, con el propósito de provocar procesos inferenciales, donde los participantes experimenten que el “HACER” es una tarea intelectual personal.

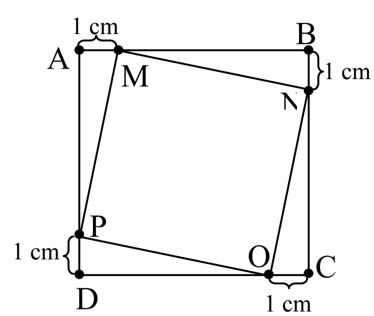
Los temas

1. Propuesta didáctica para la construcción del concepto de función cuadrática

2. Actividades propuestas para el análisis grafico de la función. Distintas estrategias para el estudio de las transformaciones de traslación, compresión, estiramiento de la parábola
3. Análisis de los logros y dificultades de la puesta en marcha del ensayo áulico.
4. Propuesta didáctica para la construcción del concepto de ecuación cuadrática.
5. Fundamentos básicos de la "Ingeniería didáctica". La "Dialéctica Instrumento-objeto. Juego de marcos" de Regine Douady

Las actividades

1. Lea en forma individual las actividades propuestas en el "Trabajo práctico Nº 1"
2. En forma grupal, realicen un análisis didáctico del "Trabajo práctico Nº 1" (las siguientes consignas pueden orientar la tarea, respondan primero las que le resulten más sencillas, las que no les sean accesibles serán tratadas en la puesta en común por algún otro grupo o, en su defecto, por el equipo coordinador)
   a) *Anticipen los procedimientos que podrían realizar los alumnos para resolver la secuencia de problemas, incluyendo los erróneos y los acertados.*
   b) *Enuncien, para cada uno de los procedimientos, los conocimientos previos que los alumnos deben poseer para resolver la secuencia de problemas.*
   c) *Identifiquen él o los conocimientos a los que apunta la secuencia de problemas.*
   d) *¿En qué marcos aparece el concepto?*
   e) *Analice la variable didáctica puesta en juego.*
   f) *¿En qué curso aplicarían la propuesta? ¿Cómo organizarían el grupo de alumnos? ¿Cómo sería la gestión de la clase? ¿Qué podría hacer peligrar la propuesta y qué acciones permitirían superar el inconveniente? ¿Cuál sería la intervención del docente? ¿Cómo se realizarían las validaciones de las actividades desarrolladas por los alumnos?.*
3. Puesta en común de la actividad anterior.
4. Lea en forma individual el texto: "Función polinómica de segundo grado" tomado del libro de matemática para 4º año del Bachillerato escrito por Nelly Vásquez de Tapia, Alicia Tapia de Bibiloni y Carlos Alberto Tapia.
5. Lea en forma individual el "Trabajo práctico Nº 2".
6. Realicen en forma grupal un análisis comparativo de las dos propuestas anteriores.; para ello puede tener en cuenta: el rol del alumno; el rol del docente; rol del problema; teoría de aprendizaje involucrada, modelo didáctico; conocimientos previos requeridos, recursos didácticos necesarios, otros...
7. Puesta en común de la actividad anterior.
8. Lea en forma individual las actividades propuestas en el "Trabajo práctico Nº 3"
9. Realicen en forma grupal el análisis didáctico del "Trabajo práctico Nº 3".
10. Puesta en común de la actividad anterior.
11. Consideraciones generales de la propuesta a cargo de los coordinadores del taller.



TRABAJO PRÁCTICO Nº 1

Situación 1

1 – Dado el cuadrado ABCD de 10 cm de lado y cuatro puntos M, N, O y P ubicados según los datos del gráfico; encontrar el área del cuadrado MNOP.
2 – Repetir la actividad anterior considerando que las medidas de las distancias de los puntos M , N , O y P a los respectivos vértices sean: 4 cm; 6 cm; 9 cm; 2,4 cm y 7,6 cm.
3 – Investigue cuál será la distancia de los puntos M, N, O y P a los respectivos vértices para que el área sea mínima.
4 – Encontrar una fórmula que permita calcular el área del cuadrado MNOP cuando la distancia a los vértices es x.

Situación 2

1 – Con los resultados obtenidos anteriormente armar una tabla de valores. Presentar los valores de la variable independiente en orden creciente.
2 – Volcar los datos en un sistema de coordenadas cartesianas.
3 – Teniendo en cuenta lo trabajado hasta el momento.
  a) ¿Cuáles son los valores que puede tomar la variable independiente?
  b) ¿Cuáles son los valores que puede tomar la variable dependiente?
  c) ¿Se pueden unir los puntos del gráfico con una curva? ¿Por qué?
  d) Redactar un mensaje de manera que el lector pueda realizar este gráfico sin conocerlo.

Trabajo Práctico Nº 2

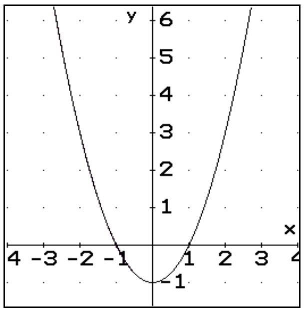
1 – Realizar una tabla de valores y representar gráficamente en un sistema de coordenadas cartesianas la función: $y = x^2$
2 – Del gráfico obtenido en el punto anterior escribir lo que se observa en cuanto a:
  i) Eje de simetría. ii) Coordenadas del vértice iii) Abertura de la curva
3 – Detallar las similitudes y diferencias que se observan al comparar los gráficos de:
$$y = x^2 \qquad \text{con} \qquad \text{Area}(x) = 2x^2 - 20x + 100$$
4 – Modificar la fórmula de la función $\mathbf{y = x^2}$ para que la parábola:
  a) Quede abierta hacia abajo.
  b) La curva sea más cerrada
  c) La curva sea más abierta.
  d) Se desplace 2 unidades hacia arriba.
  e) Se desplace 3 unidades hacia abajo.
  f) Se desplace 1 unidad hacia la izquierda.
  g) Se desplace 2 unidades hacia la derecha.

En cada caso, realice la gráfica correspondiente
5 – Para cada uno de los siguientes gráficos
  i) Escribe las coordenadas del vértice.
  ii) Indica si su abertura es: *“más abierta”*, “*más cerrada*” o *“igual”* a la de la parábola base.
  iii) Escribe la fórmula de la función y = f (x) que corresponde a cada uno de los

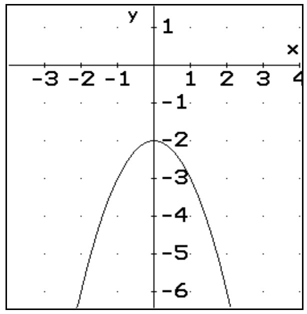
gráficos.

iv) Halla, en los casos en que exista, el o los valores x_1 y/o x_2 donde el gráfico corta al

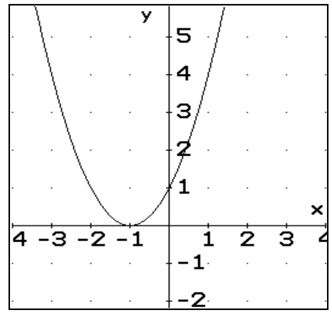
a.-



b.-

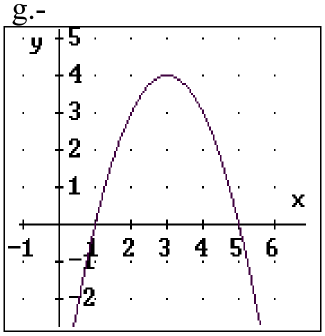


c.-

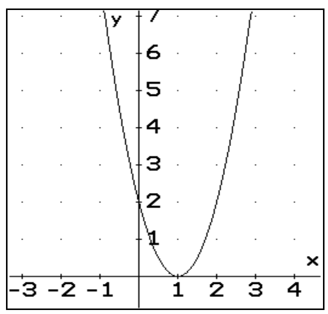


eje de las x.

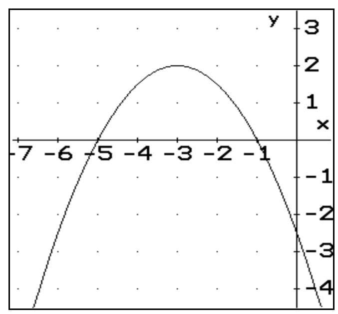
g.-



h.-



i.-



6 - ¿Qué relación existe entre los ceros de las funciones y el valor de la abscisa del vértice?

7.- Completa el siguiente cuadro:

Parábola	*Abierta hacia*	*Coorde-adas del Vértice*	*Abertura según la parábola base*	*Desplazamientos en unidades numéricas*			
	(arriba / abajo)		*(más abierta, cerrada o igual)*	*arriba*	*abajo*	*derecha*	*Izquierda*
$y = \left(x - \frac{1}{3}\right)^2$							
$y = -\left(x + \frac{5}{2}\right)^2$							
$y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{7}$							
$y = -x^2 - 2$							

$y = 3\,(x - 4)^2 + 3$							
$y = (x + 2)^2 - 5$							
$y = -2\,(x + 1)^2$							
$y = -(x - 1)^2 - 1$							
$y = \frac{1}{3}x^2 - 4$							
$y = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + 2$							

8 - Grafique y luego escriba la fórmula de una función cuadrática sabiendo que**:**

a) El vértice está en el punto V (–4, 0), es abierta hacia arriba y pasa por el punto P (–3, 1)

b) El punto de menor ordenada es P (2, –3) y pasa por P (1 , 2)

c) El punto de mayor ordenada es P (–2, 4) y $|a| = 1/2$

d) Corta al eje x en –1 y 3, el menor valor de y es –4

Trabajo Práctico Nº 3

1. – En cada caso encuentra la fórmula polinómica correspondiente a la fórmula canónica dada**:**

a) $y = (x + 3)^2 - 9$ b) $y = (x - \frac{2}{3})^2 - \frac{4}{9}$ c) $y = (x + \frac{5}{2})^2 - \frac{25}{4}$ d) $y = (x + 1)^2 + 3$ e) $y = (x - 3)^2 - 1$ f) $y = (x + \frac{2}{3})^2 - \frac{1}{3}$

2.– ¿Podrías decir cuáles de los gráficos correspondientes a las funciones cuadráticas dadas en el ejercicio anterior pasan por el origen? (no confecciones el gráfico)

3. – En las fórmulas de las funciones cuyos gráficos pasan por el origen

a) Indica qué característica tiene la fórmula cuadrática polinómica

b) Indica qué característica tiene la fórmula cuadrática canónica.

c) Establece una vinculación entre las fórmulas cuadrática canónica y polinómica

4.– a) En cada caso, encuentra la fórmula canónica correspondiente a la fórmula polinómica dada.

i) $y = x^2 + 4x$ iv) $y = x^2 + 8x$

ii) $y = x^2 - 6x$ v) $y = x^2 - 5x$

iii) $y = x^2 - 9x$

b) Cuáles serán en cada caso las coordenadas del vértice de la parábola.

5.– a) Encuentra el valor de h y k de forma que $y = x^2 + bx$ se pueda expresar como $y = (x + h)^2 + k$.

b) Cuál será la abscisa del vértice de la parábola ?.

c) Cuál será la ordenada del vértice de la parábola?.

d) De qué otra forma podrías haber encontrado la ordenada del vértice?

6.– Escribe cada una de las siguientes funciones de segundo grado en la forma canónica.

a) $y = x^2 + 2x - 1$ b) $y = x^2 + 2x + 5$ c) $y = x^2 - 8x + \frac{3}{2}$

7.– a) Encuentra el valor de h y k de forma que $y = x^2 + bx + c$ se pueda expresar como $y = (x + h)^2 + k$.

b) Expresa $y = x^2 + bx + c$ en la forma canónica.

8.– Escribe cada una de las siguientes funciones de segundo grado en la forma canónica.

a) $y = 3x^2 + 6x - 3$ b) $y = 2x^2 - 5x + 3$

9. – a) Encuentra el valor de h y k de forma que $y = ax^2 + bx + c$ se pueda expresar como $y = a(x + h)^2 + k$.

b) Expresa $y = ax^2 + bx + c$ en la forma canónica.

c) Escribe las coordenadas del vértice de la parábola

d) Indica la concavidad de la curva

10. – Dada la siguiente función de segundo grado $y = 2x^2 – 10x + 8$

a) Exprésala en forma canónica.
b) Escribe las coordenadas del vértice.
c) Encuentra los ceros de la función
d) Grafícala en coordenadas cartesianas ortogonales.

11. – Recordando el problema del área del cuadrado dado Área (x) = $2x^2 – 20x + 100$ ¿Cuánto tiene que valer x para que el área sea 50?

12. – Encuentra una fórmula que te permita resolver la ecuación:

$ax^2 + bx + c = 0$

Bibliografía

Artigue, m. (1995) *ingeniería didáctica en educación matemática*. G.e.i.. México.

Azcárate, carmen. Deulofeur, jordi.(1996) f*unciones y gráficas*. Síntesis. Madrid. 1996

Bixio, cecilia (1998) *enseñar y aprender*. Homo sapiens. Bs. As

Brousseau, G. (1994) los roles del maestro cap. De parra, c, saiz, i, otros. *Didáctica de la matemática*. Compilación. Paidos . Bs. As. 1994

Douady, R. dialéctica instrumento–objeto. Juego de encuadres. *Cuaderno de didáctica de la matemática nº3*. Edición mecanografiada.

Charnay, roland. (1994) *aprender (por medio de) la resolución de problemas*. Cap. De parra, c, saiz, i, otros. *Didáctica de la matemática. Compilación*. Paidos . Bs. As..

De tapia, nelly vásquez; tapia de bibiloni, alicia; tapia, carlos.(1984) *matemática 4*. Ed. Estrada. Argentina

ESTUDIO DE LA VARIACION DE LA DIRECCION DE UNA CURVA CON SOPORTE TIC'S

Patricio Guzmán Sereño
Universidad Tecnológica Metropolitana, Chile
pguzman@utem.cl

Resumen
Una situación matemática puede ser estudiada desde tres puntos de vista; algebraica, numérica y gráfica, desde una perspectiva cognitiva dicha situación puede ser considerada en forma integrada desde los tres puntos de vista, permitiendo la posibilidad de establecer nuevas relaciones entre las representaciones lo que deviene en una mayor elaboración conceptual de los objetos matemáticos en estudio, posibilitando el aprendizaje de herramientas nuevas proporcionadas por la tecnología mediante el uso de un software algunos de ellos muy simples, amistosos y poderosos. Ellos permiten que los registros gráfico y numérico adquieran un nuevo estatus, pues permiten a los alumnos comprender que los problemas algebraicos se pueden resolver, sobre la base de estos registros, gráfica o numéricamente tan bien como con la manipulación algebraica.

Desarrollo

En un lenguaje común la curvatura de una curva se relaciona con la tendencia de un punto en movimiento sobre una curva a cambiar de dirección. Si la curva es una línea recta no hay cambio de dirección. La dirección de una curva se toma como la pendiente de la recta tangente a la curva. Una de las interpretaciones de la derivada informa acerca de la dirección de la curva en un punto, en el caso de una línea recta esta dirección es siempre la misma, no hay cambio ni variación, en el caso de una circunferencia la curvatura es constante, al representar una gráficamente una función es posible formarse una idea acerca de la variación de la dirección de la curva.
El software disponible actualmente nos permite graficar con rapidez y exactitud una gran variedad de funciones, al observar la gráfica de una función es posible formarse una primera impresión acerca de su dirección y del cambio que esta experimenta. Aún cuando existen ejemplos acerca de los errores en que incurren algunos programas disponibles al graficar funciones, existe otro tipo de errores que se cometen a partir de inferencias relativas a la variación de la dirección de una curva y que se producen al observar las gráficas de estas funciones.
Se presenta el estudio de dos ejemplos en los cuales a partir de la representación gráfica de funciones realizada mediante el uso de software matemático se infiere error respecto a la variación de la derivada, Se resalta el hecho de que el soporte teórico permanece invariante es decir permanece constante.

Variaciones en la derivada

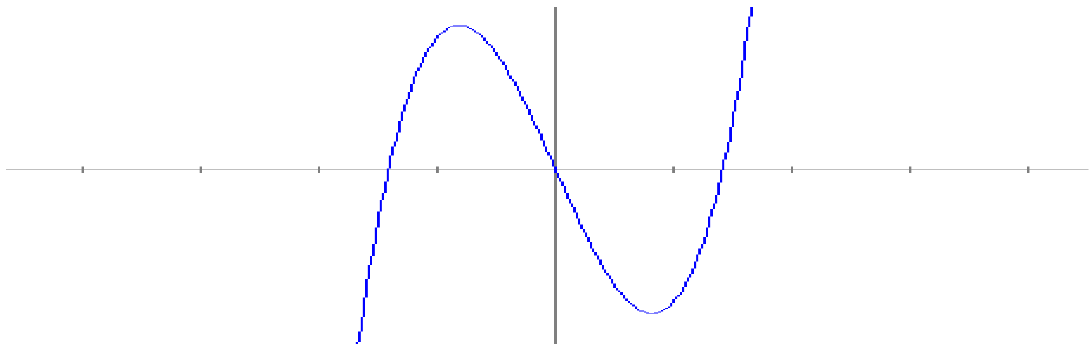
Se propuso a los alumnos del primer curso de cálculo en las carreras de Construcción Civil y Arquitectura dos problemas.

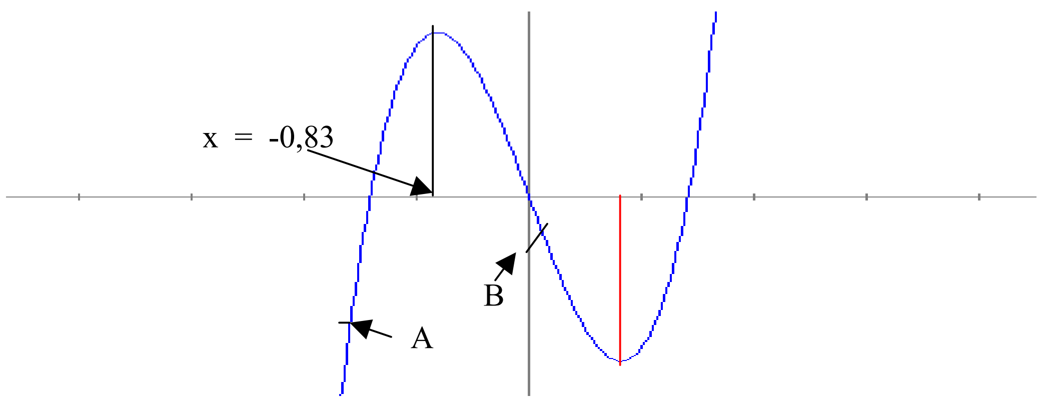
Problema 1

Construcción de una carretera cuyo trazado está determinado por la gráfica de la función:

$$y = -\frac{x^3}{3} - \frac{2x}{3},$$

se solicita determinar los puntos en que la curvatura de la carretera es máxima, a objeto de colocar la correspondiente señal de tránsito.
Al parecer el problema se resuelve determinando los puntos en que la gráfica presenta mayor cambio en su dirección
La gráfica de esta función es:





Al observar la gráfica se tiene que entre los puntos A y B la curva casi no hay variación en su pendiente, en cambio si lo hay en una vecindada de; x = - 0,83..., alcanzando valores positivos cada vez más pequeños y tomando valores negativos a la derecha de; x = -0,83. El cambio en la dirección de la curva al parecer es extremo .

La información gráfica parece indicar que el cambio en la dirección de la curva se produce en los extremos de la función

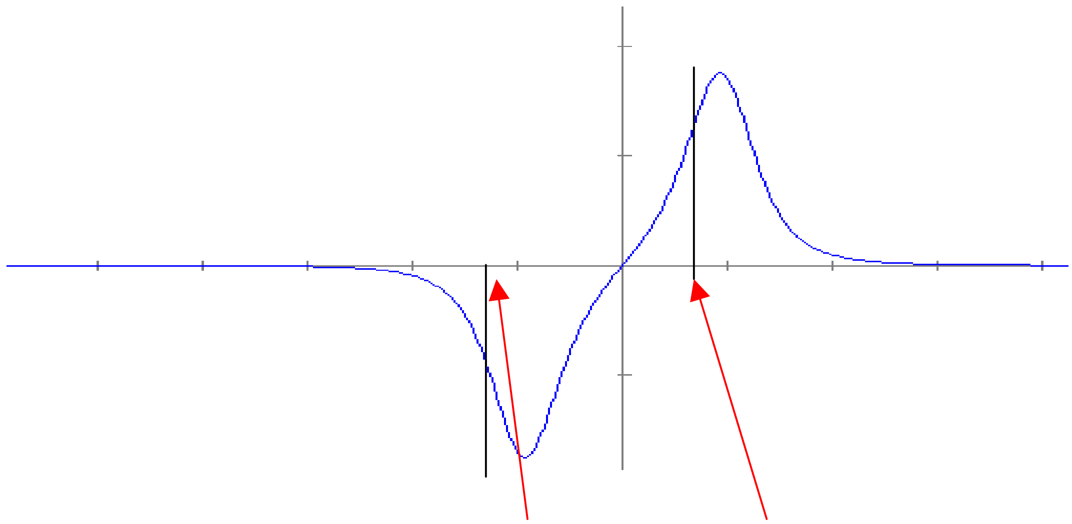
El cálculo de los extremos de

$$y = -\frac{x^3}{3} - \frac{2x}{3}$$

Estos se presentan en; x = - 0,83; x = 0,83

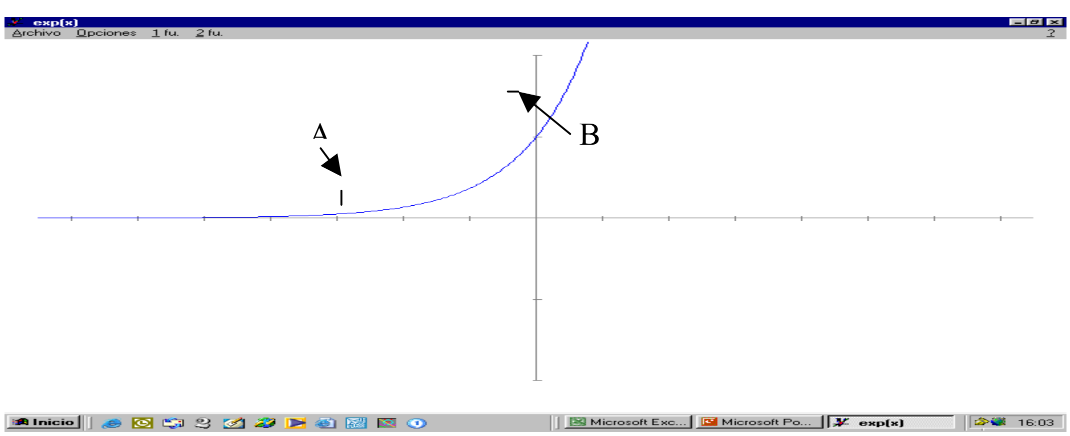
La expresión que da cuenta de la curvatura es: $K(x)=\dfrac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left\{\dfrac{dy}{dx}\right\}^2\right]^{\frac{3}{2}}}$

La gráfica es:



Los extremos de esta curva se presentan en: x = -0,9309. , X = 0,9309.
Los cuales no coinciden con los puntos en los cuales la función presenta sus valores extremos.
Los extremos relativos no son puntos en los cuales la función presenta curvatura máxima.
Luego el análisis gráfico y el analítico sólo han dado una respuesta aproximada, el análisis algebraico ha dado la respuesta correcta.

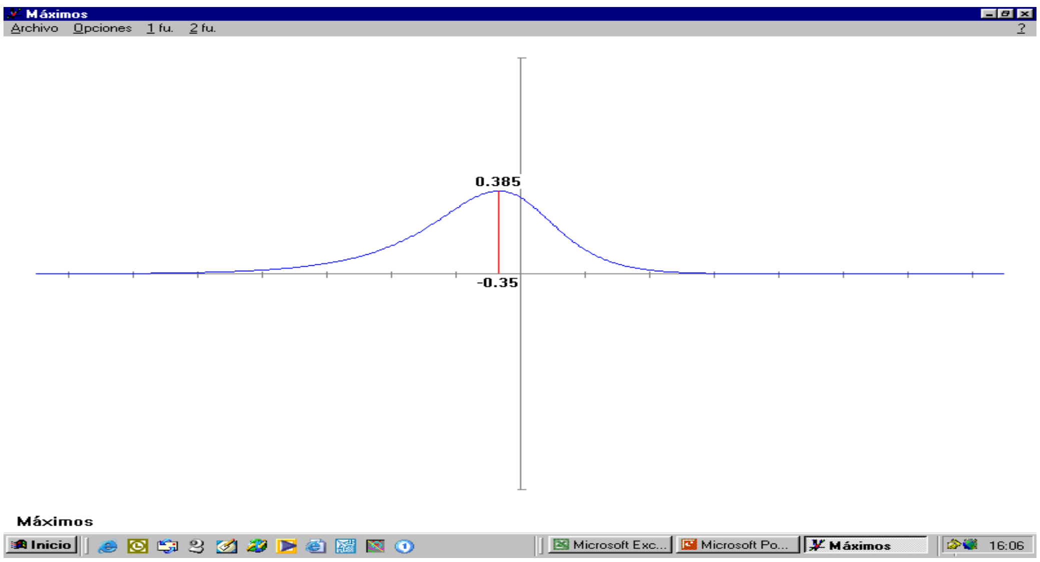
Problema 2.
Construcción de una carretera cuyo trazado está determinado por la gráfica de la función: $y = e^x$. Se solicita determinar los puntos en que la curvatura de la carretera es máxima, a objeto de colocar la correspondiente señal de tránsito



La gráfica nos informa que esta es una curva "suave “, que no presenta una variación significativa en su pendiente entre los puntos A y B.

La curvatura de esta función está dada por: k(x)= $\dfrac{e^x}{\left[1+e^{2x}\right]^{\frac{3}{2}}}$

La gráfica de esta expresión con indicación de su extremo es



En este ejemplo una curva que no presenta una gran variación en su dirección presenta un punto en el cual la curvatura es máxima

La función: $y = e^{x;}$ $x \in \Re$, no presenta extremos relativos en cambio si presenta un punto en que su curvatura es máxima.

Conclusiones

La información obtenida del análisis gráfico nos induce a formular propiedades de la función que no coinciden con la información obtenida con el análisis algebraico, en el primer caso no coinciden los extremos de la función con aquellos puntos en los cuales el cambio de la derivada es extrema, en el segundo caso la curva presenta una pendiente suave que si presenta un punto de curvatura máxima. Por lo tanto quien decide es el análisis numérico.

Bibliografía

Cantoral, R. (1994). *Hacia una Didáctica del Cálculo basada en la Cognición*. Antologías Número 1 (pp. ; 1-24)

Cedillo, T. (2001). *La Calculadora en la Clase de Matemáticas Implicaciones hacia la Enseñanza*. Memorias de la Conferencia Internacional sobre Uso de la Tecnología en la Enseñanza de las Matemáticas. Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo Morelia , México.

Cordero, F. y Solís, M. (1997): *Las Gráficas de las funciones como una argumentación del Cálculo*. Serie Cuadernos de Didáctica, Grupo Editorial Ibero América, 2a. edición

Hitt, F., (1997): *Modelación Matemática con ayuda de Calculadora Graficadora*. Memorias VIII Seminario Nacional. Calculadoras y Microcomputadoras en Educación Matemática. CINVESTAV, México

Dolores, C (2002). *Concepciones alternativas acerca del comportamiento de funciones a través de sus gráficas*, Actas RELME 16, La Habana, Cuba

EXUMAT 2.0: EXAMEN COMPUTARIZADO DE MATEMÁTICAS ADMINISTRADO DE FORMA ADAPTATIVA FUNDAMENTADO EN LA TEORÍA DE RESPUESTA AL ITEM

Lázaro Dibut Toledo, Eduardo Backhoff, José Luis Ramírez. Héctor León Velazco
U. de Cienfuegos "Carlos Rafael Rodríguez", U. A. de Baja California; [3]CETYS
Cuba y México.
ldibut2001@yahoo.es

Resumen

El presente trabajo refleja un trabajo colaborativo entre el Instituto de Investigación y Desarrollo educativo de la Universidad Autónoma de Baja California, México, el CETYS de ensenada, México, y la Universidad de Cienfuegos "Carlos Rafael Rodríguez, cuba, en las personas de los autores. El trabajo consiste en la descripción del Examen de ubicación de Matemáticas (EXUMAT), en su versión 2.0, para administrar a los estudiantes que recién ingresan a la Universidad Autónoma de Baja California (UABC). El examen está fundamentado en la Teoría de la Respuesta al Item (TRI) con el modelo de dos parámetros. Los propósitos del trabajo son: 1) describir la metodología seguida para la confección del Examen de Ubicación de Matemáticas (EXUMAT) en su versión 2.0, y 2) analizar e interpretar los resultados del EXUMAT 2.0 al ser administrado como prueba piloto a los estudiantes de la preparatoria del CETYS de Ensenada, en la primavera de2002

Introducción.

El desarrollo que ha alcanzado en los últimos 20 años la evaluación en sentido general y la evaluación del aprendizaje en particular, hace de esta parte de todo proceso educativo una fuente de creatividad y dinamismo en aras de lograr el objetivo supremo de comprobación del aprendizaje alcanzado por los estudiantes de cualquier nivel educativo, donde las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) están jugando un papel importante en esta dirección por el impacto que han tenido en la evaluación psicológica y educativa.

El Instituto de Investigación y Desarrollo Educativo (IIDE) de la Universidad Autónoma de Baja California (UABC) tiene entre sus líneas fundamentales de investigación la Evaluación, con un desarrollo sostenido en lo que son los exámenes computarizados, tal es el caso del Sistema Computarizado de Exámenes (SICODEX) (Backhoff, Ibarra y Rosas, 1994,1995); otro sistema desarrollado y en explotación por varias universidades mexicanas, es el Examen de Habilidades y Conocimientos Básicos (EXHCOBA). A partir de 1996 es que se comienza con el desarrollo del Sistema de Exámenes Adaptativos (SEA) con el que se administró el Examen de Ubicación de Matemáticas (EXUMAT) en su versión 1.0 (Backhoff y Rosas, 2000).

El EXUMAT 1.0 es un Examen de Ubicación de Matemáticas para los estudiantes que ingresan a la universidad, que tiene como objetivo ubicar en su dimensión real de conocimientos y habilidades en Matemáticas a los estudiantes, de forma tal que los mismos tengan una medida del nivel con que enfrentarán las matemáticas universitarias, y a los profesores les permite hacer un tratamiento de los contenidos acorde a ese nivel de los estudiantes.

La versión 1.0 de este examen se confeccionó sobre la base de que el mismo respondiera y pudieran interpretarse sus resultados, a partir de la Teoría de Respuesta al Item (TRI), con el modelo de dos parámetros.

En un trabajo colaborativo entre el IIDE, el CETYS de Ensenada y la Universidad de Cienfuegos “Carlos Rafael Rodríguez”, Cuba, en las personas de los autores del presente trabajo, se confeccionó una segunda versión de este tipo de examen con el objetivo de actualizar o modificar los reactivos del mismo por considerar que en la versión anterior no se incluyeron reactivos con determinados contenidos del tronco curricular de matemáticas de los diferentes niveles. Esta segunda versión se aplicó en la primavera de 2002 en el CETYS de Ensenada como prueba piloto, de forma tal que permitiera hacer una calibración del mismo y fue administrado a los estudiantes que ingresaron a la UABC en enero de 2003. Los propósitos del presente trabajo son: (1) describir la metodología seguida en la confección de EXUMAT 2.0, (2) analizar e interpretar los resultados de la aplicación del mismo como prueba piloto en el CETYS de Ensenada en la primavera de 2002.

Metodología para la confección, aplicación e interpretación del EXUMAT

Para la confección, aplicación e interpretación de los resultados del EXUMAT 2.0 se siguió la siguiente metodología:

Revisión de la documentación relacionada con EXUMAT 1.0
Análisis de los programas de estudio de Matemática del nivel primario hasta bachillerato.
Definición de las áreas nodales y habilidades asociadas.
Confección del examen.
Aplicación del examen.
Análisis e interpretación de los resultados.

A continuación se explica brevemente cada uno de los pasos de la metodología descrita anteriormente:

Revisión de la documentación relacionada con EXUMAT 1.0

Lo primero que hizo el colectivo de investigadores fue la revisión y estudio de toda la documentación relacionada con EXUMAT 1.0 tanto en sus aspectos teóricos, metodológicos y computacionales, de forma tal que las insuficiencias detectadas fueran el punto de partida en la nueva versión. En este sentido lo más significativo fue la no inclusión, de reactivos con contenidos como la derivada e integración de funciones trascendentes, determinación de los extremos de una función, determinación de los ceros de una función cuadrática a partir de su gráfica, aplicación de la ley de los senos y los cosenos, etc.

Análisis de los programas de estudio de Matemática del nivel primario hasta el bachillerato.

Una vez revisada la documentación relacionada con EXUMAT 1.0, el grupo de investigadores pasó a estudiar los programas de estudio de Matemática desde el nivel primario hasta el nivel de bachillerato, tanto de escuelas públicas como privadas; en este estudio se hizo énfasis en los objetivos que se deben lograr en cada grado o año de los diferentes niveles, a partir de los cuales se definieron las áreas nodales que debía abarcar el examen según el criterio de experto de los investigadores.

Definición de las áreas nodales y habilidades asociadas

Las áreas nodales constituyen los núcleos fundamentales de contenidos que estarán reflejados en los reactivos del examen, asociados a las mismos están las habilidades a lograr aunque esto no se puede interpretar que para todas las habilidades asociadas a cada área nodal existan reactivos; lo que se ha tratado es de que haya una representatividad de las habilidades en los reactivos formulados.

A continuación se presenta la tabla 1 con el resumen de la cantidad de áreas nodales y la cantidad de reactivos por tipo de nivel :

Tabla 1. Cantidad de áreas nodales y reactivos

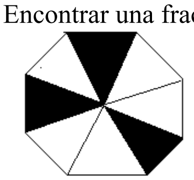
Nivel	Cantidad de áreas nodales	Cantidad de reactivos
Primaria	9	66
Secundaria	21	92
Bachillerato	25	61
Total	55	219

Confección del examen.

Teniendo en cuenta lo analizado del EXUMAT 1.0, los objetivos a lograr por cada grado o año de cada tipo de nivel, así como las áreas nodales definidas y las habilidades asociadas, se procedió a la confección del examen para lo cual dos de los investigadores (profesores de Matemática) hicieron por separado un examen. Estos exámenes fueron sometidos a debate, primero entre los dos profesores de Matemática y posteriormente entre todos los investigadores, con el objetivo de depurar aquellos reactivos que se considerarán no adecuados por la redacción, dificultad o cualquiera otra razón, de este proceso quedaron 219 reactivos.

Los reactivos tienen la característica de evaluar aquellos contenidos troncales del curriculum de Matemática desde el nivel primario, a partir del tercer grado, hasta el bachillerato, los mismos permiten dar respuestas abiertas de diferentes tipos tales como: numérica, textual y cerrada. La calificación de la preguntas es en base al valor 1 si ésta es correcta y 0 si es incorrecta. En la tabla 2 se muestran varios ejemplos de tipos de preguntas y respuestas.

Tabla 2. Tipos de preguntas y respuestas del EXUMAT 2.0

Tipo de preguntas	Ejemplo	Respuesta
Respuesta numérica, entera	Un excursionista hizo un recorrido de 5 días. El primer día caminó 39 Km; el segundo, 43Km; el tercero, 27Km; el cuarto, 19 Km; y el quinto día recorrió 32 Km. ¿Qué distancia recorrió en los tres primeros días?	109
Respuesta numérica, entera, doble	Resolver el siguiente sistema de ecuaciones $2x + y = 5$; $3x + y = 8$	$x = 3$ $y = -1$
Respuesta numérica, decimal	Se compraron dos máquinas. Si una costó \$68.85 y otra \$57.65, ¿cuánto se gastó en total?	126.5
Respuesta textual	Escribir con palabras en pesos y centavos: \$352.75	Trescientos cincuenta y dos pesos con setenta y cinco centavos
Respuesta fraccionaria	Encontrar una fracción que represente la región iluminada 	3/8
Respuesta algebraica	Multiplicar $(m^2 + mn + n^2)(m – n)$.	$m^3 – n^3$

Respuesta cerrada de opción múltiple	De las siguientes fracciones, cuál es la mayor: ½, 1/3, 2/5.	½

Aplicación del examen.

El examen fue aplicado, como prueba piloto, a 131 estudiantes de la preparatoria del CETYS de Ensenada en la primavera de 2002, con este fin se robusteció la versión del SEA preparada para el EXUMAT 1.0 (Backhoff y Rosas, 2000). Debido a la extensión del examen, 219 reactivos, este se dividió en cuatro sesiones en días sucesivos.

Análisis e interpretación de los resultados

Procesamiento con el sistema BILOG

La base de datos generada por las respuestas dadas por los 131 estudiantes a los 219 reactivos, caracterizada por datos con valores 1 (respuesta correcta) y 0 (respuesta incorrecta) fue procesada con el sistema BILOG, el cual permite calcular los indicadores psicométricos de los reactivos del examen: índices de discriminación **a** y de dificultad **b.**

El sistema pudo calcular los coeficientes de discriminación y de dificultad de 176 reactivos de los 219, o sea, para 43 reactivos no se pudieron calcular estos, para un 80,4 % de indicadores que fueron calculados correctamente. La causa fundamental fue que para esos 43 reactivos habían pocas respuestas y el sistema no podía hacer un procesamiento correcto. La siguiente tabla refleja la disminución del número de reactivos por áreas nodales antes y después de aplicar el BILOG:

Tabla 3. Cantidad de reactivos por áreas nodales antes y después de aplicar el BILOG

Nivel	**Cantidad de áreas nodales**	**Cantidad de preguntas antes de aplicar BILOG (I)**	**Cantidad de preguntas después de aplicar BILOG (II)**	**Diferencia I - II**	**% Diferencia I - II**
Primaria	9	66	48	18	27,3
Secundaria	21	92	70	22	23,9
Bachillerato	25	61	58	3	4,9
Total	55	219	176	43	19,6

De la tabla anterior se infiere que la mayor disminución en la cantidad de preguntas por áreas nodales se encuentra en el nivel primario, seguido por el nivel secundario y la menor disminución en el nivel de Bachillerato.

Análisis de la correspondencia entre la escala de dificultad matemática de los reactivos y el nivel de dificultad obtenido para cada reactivo por el sistema BILOG del EXUMAT 2.0.

Al confeccionarse el EXUMAT 2.0 los investigadores tuvieron presente el grado de dificultad matemática de los reactivos de acuerdo a la experiencia de los mismos como profesores de matemática. La idea fue que a partir del reactivo 1, la dificultad del reactivo siguiente fuera mayor, o al menos lograr que cuando se pasara de un nivel a otro, la dificultad media de los reactivos aumentara. Esto es un proceso complejo pues el reactivo que tiene una determinada dificultad para una persona no la tiene para otra y así sucesivamente.

Con el objetivo de analizar la correspondencia entre el grado de dificultad matemática de la escala de conceptos matemáticos asociados a los reactivos y el nivel de dificultad obtenido para cada reactivo por el sistema BILOG, se procedió a hacer lo siguiente:
Se halló el índice de dificultad medio de los reactivos según su nivel, o sea, primaria, secundaria y bachillerato, a partir de los 176 reactivos que el sistema BILOG pudo calcular sus índices. Para esto hubo que identificar los reactivos que quedaban de cada nivel con respecto a los 219 reactivos iniciales.
Posteriormente se ordenaron los 176 reactivos por orden de dificultad de menor a mayor, y se seleccionaron la cantidad de reactivos según su nivel; por ejemplo, si en el nivel primario quedaron 48 reactivos, entonces cuando los reactivos fueron ordenados por el índice de dificultad se buscaron los primeros 48 reactivos para comparar si eran los mismos sin ordenamiento de dificultad y así sucesivamente con el resto de los reactivos de los otros niveles.
Por último se compararon los índices de dificultad medio de los reactivos de los puntos 1 y 2 y se llegaron a conclusiones con relación al nivel de correspondencia.

La siguiente tabla resume el resultado obtenido:
Tabla 4. Comparación de la media del índice de dificultad para cada nivel con y sin ordenamiento de los índices de dificultad de los 176 reactivos finales

Nivel	Sin ordenamiento	Con ordenamiento
Primario	-1.918	-2.176
Secundaria	-0.061	-0.197
Bachillerato	0.962	1.359

De la tabla anterior se infiere que los 176 reactivos que quedaron después de aplicar el sistema BILOG a los resultados de las respuestas a los 219 reactivos iniciales del EXUMAT 2.0, tienen una dificultad creciente al pasar de un nivel a otro, con y sin ordenamiento del índice de dificultad de los reactivos, lo anterior se corrobora haciendo una lectura vertical de las columnas dos y tres de la tabla anterior. Si la lectura la hacemos horizontalmente, observamos diferencias, más acentuadas en el nivel de secundaria, entre los índices de dificultad medio de cada nivel; este resultado tiene relación directa con el hecho que al ordenar los reactivos por su índice de dificultad de menor a mayor complejidad, la cantidad de reactivos por tipo de nivel no se corresponde cuando los mismos están ordenados a partir de su dificultad matemática según el criterio de los investigadores. La siguiente tabla refleja la cantidad de reactivos que no le corresponden a cada nivel cuando los reactivos están ordenados a partir de sus respectivos índices de dificultad, por lo que los índices de dificultad de estos reactivos distorsionan los índices medios de la columna dos en la tabla 4.

Tabla 5. Cantidad de reactivos por niveles y ordenamiento

Nivel	Cantidad de reactivos del nivel según ordenamiento de complejidad matemática	Cantidad de reactivos que no le corresponden al nivel al ordenarse por el índice de dificultad	%
Primario	48	13	27.1
Secundaria	70	17	24,3

Bachillerato	58	17	29.3
Totales	176	47	26,7

Conclusiones

Lo primero a considerar del trabajo es la metodología que se siguió para la confección, aplicación e interpretación de los resultados del EXUMAT 2.0; otro aspecto que se ha puesto de manifiesto es la aplicación del Sistema de Exámenes Adaptativos (SEA), en su versión más actualizada, desarrollado en el IIDE para administrar el EXUMAT 2.0.

El EXUMAT 2.0 es una versión actualizada del EXUMAT 1.0 para la cual existen reactivos que se corresponden con áreas nodales no incluidas en la versión anterior, tales como la de derivación e integración de funciones trascendentes, determinación de los extremos de una función, determinación de los ceros de funciones cuadráticas a partir de sus gráficas, aplicación de la ley de los senos y los cosenos, etc.

La administración del EXUMAT 2.0 a los estudiantes de la preparatoria del CETYS de Ensenada, como prueba piloto, permitió obtener los índices de discriminación y de dificultad de 176 de los 219 reactivos iniciales. Para los 43 reactivos restantes faltaron las cantidades necesarias de respuestas para el procesamiento con el sistema BILOG. Este hecho nos pone de manifiesto que todavía se deben hacer precisiones en la formulación de las preguntas atendiendo a factores como redacción, "dificultad matemática", etc.

Al comparar las medias de los índices de dificultad de los reactivos por tipo de nivel, antes y después del ordenamiento de los reactivos por el índice de dificultad, se pudo constatar que no existe una correspondencia, a un alto grado, entre la escala de los reactivos ordenados a partir de su dificultad matemática y el nivel escolar en que se enseñan, aunque consideramos que los resultados obtenidos son estimulantes para continuar ajustando esta técnica evaluativa.

Bibliografía

Backhoff, E. Ibarra, M.A. y Rosas, M. (1994). Versión Computarizada del Examen de Habilidades y Conocimientos Básicos. Trabajo presentado en el *23º Congreso Internacional de Psicología Aplicada. Madrid, España.*

Backhoff, E., Ibarra, M.A. y Rosas, M. (1995). Sistema Computarizado de Exámenes (SICODEX). *Revista Mexicana de Psicología*, vol. 12, No. 1, pp. 55-62.

Backhoff, E., Rosas, M. (2000). Sistema Computarizado de Exámenes Adaptativos de Matemáticas. IV Foro de evaluación educativa. Ciudad Juárez, Chihuahua, y El Paso, Texas, 30, 31 de octubre y 1º de noviembre de 2000.

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS EN UNA GEOMETRÍA DE HILBERT

Gonzalo Riera, Rubén Preiss y Hernán Carrasco
P. U. Católica de Chile, U. Diego Portales, U. de las Américas
griera@mat.puc.cl, ruben.preiss@udp.cl, hcarrasc@uamericas.cl.

Resumen

En las geometrías conocidas, tales como la Euclidiana, Esférica o Hiperbólica, damos por sentado muchas propiedades elementales sin mayor reflexión. Por ejemplo, en la Geometría de Euclides sabemos que todos los triángulos equiláteros de lado 1 son congruentes entre sí, con área igual a $\sqrt{3}/4$. Es interesante entonces conocer un modelo geométrico sencillo en el cual es preciso replantearse todas esas propiedades, tales como la definición de un ángulo o el área de un triángulo. Veremos que aquí no todos los triángulos equiláteros de igual lado son congruentes entre sí, aunque podemos hablar de ángulos, distancias y funciones trigonométricas. El modelo que planteamos es el de la Geometría de Hilbert en un triángulo que ya fue explicada en [1] . En este trabajo mostramos algunos resultados, con las potencialidades y beneficios ofrecidos por la Geometría No-Euclidiana no solamente desde el punto de vista científico, sino también, desde el punto de vista didáctico, toda vez que es posible usar este tipo de Geometría como herramienta para motivar e integrar a docentes y estudiantes en la comprensión de la Ciencia y a usar la tecnología educativa como campo de experimentación para desarrollar abstracciones en mundos imaginarios diferentes, donde la geometría es tratada por medio de modelos que toman como base un conjunto convexo proporcionado por David Hilbert y donde se hace necesario estudiar los conceptos básicos como la estructura y definición de un círculo y un ángulo, y nos concentramos en obtener algunos teoremas importantes en la Geometría hiperbólica. En resumen, si bien los resultados presentados en este trabajo constituyen un aporte creativo de conocimiento en lo científico (en lo respecta al estudio, investigación y obtención de algunos de teoremas de la Geometría No-Euclidiana), constituyen también un aporte desde el punto de vista didáctico en la enseñanza de la Geometría No Euclidiana.

Introducción

Resumimos a continuación lo explicado en [1] para conveniencia del lector. Dados cuatro puntos A, B, C, D en una línea recta en el plano euclideano (cartesiano) usual, la razón doble se define por:

(A B C D) = $\frac{AC}{CB} \cdot \frac{DB}{AD}$. Esta razón es invariante bajo proyección desde un punto.

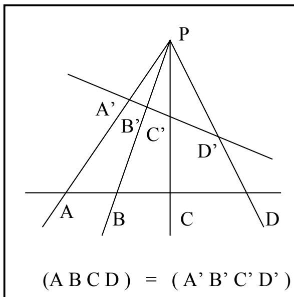
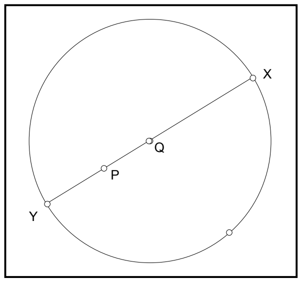


Figura 1

Hilbert considera la distancia siguiente para dos puntos cualquiera P y Q en el interior de un cuerpo convexo.

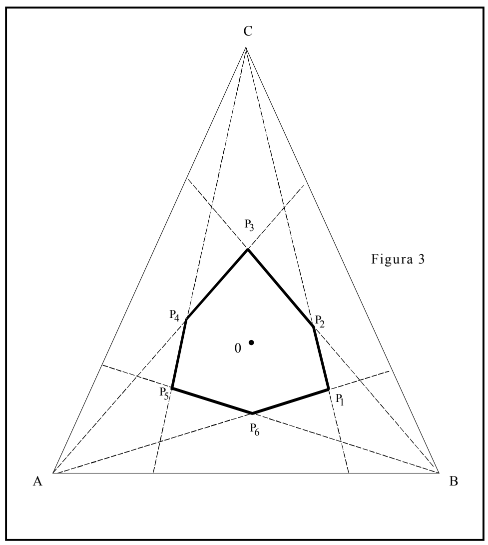


$$\delta(P,Q) = \left|\mathrm{Log}(PQXY)\right|$$

Es esta una distancia bien definida bajo la cual los puntos del borde del cuerpo convexo están "al infinito". ***Nuestro espacio es el interior de un triángulo de vértices A, B, C.*** En ese espacio vimos que:

$$\delta(P,Q) + \delta(Q,R) = \delta(P,R)$$

para puntos que no necesariamente están en línea recta y estudiamos la forma de la circunferencia unitaria.



La "circunferencia" unitaria : $\delta(O,P) = 1$

Coordenadas

Recordamos que dados dos puntos A y B, entonces un punto Q divide al segmento A B en la razón k si $AQ \;/\; QB = k$. Resolviendo para Q se tiene: $Q = aA + bB$ con $a + b = 1$ donde:

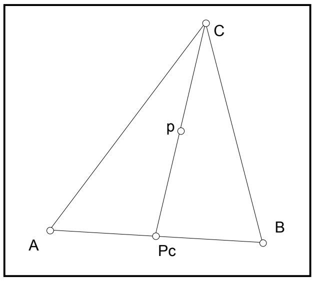
$a = 1/(1+k)$, $b = k/(1+k)$.

Esta segunda forma es independiente del origen escogido en la recta por A B o en cualquier origen en realidad. De igual forma, dados tres puntos A , B y C en el plano, un punto P en él se escribirá:

$P = aA + bB + cC$, $a + b + c = 1$

y los puntos al interior del triángulo Δ ABC corresponden a: $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$.

Llamaremos *(a, b, c)* las coordenadas *proyectivas* del punto P. Los puntos (0, b, c) corresponden al lado BC y así también para los otros dos lados. Observaremos una relación entre las coordenadas de P y de su proyección en uno de los lados.



Si P = (a, b, c) entonces: $P_c = \frac{a}{1-c} A + \frac{b}{1-c} B$ De modo que $k = b/a$.

Proposición 1
Si P = (a, b, c); Q = (u, v, w) y la recta que los une intersecta los lados AC y BC entonces :

$$\delta(P,Q) = \left| \operatorname{Log}\left(\frac{v}{u} \cdot \frac{a}{b}\right) \right|$$

Demostración:

Por proyección desde C se tendrá $\delta(P, Q) = |\operatorname{Log}(PQXY)| = |\operatorname{Log}(P_C Q_C BA)|$.

Pero $(P_C Q_D BA) = \frac{P_C B}{B Q_C} \cdot \frac{A Q_C}{P_C A} = L/k = \frac{v}{u} \cdot \frac{a}{b}$, de donde se obtiene la conclusión.

Para referencia, las coordenadas de los puntos en la figura 3 son: 0 = (1/3 , 1/3 , 1/3)

$P_1 = \frac{1}{2+e}(1, e, 1)$, $P_2 = \frac{1}{2e+1}(1, e, e)$, $P_3 = \frac{1}{2+e}(1, 1, e)$,

$P_4 = \frac{1}{2e+1}(e, 1, e)$, $P_5 = \frac{1}{2+e}(e, 1, 1)$ y $P_6 = \frac{1}{2e+1}(e, e, 1)$.

Además los segmentos del borde se parametrizan por

$P_1 P_2 = (t, et, 1-t-et)$ con $\frac{1}{2e+1} \leq t \leq \frac{1}{2+e}$

$P_2 P_3 = (t, 1-t-et, et)$;

$P_3 P_4 = (1-t-et, t, et)$; $P_4 P_5 = (et, t, 1-t-et)$;

$P_5 P_6 = (et, 1-t-et, t)$; $P_6 P_1 = (1-t-et, et, t)$.

Junto a estas coordenadas proyectivas consideramos las coordenadas <u>afines</u> de un punto P definidas por:

Si P = (a, b, c) con $a + b + c = 1$ entonces: $P = [x, y]$ con $\begin{cases} x = a/c \\ y = b/c \end{cases}$

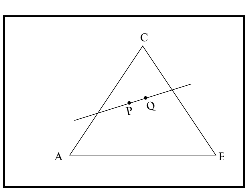
(Suponemos entonces P al interior estricto del triángulo, donde a, b, c son positivos).

Si conocemos las coordenadas afines [x, y] podemos obtener las coordenadas proyectivas por:

$a = x/(1+x+y)$; $b = y/(1+x+y)$; $c = 1/(1+x+y)$

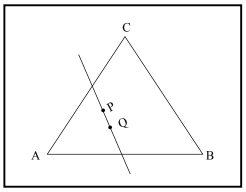
Estas coordenadas afines tienen la ventaja de ser dos (y no tres) en un espacio de dimensión dos.

La fórmula para la distancia en estas coordenadas varía sin embargo y la escribimos aquí:

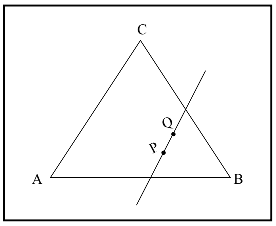


P = [x, y] Q = [r, s]

$$\delta(P,Q) = \left| \operatorname{Log}\left(\frac{s}{r} \cdot \frac{x}{y}\right) \right|$$



$$\delta(P,Q) = \left| \; Log\left(\frac{1}{s}\cdot y\right) \right|$$

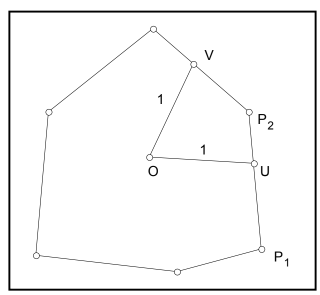


$$\delta(P,Q) = \left| \; Log\left(x\cdot\frac{1}{r}\right) \right|$$

En coordenadas afines las coordenadas de los puntos en la figura 3 son: $0 = [1, 1]$; $P_1 = [1, e]$; $P_2 = [e^{-1}, 1]$; $P_3 = [e^{-1}, e^{-1}]$; $P_4 = [1, e^{-1}]$; $P_5 = [e, 1]$; $P_6 = [e, e]$

Funciones Trigonométricas

Debemos ahora considerar la definición de ángulo. Consideremos dos semirectas que se intersectan en un vértice P. Por una isometría podemos llevar P al punto central O; las semirectas intersectan a la circunferencia unitaria en dos puntos. La longitud de ese arco será la medida de nuestro ángulo.



> U0V=α si.

$\delta(U, P_2) + \delta(P_2, V) = \alpha$

El ángulo completo mide entonces 6, pues la circunferencia completa mide 6. El ángulo plano medirá 3. Tal como en el caso clásico, tomamos ahora una semi-recta en OP_1 que empieza a girar en el sentido contrario a las agujas de un reloj. Definimos $[C(\alpha), S(\alpha)]$ como las coordenadas afines del punto P si $\angle P_1OP = \alpha$

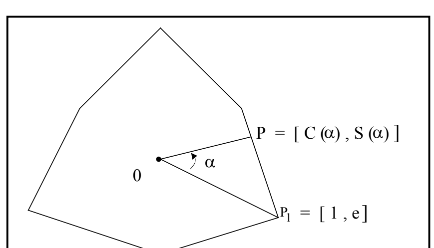


Figura 7

Proposición 2

Las funciones trigonométricas tienen los valores siguientes:

1 $\begin{cases} C(\alpha) = e^{-\alpha} \\ S(\alpha) = e^{1-\alpha} \text{ si } 0 \le \alpha \le 1 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} C(\alpha) = e^{-1} \\ S(\alpha) = e^{1-\alpha} \text{ si } 1 \le \alpha \le 2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} C(\alpha) = e^{\alpha-3} \\ S(\alpha) = e^{-1} \text{ si } 2 \le \alpha \le 3 \end{cases}$ 4. $\begin{cases} C(\alpha) = e^{\alpha-3} \\ S(\alpha) = e^{\alpha-4} \text{ si } 3 \le \alpha \le 4 \end{cases}$

5. $\begin{cases} C(\alpha) = e \\ S(\alpha) = e^{\alpha-4} \text{ si } 4 \le \alpha \le 5 \end{cases}$ 6. $\begin{cases} C(\alpha) = e^{6-\alpha} \\ S(\alpha) = e \text{ si } 5 \le \alpha \le 6 \end{cases}$

y se extienden por periodicidad para $\alpha \le 0$ o también para $\alpha \ge 6$.

Demostración

Verificamos la fórmula 1) utilizando para ello las distintas versiones de la distancia.

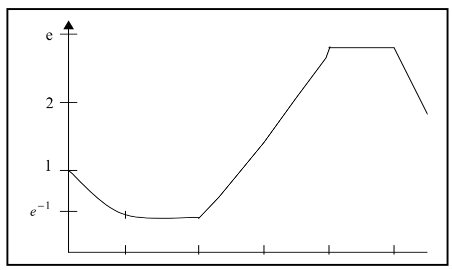
$$\delta(O, P) = \delta\left([1,1], \left[e^{-\alpha}, e^{1-\alpha}\right]\right) = \left| Log\left(\frac{1}{1} \cdot \frac{e^{1-\alpha}}{e^{-\alpha}}\right) \right| = Log\ e = 1$$

$$\delta(P, P_1) = \delta\left([1, e], \left[e^{-\alpha}, e^{1-\alpha}\right]\right) = \left| Log\left(\frac{e^{-\alpha}}{1}\right) \right| = Log\left(e^{\alpha}\right) = \alpha$$

Las otras fórmulas son similares.

Corolario

La gráfica de la función $C(\alpha)$ es la siguiente:



En tres períodos completos se verá:

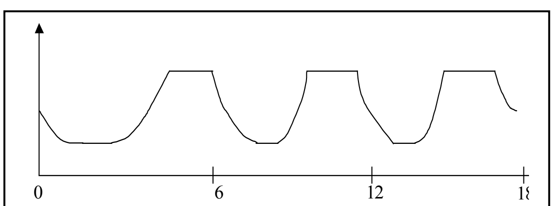


Figura 8

La gráfica de S (α) es similar

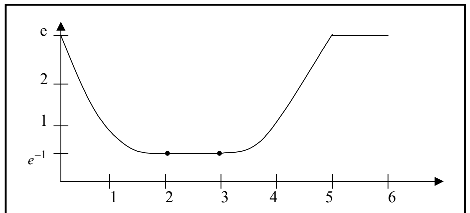
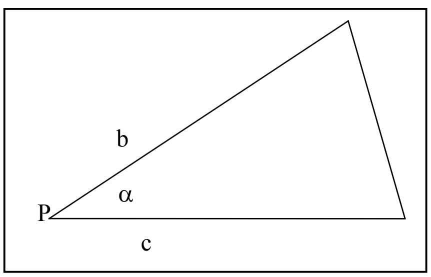


Figura 9

Observamos entonces que: $\boxed{C\ (\alpha - 1) = S\ (\alpha)}$

relación no inmediata a partir de la definición.



Área de un Triángulo

Consideremos un triángulo en nuestra geometría de lados de longitudes b y c y ángulo α.

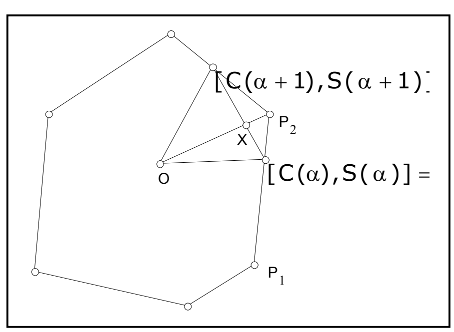
Es razonable definir su área por $b.c$ (área triángulo de lados 1 y ángulo α). Esto nos lleva a la pregunta: ¿Cuánto vale el área de un triángulo de lados 1 y ángulo α? O más precisamente aún: ¿Cuánto vale el área de un triángulo equilátero de lados 1 y ángulo 1? Si llevamos por una isometría el vértice P al origen 0, esa área será igual a ½ si los otros vértices son P_1 y P_2. En efecto, el área total del círculo de centro 0 y radio 1 debe ser 3. Pero si los otros vértices no están en esa posición, la respuesta varía.

Proposición 3

Supongamos que un triángulo equilátero de lado 1 tiene un vértice en 0 y demás vértices en $P = [C(\alpha), S(\alpha)]$, $Q = [C(\alpha+1), S(\alpha+1)]$.

Entonces su área es igual a $\frac{1}{2}\left|\mathrm{Log}\left|\frac{e^{-\alpha} + e^{1-\alpha} - 2}{e - 1}\right|\right|$

Demostración



$\Delta OUP_2 = \frac{1}{2}(1-\alpha)$, pues el área total es $\Delta P_1OP_2 = \frac{1}{2}$. De igual anera: $\Delta OP_2V = \frac{1}{2}\alpha$.
Entonces: $\Delta OUV = \Delta OUX + \Delta OVX = \overline{0X}\,\Delta OUP_2 + \overline{0X}\Delta OVP_2 = \overline{OX}\left(\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}(1-\alpha)\right) = \frac{1}{2}\overline{OX}$.
Basta calcular entonces la distancia $\overline{0X}$ donde X es el punto de intersección de las rectas por U, V y por O, P_2. Eso da el resultado de la proposición.

Corolario: No todos los triángulos equiláteros de lado 1 tiene igual área.

Bibliografía

Riera, G., Carrasco H., Preiss R. (1999). La Geometría de Hilbert en un triángulo. *Revista Pharos*, 6 (2): 61-69. ISSN 017-1307. Universidad de las Américas. Chile.
Buseman, H. (1955). *The Geometry of Geodesics.* Academic Press Inc. New York. USA.
Hilbert D. (1971). *Foundations of Geometry*. Open Court, La Salle. USA.
Buser, P. (1992). *Geometry and Spectra of Compact Riemann Surfaces*. Birkhäuser.
Castelnuovo, G. (1959). *Lecciones de Geometría Analítica*. Edit. Calomino, La Plata, Argentina.

GEOMETRÍA NO EUCLIDIANA EN LA ENSEÑANZA BASICA: GEOMETRÍA DE LA ESFERA

Nélida Pérez y Raquel Cognigni
U. Nacional de San Luis e Instituto San Agustín, San Luis, Argentina
nperez@unsl.edu.ar

Resumen
Con el convencimiento de que la Enseñanza General Básica debe ofrecer a los educandos la oportunidad de descubrir ideas geométricas a través de actividades de manipulación de objetos cotidianos, y de que es posible llevar contenidos no convencionales a las aulas. Encontramos en las geometrías no-euclidianas, materia prima para alcanzar el objetivo. Trabajamos con la "Geometría de Riemann" cuyo modelo es un objeto muy familiar: la esfera, y no es difícil imaginar un mundo de dos dimensiones sobre su superficie; mostramos que el ejemplo más clásico de una geometría sin paralelas se obtiene observando la tierra. Nuestra metodología estuvo orientada al sujeto que aprende, la basamos en la motivación, ya que predispone al alumno al aprendizaje e induce al esfuerzo intelectual. Nos concentramos especialmente en una selección de contenidos, que favorecieran la comprensión, la observación, la experimentación, el descubrimiento de regularidades, la formulación de hipótesis y conjeturas y la comprobación de las mismas. Como conclusión destacamos que las actividades desarrolladas, investigar y comparar la geometría Euclidiana con una no Euclidiana condujeron a la comprensión de lo que es un sistema axiomático. En este reporte exhibimos algunas conclusiones y describimos la experiencia realizada con alumnos de 8º año de Enseñanza General Básica (12-13 años de edad) tomando como punto de partida la investigación realizada con los mismos alumnos en el año 2000.

Introducción
Si queremos pensar para nuestras aulas una Geometría con un enfoque diferente a la propuesta por Euclides, debemos remontarnos al Siglo XIX, donde comienza la historia del cambio, con el advenimiento de las geometrías no-euclidianas. En 1854, George Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866), con motivo de su admisión como profesor de la Universidad de Gotinga, presentó una disertación titulada "Sobre las Hipótesis en que se apoyan los Fundamentos de la Geometría". Entre otros temas, analizó el postulado dos y cinco de Euclides, una de sus conclusiones fue que el postulado cinco era independiente y se podía reemplazar por *"Todo par de rectas se corta"* (no existen las paralelas). Esta modificación del postulado cinco condujo a lo que actualmente llamamos geometría elíptica o geometría riemanniana.

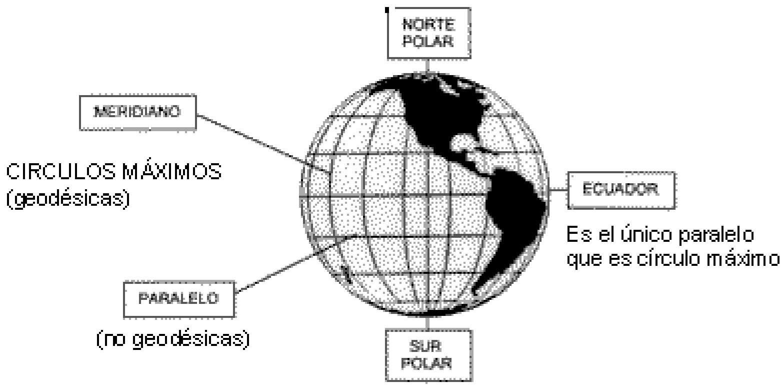
Encontramos apropiado para lograr nuestros objetivos hacer geometría sobre la esfera, contando con las ventajas del modelo simple, poder mostrar un mundo sin rectas paralelas observando nuestro planeta y posibilidad de emplear variados materiales que permiten la experimentación.

Objetivos
Realizar experiencias sensibles, visuales y táctiles que constituirán, la base de abstracciones posteriores y son claves para el desarrollo del pensamiento geométrico.
Mostrar que intuitivamente se puede acceder a contenidos que tradicionalmente se piensan sólo para niveles superiores.
Desarrollar actividades que acerquen a la comprensión de lo que es un sistema axiomático.

Consolidar lo aprendido de geometría de la esfera, mejorando las conclusiones que se tenían e incursionar en el trazado de figuras sobre la esfera y cálculo de áreas.

Antecedentes

El grupo de estudiantes era básicamente el mismo con el que iniciamos nuestra experiencia con "geometría riemanniana" en el año 2000. Las conclusiones y conocimiento de aquel primer trabajo fueron nuestro punto de partida.



Ya habían descubierto que la distancia menor entre dos puntos A y B, sigue el arco de círculo máximo que pasa por esos dos puntos; "el círculo máximo de una esfera es la recta en nuestro nuevo plano: la superficie esférica".

Conocían el significado del término geodésica: distancia más corta entre dos puntos.

Habían analizado propiedades y postulados de la geometría euclidiana y controlado su validez considerando la superficie de una esfera.

Para situarnos, enunciamos someramente conclusiones que se obtuvieron en aquella oportunidad (alumnos de 6º año, 2do.ciclo de EGB, edades 10-11 años) y presentamos el cuadro comparativo estableciendo diferencias y similitudes entre lo que llamaron plano viejo (plano euclidiano) y plano nuevo (superficie de la esfera).

1. *La longitud de una circunferencia dibujada sobre una superficie esférica oscila entre 2d (2 veces el diámetro) y πd (π por diámetro).*
2. *La suma de los ángulos interiores de un triángulo esférico es mayor que 180º y no tiene el mismo valor para todos.*
3. *Se pueden encontrar triángulos con sus tres ángulos rectos.*
4. *No existen los rectángulos sobre la superficie esférica.*
5. *Para que dos triángulos sean semejantes deben ser iguales.*

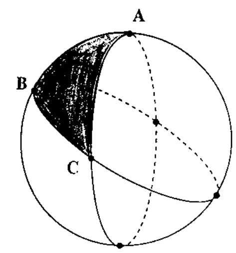
PLANO VIEJO (Plano euclidiano)	**PLANO NUEVO (Superficie de la esfera)**
Dos puntos determinan una recta a la que pertenecen.	Dos puntos cualesquiera determinan una circunferencia máxima a la que pertenecen. Siempre que los puntos no sean antipodales.
El mínimo camino entre dos puntos es el segmento de recta que ellos determinan.	El mínimo camino entre dos puntos es el arco de circunferencia máxima (< que una semicircunferencia)
Una recta es infinita.	Si no se designa ningún punto, el recorrido sobre una circunferencia máxima, puede prolongarse indefinidamente
Por un punto exterior a una recta pasa una y sólo una paralela a ella.	Por un punto exterior a una circunferencia máxima NO pasa ninguna circunferencia máxima paralela a ella. Pasa otra circunferencia máxima que siempre corta a la dada.
Tres puntos que no pertenecen a la misma	Tres puntos determinan un triángulo esférico.

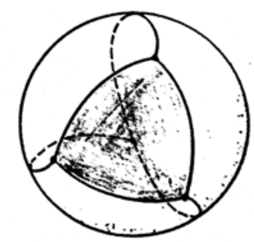
recta determinan un triángulo.	

Materiales empleados: Papeles, cartulinas, hilos, globo terráqueo, esferas de telgopor o de corcho, pelotas, esferas transparentes, trozos de tela, cinta engomada, tijeras, cuchilla para cortar, marcadores, papel de calcar, regla, transportador, compás.

Desarrollo de la experiencia

La experiencia se realizó en uno de los Talleres de Matemáticas que se ofrecen en el Instituto San Agustín de la ciudad de San Luis, durante el primer cuatrimestre del 2002 con alumnos de 8º Año, (Tercer ciclo de EGB 12-13 años de edad).





Teníamos en claro que la observación libre debe ir acompañada de las observaciones provocadas, por lo cual las orientábamos hacia aspectos que no siendo obvios o aparentes podían generar gran interés y provocar la discusión y elaboración de conjeturas. Las observaciones fueron acciones personales realizadas por cada alumno (comparación, medición, manipulación, etc.) para lo cual se usaba material variado, de modo que cada alumno pudiera tener una interiorización propia del problema y obtener una conclusión, que siempre era debatida en una puesta en común.

A efectos de esta presentación exponemos seis temas:

Tema 1: Triángulo.

Usando marcadores, los alumnos dibujaron triángulos sobre las esferas que disponían. Se generó una rica discusión entre ellos, ya que algunos trazaron efectivamente triángulos esféricos, cuyos lados eran trozos de alguna circunferencia máxima y otros que, si bien a simple vista parecía que habían dibujado un triángulo, afinando la observación no lo era, ya que sus lados no eran rectos (no eran parte de una geodésica), esta práctica también sirvió para reafirmar cuáles eran las rectas en el plano que trabajábamos.

Luego pudieron expresar el concepto de triángulo esférico, diciendo: "Para dibujar un triángulo se deben trazar tres puntos A,B,C y las rectas AC, BC y AB, recordando que AC, BC y AB son trozos de circunferencias máximas".

Llegado a este punto, planteamos las siguientes preguntas:

¿Hay que imponer alguna condición a los puntos A, B y C para que determinen un triángulo sobre la esfera? ¿Es posible que dos puntos, A y B sean antipodales?.

Siguieron trabajando experimentalmente y vieron que se debe pedir que los tres puntos A, B y C no deben estar sobre la misma recta (misma geodésica) y además dos de ellos no pueden ser antipodales.

Así enriquecieron la conclusión anterior y quedó: *Tres puntos que no pertenezcan a la misma circunferencia máxima determinan un triángulo esférico, siempre que dos de ellos no sean antipodales.*

Tema 2: Suma de los ángulos interiores de un triángulo.

Confiando en el procedimiento que resultó más exitoso para medir ángulos:

Calcar el ángulo a medir sobre la esfera en una hoja de papel muy cerca de su vértice y luego prolongar sus lados (considerar la tangente) para medirlo en el plano, habían obtenido que:

La suma de los ángulos interiores de un triángulo esférico es mayor que 180º.

Se planteó mejorar la observación: "mayor que 180º". Estaba latente la pregunta: ¿Puede llegar a valores grandes, como por ejemplo 800º?

Volvieron a experimentar, nuevamente dibujaron triángulos con dos ángulos rectos. Bastaba situar dos puntos A y B sobre el Ecuador y el otro punto, C en uno de los polos. Redescubrieron el otro caso notable: trazaron por los polos dos rectas (circunferencias máximas) perpendiculares y las cortaron con una recta a la altura del Ecuador terrestre, obtuvieron ocho triángulos con sus tres ángulos rectos.

Es decir que eligiendo el segmento AB como un cuarto del Ecuador terrestre y el punto C en uno de los polos obtenían un triángulo equilátero con tres ángulos rectos.

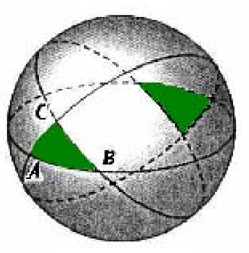
Así pudieron concluir que sobre la superficie de la esfera se pueden trazar triángulos con sus tres ángulos rectos, (tri-rectángulos), para estos la suma de sus ángulos interiores es 270º. Continuaron dibujando gran cantidad de triángulos cóncavos y convexos (buscando posiciones límites), hasta obtener la conclusión:

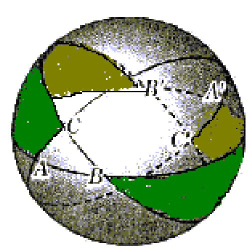
La suma de los ángulos interiores de un triángulo, ya sea cóncavo o convexo, varía entre 180º y 540º.

El máximo valor para triángulos convexos se obtiene cuando cada ángulo se aproxima 180º, por lo cual la suma se acerca a 180º x 3= 540º. Para el caso de los triángulos cóncavos, el máximo valor se obtiene cuando el ángulo cóncavo se aproxima a 360º y los otros dos se hacen casi 90º. Luego: 360º + 90º + 90º = 540º.

El mínimo cercano a 180º se logra con triángulos de pequeñas dimensiones, ya tenían claro que en porciones pequeñas, la superficie de la esfera se comporta como una parte del plano.

Tema 3: Figuras formadas por tres circunferencias máximas.





Aprovechando las tres circunferencias máximas que trazaban para marcar un triángulo, se pidió que observaran si encontraban alguna otra propiedad o figura que quedara formada al trazar esas geodésicas. Vieron que todas las figuras que se forman son triángulos. Los pintaron de distintos colores y pudieron comprobar que se formaban ocho triángulos, llegando a conjeturar además que: "los triángulos opuestos son iguales".

Para verificar esta hipótesis utilizaron una esfera transparente, y confirmaron que:

Siempre quedan formados 8 triángulos.

Cada triángulo es opuesto a un triángulo que es su reflejo a través del centro de la esfera

Tema 4: Figuras de menos de tres lados.

Con facilidad pintaron sobre la superficie esférica figuras de dos lados rectos.

Una gran diferencia con la geometría en el plano, es que dos rectas no pueden encerrar una superficie, pero sobre la esfera, dos círculos máximos forman una figura de dos lados que encierra un área. Se llama biángulo, también se emplea el nombre de huso, cuña esférica o luna para designar esta figura. Los alumnos la descubrieron experimentando con los materiales y sin haber hecho una hipótesis previa.

Además llegaron a concluir que existen figuras de un solo lado recto. El único lado recto es una circunferencia máxima, la figura es una semiesfera, o un hemisferio para usar el nombre dado cuando se estudia geografía. Dos hemisferios cubren la tierra.
Concluyeron que: hay "polígonos" de uno y dos lados.

Tema 5: Polígonos regulares
Surgió la cuestión de cómo dibujar polígonos regulares sobre la esfera, o sea polígonos que tuvieran la propiedad de lados de igual medida y ángulos iguales.
¿Cómo dibujar un cuadrado?
Para trazar un cuadrado se hicieron muchos experimentos. Teniendo siempre en mente que querían lograr igualdad de ángulos, después de numerosos intentos obtuvieron una manera práctica: trazaron dos círculos máximos intersecados a 90º (equivalente a 4 meridianos). Desde el punto de corte, "N", marcaron cuatro puntos, A, B, C y D uno sobre cada meridiano de modo que NA, NB, NC y ND tuvieran la misma longitud, a continuación unieron con rectas (círculos máximos) los puntos A, B, C y D, la figura tiene cuatro ángulos iguales y lados de igual longitud, puede obtenerse un cuadrado cóncavo o uno convexo, según como se tracen los lados.
Para dibujar un hexágono se trazaron 6 meridianos desde el polo N, con separación de 60º, y procedieron como para el cuadrado.
¿Cuál era la medida de los ángulos interiores de estas figuras?
Tanto para el cuadrado como para el hexágono observaron que el ángulo interior de mayor medida lo conseguían cuándo los vértices están muy cerca del ecuador geográfico, (en el límite los ángulos interiores son de 180º y el polígono resulta un hemisferio) y el ángulo de menor medida se consigue acercando los vértices al polo, siempre en un plano paralelo al ecuador. Así comprobaron que
Para el cuadrado sobre la esfera el ángulo interior $\leftarrow$ varía entre 90º y 180º, es decir
$90^o < \leftarrow < 180^o$, y para el hexágono la variación es: $120^o < \leftarrow < 180^o$. Por lo tanto se concluyó que: *El valor de la suma de los ángulos interiores de cuadrado trazado sobre una esfera oscila entre 360º y 720º.*
Tema 6: Cálculo de áreas en la superficie esférica.
Los primeros intentos para calcular el área de un triángulo cualquiera se hizo por aproximación, sirvió para interiorizarse con el concepto de área.
Luego se decidió utilizar la fórmula de área de la esfera $A=4\pi.r^2$ y a partir de ella intentar conclusiones para otras figuras sobre la esfera.
La más simple, el área de un hemisferio: $2\pi.r^2$ (mitad del área de la esfera).
Sabían que toda esfera queda cubierta con 8 triángulos que tienen sus tres ángulos rectos. Por lo cual el área de uno de estos triángulos es la octava parte del área de la esfera, es decir Area del tri-rectángulo = $\frac{1}{2}\pi.r^2$
Consideraron otro caso particular: la esfera se puede cubrir con doce triángulos isósceles cuyos ángulos de la base miden 90º y el del vértice 60º. (Trazar tres rectas por el polo a 60º y cortarlas con el ecuador). Cada triángulo es la doceava parte de la esfera, luego su área es

$$\frac{4\pi r^2}{12} = \frac{\pi}{3} r^2.$$

A efectos de continuar con la experimentación se introdujo una nueva definición: *"el exceso de un triángulo esférico es igual a la suma de los ángulos interiores del triángulo menos 180*" o usando radianes: $(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$

Y a continuación se enunció el siguiente Lema:

El área de un triángulo esférico es igual al producto de r^2 *por el exceso del triángulo. Es decir: Área del triángulo con ángulos interiores* $(\alpha, \beta, \gamma) = r^2 (\alpha + \beta + \gamma - \pi)$.

Aplicaron la nueva fórmula para calcular áreas de tri-rectángulos y de los triángulos isósceles que conocían y verificaron/compararon los resultados que tenían.

La esfera está dividida en dos lunas (cada una es un hemisferio), dividiendo con un meridiano el hemisferio a 90º, obtuvieron dos lunas, el área de cada una es πR^2, (mitad del hemisferio) continuando con este proceso vieron que podían obtener áreas de otras lunas. Se intentó la generalización para obtener una fórmula.

¿Qué ocurre si dividimos un hemisferio en n lunas iguales? ¿Cuál es el ángulo de cada luna? Claramente el ángulo de cada luna es π/n, por lo que el área de cada una de estas lunas es $2\pi R^2/n$.

Dado que la manipulación algebraica de los alumnos no estaba madura, no se pudo continuar el análisis para obtener la fórmula general del área de una luna o cuña esférica cuyo ángulo fuera cualquiera. Pensamos continuar en esta dirección, emplear álgebra para encontrar relaciones, hacer uso de la proporcionalidad y dar justificación intuitiva-algebraica de varias fórmulas.

Conclusiones de la investigación

Los alumnos participantes se sintieron actores y no espectadores en el proceso de construcción de los nuevos conocimientos. Pudieron formular, controlar y modificar hipótesis, enriqueciendo cada vez más el proceso de aprendizaje.

La curiosidad se vio estimulada a cada momento, ya que fueron generadores de constantes preguntas.

Se mantuvo un clima afectivo que permitió la participación individual y la imprescindible discusión en grupo.

Se logró aumentar las habilidades de visualización, clave para el desarrollo del pensamiento geométrico.

Las discusiones y el ir y venir sobre conceptos geométricos permitió consolidarlos.

La Geometría aporta temas donde es factible desarrollar investigaciones que aseguren la participación de los escolares.

Las actividades de investigar y comparar la geometría Euclidiana con una no Euclidiana. condujeron a la comprensión de lo que es un sistema axiomático.

Otros resultados

A los participantes, el tema les resultó agradable e interesante, por lo cual decidieron comunicar su vivencia. La investigación con sus conclusiones fue presentada a la Feria Provincial de Ciencia por tres de las alumnas que asistieron al taller, con el título de: "El plano curvo". Obtuvo premio en su nivel y categoría en la Provincia y consiguió el puntaje para en el certamen Nacional que se realizó en Ushuaia (Arg) en Noviembre del 2002, donde obtuvo el primer lugar en su categoría.

Bibliografía

Alsina, C.; Fortuny, J. y Pérez, R. *¿Por qué Geometría? Propuesta Didácticas para la ESO*. Ed. Síntesis.
Boyer Carl. *Historia de la Matemática*. Editorial Alianza Universidad Textos.

Colera, J.- Guzman, M. *Matemáticas 1, 2 Y 3*. Editorial Anaya.
Steen L. A. (1999) *Las Matemáticas en la vida cotidiana*. *Capítulo: Nuevas Geometría para un nuevo Universo*. Editorial Addison y Wesley.
Filloy Yagúe, E. *Didáctica e Historia de La Geometría Euclidiana*. Grupo Editorial Iberomérica.
Guasco, M.J. y Crespo, C. *Geometría: Su enseñanza*. Editorial Pro Ciencia. Conicet.
Kasner y Newman. *Matemáticas e Imaginación*. Editorial Librería Hachette S. A.
Guzman, Colera y Salvador. *Matemáticas 1,2 y 3*. Editorial Anaya.
Oserman, R. *La poesía del Universo*. Editorial Drakontos.
Santaló, L. *Geometrías no euclidianas*. Cuadernos OEA.
Santaló, L. *La geometría en la formación de profesores*. Editorial, Red Olímpica.
Singer D.A. *Geometry: plane and fancy*. Editorial Springer.

HACER ATRACTIVO EL APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA, INSERTANDO LOS CONTENIDOS DENTRO DE MODELOS REALES

Sara Arancibia C
Universidad Diego Portales
sara.arancibia@udp.cl

Resumen
Diversos estudios sobre tecnologías educativas para la docencia superior, formulan la participación activa y aprendizajes significativos, complementado con trabajo interactivo y autoestima positiva. Investigadores en educación afirman que "Construimos significados cuando relacionamos las nuevas informaciones con nuestros esquemas previos de comprensión de la realidad". Por tanto, se propone incluir los contenidos dentro de situaciones naturales que impliquen el enfrentamiento del alumno con tareas que se asemejen a las complejas situaciones de la vida real y profesional. Esto apoyado con tecnología, donde el objetivo sea desarrollar actividades que permitan al alumno descubrir relaciones, propiedades, y donde desarrolle la capacidad de análisis, creatividad y una actitud crítica hacia los resultados.

Introducción

La mayoría de los estudiantes consideran la matemática relativamente ajena a sus propios intereses, desconectada del mundo real. La actividad de resolución de problemas no se presenta como un medio para responder a una problemática real, sino como un fin en sí misma, donde el alumno aprende métodos y técnicas de resolución.

"Saber matemáticas" no es solamente saber definiciones, teoremas y técnicas para reconocer la ocasión de utilizarlos y de aplicarlos, es "ocuparse de problemas" en un sentido más amplio que incluye encontrar buenas preguntas tanto como encontrar soluciones. Un buen aprendizaje por parte del alumno, exige que éste intervenga en la actividad matemática, lo cual significa que formule enunciados y pruebe proposiciones, que construya modelos, lenguajes, conceptos y teorías, que los ponga a prueba e intercambie con otros.

Metodología propuesta

En el logro de un aprendizaje significativo se requiere que exista una correspondencia en el "qué enseñar" y en el "cómo enseñar". En el "qué enseñar" es necesario tener claro el programa de estudio del curso, sus objetivos y los contenidos. En el cómo enseñar es importante definir desde un principio, las actividades que se realizarán durante el curso, acorde a los contenidos del programa. La metodología que se propone es orientar los problemas a aplicaciones insertas en contextos naturales, donde el alumno tome un rol activo en la clase y logre visualizar la importancia de las matemáticas en el mundo real. La propuesta es dar énfasis a problemas que provoquen en el alumno interés por aprender. Según la experiencia es recomendable realizar trabajos en equipo, como trabajos de investigación, casos de estudio, exposiciones, juegos. Estas actividades interactivas permiten que los alumnos definan colectivamente sus objetivos, tomen decisiones, repartan tareas, se comprometan en su realización, visualicen un resultado y evalúen el desempeño de la actividad. Además permiten;

- Desarrollo de la capacidad de ponerse metas a corto mediano y largo plazo
- Capacidad para lograr esas metas, conjuntamente con el esfuerzo para obtenerlas.

A continuación veremos un ejemplo aplicado a un curso de matemática, donde se plantea los objetivos generales, y ejemplos de actividades y problemas de acuerdo a ciertos contenidos.

Ejemplo

Objetivos generales:

Desarrollar en el alumno:

- La capacidad de modelamiento y resolución matemática de variados tipos de problemas
- La capacidad de descubrir relaciones entre números u objetos, deducir fórmulas y aplicarlas en la resolución de problemas
- El sentido crítico ante el planteamiento de un problema, junto con entender la necesidad de la matemática como herramienta fundamental en la toma de decisiones

Los ejemplos de problemas estarán de acuerdo a los siguientes temas
"Planteo y resolución de problemas" y "Funciones y aplicaciones"

Tema: Planteo y resolución de problemas

Contenidos: Porcentajes, raíces, ecuaciones, inecuaciones, y métodos de resolución de sistemas de ecuaciones

Algunas actividades

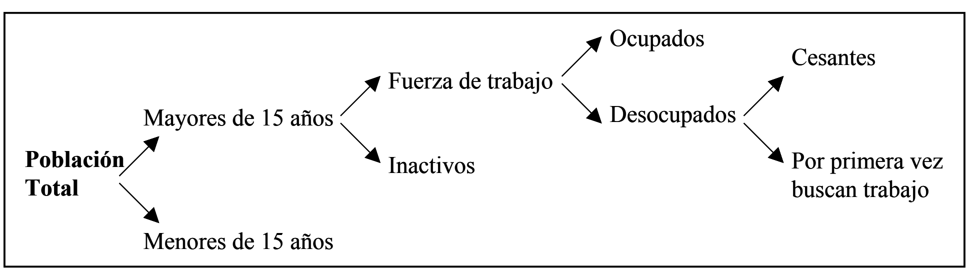
- Plantear problemas donde el alumno proponga formas de resolverlos
- Formalizar el desarrollo del problema, utilizando herramientas matemáticas, como por ejemplo: El planteamiento de ecuaciones e inecuaciones y su resolución, identificando datos y variables relevantes. Resolver en grupo problemas aplicados a la realidad, descubrir relaciones, analizar propiedades.

Ejemplos de problemas

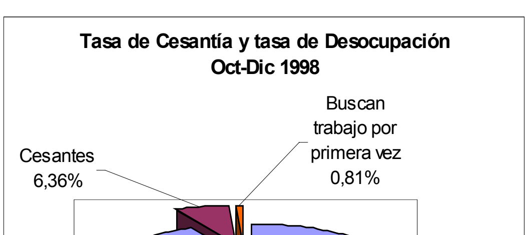
Aplicación: Tasa de desempleo- Tasa de cesantía

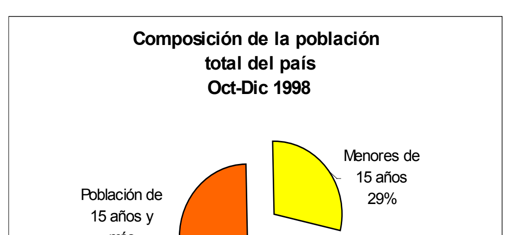
En Chile, la encuesta más importante para medir el desempleo la hace periódicamente el Instituto Nacional de Estadística (INE)

¿Cuándo se considera que una persona está desempleada?. Las personas desempleadas se pueden distribuir en dos grupos: aquellas que buscan trabajo por primera vez y que cuando se realiza la encuesta no han encontrado un puesto de trabajo, y los cesantes, es decir personas que ya han trabajado con anterioridad y que aunque tienen experiencia laboral, no



encuentran un empleo.





Sabiendo que la población total del país en el trimestre Oct _Dic 1998 se estimó en 14.896.700.habitantes y de acuerdo a los datos de las gráficas responda si es posible las siguientes preguntas:

- ¿Cuántos habitantes menores de 15 años se estimó para el trimestre Oct-Dic de 1998, y cuántos habitantes mayores de 15 años?
- Para el trimestre Oct-Dic de 1998 ¿ cuál fue la estimación para los inactivos?
- ¿A cuánto asciende la tasa de desocupación en el trimestre Oct-Dic de 1998, y qué significa?. Si la Fuerza de trabajo en el trimestre Oct-Dic de1996 fue 5.600.700 habitantes, y los que buscaban trabajo por primera vez 44.000 habitantes.¿Cuántos desocupados había en ese trimestre?

Aplicación: Cálculo del IPC

El Índice de Precios al Consumidor o IPC es el indicador mensual que mide la inflación en Chile. El IPC del país está compuesto de una canasta de bienes y servicios y cada uno de ellos tiene una ponderación distinta de acuerdo con la importancia de éstos en el presupuesto familiar de los chilenos. El IPC es el Índice de Precios al Consumidor e intenta reflejar la variación de la inflación en un determinado período.

¿Cuánto a sido la inflación del mes de Abril del 2002?

¿Cuánto ha variado la inflación entre Dic de 2001 y Dic del 2002?

Proyecto de investigación: El IPC

¿Qué elementos componen la canasta de bienes ?

Resumir la metodología de cálculo del IPC

¿Cuál es la utilidad del IPC?.

Muestre un ejemplo de cómo utilizar el IPC

¿La inflación acumulada del año, es igual a la suma de las inflaciones mensuales de los 12 meses del año?¿Se puede determinar el índice conociendo la inflación del período?. Argumente su respuesta.

Tema:Funciones y aplicaciones
Contenidos: Funciones de una y más variables, tipos de funciones, propiedades, funciones especiales (demanda y oferta), optimización lineal. Algunas actividades

- Descubrir funciones en noticias de actualidad
- Graficar funciones e identificar propiedades de ellas
- Modelar un problema considerando sus restricciones
- Resolver problemas usando funciones
- Enunciar, plantear y analizar problemas básicos de programación lineal

Ejemplos de problemas
Aplicación: Identificar funciones en noticias
Seleccione una noticia del diario e identifique variables (dependiente e independiente) con las cuales se podría obtener una función.
Ejemplo: Título de la noticia: "Aumento de usuarios de Ferrocarril"
Variable dependiente: Cantidad de pasajeros que usan el ferrocarril en el periodo t
Variables independientes:
Precio del pasaje en ferrocarril (en el periodo t)
Precio del pasaje en bus (en el periodo t)
Tiempo de viaje en ferrocarril (en el periodo t)
Calidad del servicio (en el periodo t)

Aplicación: Ingresos de un Aeropuerto
Considere el aeropuerto "Aeroalas", que recibe ingresos por pasajeros embarcados y por servicios comerciales como Renta Car, restaurante, estacionamientos, etc. Además recibe un subsidio anual de parte de la DGAC. Con el fin de realizar una valoración económica del aeropuerto, la administración desea saber los ingresos futuros proyectados para los años 2000 a 2007 (fin del periodo de concesión).

Tabla 1

Año	Pasajeros embarcados
2000	270081
2001	299790
2002	323773
2003	349675
2004	374152
2005	400434
2006	428367
2007	458353

Tabla 2

Año	Subsidio (DGAC)
2000	5405
2001	5783
2002	6188
2003	6621
2004	7084
2005	7580
2006	8111
2007	8678

Para esto se ha considerado la proyección de pasajeros embarcados que aparece en la tabla 1. La tarifa por pasajero embarcado es 0,2115 UF. El ingreso por servicios comerciales se ha estimado que crecerá anualmente de acuerdo a las tasas indicadas en las tablas. Determine la función de ingresos totales para cada año del aeropuerto entregando el flujo de ingresos futuros.

Aplicación: Utilidades

La administración del Aeropuerto "Aero-alas", además de conocer los ingresos futuros, desea saber la utilidad proyectada para los años 2000 a 2007. Los costos operacionales se han estimado que crecerán anualmente de acuerdo a las tasas indicadas en la tabla de costos.

Ingresos subconcesiones y servicios comerciales

	Crecimiento	2000
Renta Car	0	4545
Taxis	0,01	677
Bus	0,01	390
Transfer	0,01	616
Cajero autom	0	132
Restaurante	0,1	1233
Estacioamiento	0,01	3151
Líneas Aéreas	0,01	2336
Comunicaciones	0,01	574
Publicidad	0,01	2525
Salón VIP	0,01	448
Locales comerciales	0,01	1483
Total		18110

Determine la proyección de utilidades para los años 2000 a 2007

Costos

Costos Operacionales		2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Costos de operación									
Costos administrativos	0,005	12120	12181	12242	12303	12364	12426	12488	12551
Gastos generales	0,01	2266	2289	2312	2335	2358	2382	2405	2429
Pagos al MOP	0	300	300	300	300	300	300	300	300
Costos de mantención									
conservación , mantención equipos y pistas		4200	8484	4242	8569	4284	4327	8741	4371

Aplicación: Impuestos

Existen dos tipos de impuestos a los ingresos de las personas: el impuesto único al trabajo (segunda categoría) y el impuesto global complementario. El impuesto único al trabajo afecta a todos los trabajadores dependientes y se paga mensualmente. La empresa lo deduce del sueldo del trabajador y se lo paga al Estado. El impuesto global complementario se declara una vez al año, pero se hacen retenciones y pagos provisionales mensuales al Fisco como anticipo del impuesto anual. El global complementario lo pagan los trabajadores independientes (por ejemplo un empresario o profesional que trabaja por su cuenta) y todas aquellas personas que tienen más de una fuente de renta.

TABLA DE IMPUESTO GLOBLAL COMPLEMENTARIO
AÑO TRIBUTARIO 2000
RENTA NETA GLOBAL

Desde	Hasta	FACTOR	CANTIDAD A REBAJAR (INCLUYE CREDITO 10% de 1 UTA)
0,00	3.166.560,00	Exento	Exento
3.166.560,01	9.499.680,00	0,05	189.993,60
9.499.680,01	15.832.800,00	0,1	664.977,60
15.832.800,01	22.165.920,00	0,15	1.456.617,60
22.165.920,01	28.499.040,00	0,25	3.673.209,60
28.499.040,01	37.998.720,00	0,35	6.523.113,60
37.998.720,01	y mas	0,45	10.322.985,60

Fuente: El Diario- Marzo 2000

Problema: Determine la función por partes que permita calcular el impuesto global complementario que debe pagar una persona si su ingreso es x y grafique.

Problema: Determine una función para el impuesto a las utilidades de las empresa, sabiendo que este impuesto llamado de Primera categoría, es un impuesto proporcional porque tiene una tasa única de 15% sobre las utilidades, cualquiera sea el nivel de éstas.

Caso de estudio: Alternativas de salario

Considere la siguiente situación, a la que se enfrentan algunas personas cuando tienen que decidir acerca de elegir un trabajo, o distintas posibilidades de su salario mensual. La señorita Peralta se dedica a la venta de seguros de vida y tiene que elegir entre las siguientes alternativas de salario:

a) Sueldo base mensual de $75.000 más 0,8% de comisión sobre las ventas realizadas en el mes
b) Sueldo mensual de $70.000 más 3.2% de comisión sobre las ventas realizadas durante el mes.
c) Sueldo mensual de $60.000 más 4.5% de comisión sobre las ventas realizadas durante el mes.

Cada paquete de seguro de vida tiene un valor inicial de $25.000, sobre el cual se le aplica el porcentaje de comisión a la señorita Peralta.

¿Qué le recomendaría a la señorita Peralta y por qué? Grafique en la calculadora y analice el problema

Aplicación : Analizar propiedades

Problema: Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Argumente analíticamente y en forma gráfica usando calculadora.

1) La función f es equivalente a la función g

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x}} \qquad g(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}}$$

322222

2) Para todo x en IR, se cumple que $x \leq x^2$

3) Para todo x en IR-{0}, se cumple que $\frac{1}{x} \leq 1$

Aspectos clave

- Insertar los contenidos dentro de situaciones reales, para lograr aprendizajes significativos. Favorecer el trabajo interactivo.
- Que el alumno tome un rol activo en la clase favoreciendo la autoestima positiva.

Bibliografía

Allende, F. *Curso Tecnologías Educativas Para La Innovación En La Docencia Superior*. Universidad de Chile.

Chevallard, Y. Bosch, M. Gascón, J.(1997). Estudiar Matemáticas. *Cuadernos De Educación*. Editorial Horsori.

Alonso J. Catarla E.. *La motivación en el aula*. Educat

Díaz, F. Barriga A. *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. Una interpretación constructivista*. Mac Graw Hill

Lardner, A. Matemática Aplicadas A La Administración Y Economía. Prentice Hall

HORMIGAS Y ALGORITMOS

Ema Barreda y Jorge Yones
Colegio de Humanidades, Villarrica, Chile
embace13@netexplora.com

Resumen
El propósito principal de esta comunicación, en el contexto de un módulo mayor, es presentar un ejemplo ilustrativo del modelo de las hormigas para introducir en los el trabajo con modelos a los estudiantes y favorecer además su motivación para el trabajo en aula. Idealmente, el profesor dará una charla en una sesión breve, antes de pasar a trabajar los demás materiales contenidos en el módulo. Sin embargo, también es posible utilizar la charla como forma de difusión independiente, hacia otras audiencias (como apoderados u otros alumnos). El módulo cuenta con textos de apoyo sobre las materias que se abordan, así como la Guía del Profesor de las actividades de aula, además de un cuaderno del alumno para desarrollar su trabajo. El ejemplo que se presenta: hormigas y matemáticas. ¿Qué tienen que ver? En principio el nombre sorprende, incluso a los matemáticos. No se trata de usar las hormigas reales para resolver problemas matemáticos, ni de usar las matemáticas para resolverle sus problemas a las hormigas. De lo que se trata es de estudiar cómo las hormigas resuelven los problemas, e imitarlas para resolver los nuestros (con *hormigas virtuales*). En este artículo, se habla de hormigas. Luego, de algunas "gracias" que hacen las hormigas. Después se toma un par de problemas interesantes y se presenta la forma en que las hormigas los resuelven. Finalmente se muestra la forma en que estos modelos del comportamiento de las hormigas ayudan a resolver nuestros problemas.

Introducción

En general, un MODELO es una representación simplificada de algo que existe en la realidad, y lo usamos para entender mejor esa realidad, o para relacionarnos mejor con ella. En este caso, lo que estamos haciendo es un MODELO del comportamiento "ordenador" de las hormigas, tratando de abstraer todo lo que no es relevante para ese fin. Pero además, entendiendo estos modelos, podemos copiarles la idea a las hormigas y tratar de usarla para resolver problemas que se nos presentan a nosotros.
Cuando en ciencias uno dice "este fenómeno se explica por tal cosa", la forma de mostrar que efectivamente esa explicación *da cuenta* del fenómeno, es hacer un *modelo*, y ver si el modelo reproduce el fenómeno que queríamos explicar. La pregunta entonces: si el modelo se basa en el comportamiento de las hormigas, ¿tiene otras "gracias" este modelo para resolver problemas, y tiene otras aplicaciones concretas? ¿Y qué ventajas tienen estos métodos de hormigas? Existen otros métodos para resolver problemas; los matemáticos llevan décadas inventando métodos ("algoritmos"), para resolver el problema de camino más corto, el del vendedor viajero, etc. Una primera ventaja, es que para algunos problemas (como el de ruteo de llamadas telefónicas), la mejor solución conocida es la que se obtuvo con hormigas. Además, los métodos "hormiguísticos" tienen varias gracias, que los distinguen de otros métodos. Nos concentramos en la forma en que las hormigas resuelven *un par de problemas particulares*; imitándolas, logramos resolver un montón de problemas. En resumen, no sólo nos interesan las hormigas por todo lo que se pueda decir de ellas. También nos interesa porque son un ejemplo de *sistema complejo*: un sistema formado por unidades simples, que interactúan de manera simple, pero que en su conjunto produce comportamientos muy complejos.

Hablemos, entonces, de las hormigas

Recordemos cómo son: Las hormigas exploran el mundo por huellas, en largas filas, y así buscan su alimento. Todos los caminos conducen al hormiguero. A veces es un montículo, otras veces está por completo bajo tierra. Dentro del hormiguero, hay muchos túneles y cámaras, donde se almacena comida, se cuida a las larvas, vive la Reina, descansan las hormigas, etc. La Reina suele ser más grande que las demás hormigas. No gobierna ni nada parecido: lo único que hace es poner huevos. Las obreras recogen los huevos y comienzan la crianza. En ciertos días del año las “princesas” (posibles nuevas Reinas) emprenden el vuelo, y también vuelan los machos (que sólo existen en esa época). Se juntan las hormigas de todos los hormigueros de la zona, se cruzan, y con eso la hembra queda fecundada para el resto de su vida. Se instala en algún rincón, y empieza a poner huevos. Cuando las primeras hijas –obreras- empiezan a salir, empiezan a buscar comida y a excavar, hasta que al cabo de un tiempo el hormiguero ya está formado.

Algunas gracias de las hormigas. Esta no es una lista exhaustiva de lo que las hormigas hacen, sólo son algunos ejemplos. Tampoco debe entenderse que *todas* las hormigas hacen *todo* esto; en realidad, no existe ninguna especie de hormigas que haga todas estas cosas a la vez. Se reparten las tareas de manera eficiente: distintos grupos de hormigas desempeñan las distintas tareas en el hormiguero. Si uno "secuestra" las hormigas que están desempeñando una tarea, de manera casi instantánea algunas hormigas que estaban haciendo otra cosa van a cambiar de tarea, de modo que ninguna tarea quede sin hacer. Construyen nidos extremadamente complejos: a veces muy profundos, pero perfectamente organizados, con cámaras especiales dedicadas a alimentos, larvas, la reina, "descanso"... Y aunque la reina esté muy abajo, y no vea la luz del sol en años, se las arreglan para que tenga un buen sistema de aireación, y de regulación de temperatura. Son capaces de encontrar comida a distancias enormes del nido, y "explotar" esa comida de manera organizada. Obviamente, "enorme" es en términos hormiguiles.
Tienen agricultura: cuando una hormiga camina con una hoja, no es para comerla, pues no son capaces de digerir celulosa. Lo que hace es llevarla a una cámara del nido en que las hormigas cultivan hongos... Le dan las hojas a los hongos, que se las comen, y luego las hormigas se alimentan de los hongos. También *tienen ganadería*, por ejemplo con los pulgones de las rosas: las hormigas los cuidan, se preocupan de alimentarlos, y ellas a su vez se alimentan de una sustancia lechosa que secretan los pulgones.
Saben de guerra (hay especies que atacan hormigueros ajenos, matan las hormigas, las comen, etc.), *esclavitud* (algunas obligan a otras especies a trabajar para ellas), y también de algo que aquí llamo *espionaje*, pero es más bien infiltración: es el caso de una especie de hormigas que no construye nido propio, sino que roba nidos ajenos. Cuando una "princesa" (una hormiga destinada a fundar un hormiguero y ser su reina) abandona su nido materno, lo que hace es ponerse a trabajar de obrera en alguna colonia de otra especie de hormigas. Al comienzo la rechazan, porque huele distinto, pero lentamente, en la medida en que se va impregnando del olor de sus nuevas compañeras, se le permite el acceso a zonas más cercanas al nido, hasta que finalmente, cuando las otras ya no la distinguen como una extraña, logra llegar hasta la cámara de la reina... y la mata. A partir de ese momento, la reemplaza, y los huevos que las hormigas recogen, y cuidan, son los suyos, y no los de la especie original. Por lo tanto, al cabo de un tiempo todas las nuevas hormigas serán hijas suyas, y el hormiguero se habrá transformado en uno de la especie invasora.

Organizan marchas de cientos de miles de individuos: ríos de hormigas. Y que están bien organizadas: llevan consigo sus huevos, sus larvas, su reina...
Forman puentes con sus propios cuerpos: hay hormigas que cuelgan unas de otras, para cerrar una hoja, juntando sus bordes. Una vez que lo hayan hecho, llegará otra hormiga, trayendo una larva, y usará la baba de esa larva como pegamento para cerrar la hoja definitivamente (la larva se usa como una especie de stick-fix). Luego la hoja podrá ser usada para almacenar comida, agua, etc...
Una de las que nos va a interesar: las hormigas *encuentran los caminos más cortos hasta la comida*. Es raro que habiendo más de un camino entre la comida y el nido, las hormigas prefieran el más largo. Normalmente, logran encontrar el más corto. Y encontrar caminos más cortos es un problema que a los matemáticos nos interesa resolver.

Hormigas ingenieros. Aquí se puede hacer la pregunta: ¿cómo hacen lo que hacen?
Ilustraré lo que NO ocurre con las hormigas. No tienen lenguaje para hablarse unas a otras. No tienen memoria, salvo muy, muy breve, así que incluso si tuvieran lenguaje, no podrían decirse mucho. No existe un mando central. Es una sociedad "democrática", o más bien "anárquica", en el sentido de que nadie da las órdenes. La "reina" NO GOBIERNA, su función es sólo poner huevos. No sólo no hay mando central, ni control alguno, sino que tampoco hay información centralizada. No hay planos del hormiguero. No hay mapas del terreno circundante, en los cuales se pudiera estudiar cómo llegar rápido a la comida. No contestaremos el "¿cómo lo hacen?" respecto a todas las "gracias" de las hormigas (en algunos casos, todavía no se conoce la respuesta), sino que nos concentraremos en dos ejemplos particulares: *el apilamiento de cosas,* y *la búsqueda de los caminos más cortos.*
Otra de las cosas que hacen las hormigas es “ordenar” cosas. Lo hacen en varias situaciones. Por ejemplo, con la basura que está cerca de la entrada del hormiguero: van formando con ella una rumita. También ocurre con las hormigas muertas: en lugar de dejar un desparramo de pequeños ataúdes, las hormigas forman una gran ruma con todos los cadáveres. ¿Quién ordena la formación de un cementerio de hormigas? Algo parecido hacen con las larvas, claro que ahí la cosa es un poquito más complicada: ordenan las larvas según su tamaño, las más chicas con las más chicas, las más grandes con las más grandes.
Si todas las hormigas son tontas, no tienen memoria, casi no tienen vista, y nadie les da instrucciones, ¿cómo pueden ordenar los distintos tamaños en distintos lugares? ¿Quién decide dónde se va a acumular tal o tal cosa? Ese es el misterio, y queremos hallar una solución.
Tomar lo esencial: un modelo. *De aquí en adelante hablaremos de basura, aunque ya sabemos que se puede tratar de diversas cosas.* Las hormigas ordenan la basura; eso es un hecho. La pregunta es, ¿cómo? Hay algunas cosas que nuestro sentido común nos aconseja descartar: es difícil, por ejemplo, que el mecanismo de reproducción de las hormigas tenga algo que ver con lo que hacen al ordenar basura. Tampoco la forma en que están hechas por dentro. Intuitivamente, sea lo que sea lo que hagan las hormigas, uno esperaría que fuese algo reproducible, imitable, que sólo dependiera de la forma en que se están comportando. O sea, queremos capturar aquellos aspectos del comportamiento de las hormigas que son esenciales para se produzca el apilamiento. Así estaremos más seguros de descubrir el mecanismo. En este caso, lo que estamos haciendo es un MODELO del comportamiento “ordenador” de las hormigas, tratando de abstraer todo lo que no es relevante para ese fin. Lo primero es preguntarse, ¿qué es lo que uno ve, si se pone a mirar a un grupo de

hormigas que está ordenando basura, o larvas? Da la impresión de que no estuvieran haciendo nada. Las hormigas caminan de un lado para otro ("al tuntún"), recogen algo, lo botan, recogen otra cosa, la botan por ahí, y no parece que estuvieran haciendo nada planificado. Por eso, un primer modelo de la situación sería imaginar que las hormigas hacen precisamente eso: caminar al azar. Para simplificar, nuestro mundo será una hoja cuadriculada, donde las hormigas se podrán mover de un cuadrito a otro (hacia arriba, hacia abajo, hacia la derecha, o hacia la izquierda). Se moverán al azar: la probabilidad de que se muevan en cualquiera de las direcciones es la misma. Cada hormiga podrá andar cargada (con una unidad de basura), o descargada. Si una hormiga que anda descargada encuentra basura, la recoge. Si una hormiga que anda cargada se topa con más basura (es decir, si el cuadrito al que se piensa mover tiene basura), entonces deja en el suelo la basura que traía.
Formación de rumas. Se han propuesto dos elementos que podrían añadirse al modelo; ambos tienen justificación en las observaciones que han hecho los mirmecólogos. Uno es que la hormiga no recoja *de inmediato* después de que ha botado algo (que haya un *tiempo de espera* entre botar y recoger). El otro es que el comportamiento de la hormiga, al botar y al recoger, esté determinado por *la cantidad de basura* que hay alrededor suyo: mientras más basura hay alrededor, es más probable que bote, y menos probable que recoja. Mientras menos basura hay, por lo tanto, es menos probable que bote, y más probable que recoja. Ya sabemos que el sólo vagar/recoger/botar no es capaz de producir la acumulación, y sabemos que al agregar la consideración de la *densidad*, *sí es capaz*... lo que no quiere decir que de verdad sea ese el mecanismo en juego entre las hormigas reales (aunque se cree que sí lo es, incluyendo además el tiempo de espera). El tiempo de espera. Será la cantidad mínima de pasos que la hormiga dará después de haber soltado algo, antes de estar dispuesta a recoger algo. El efecto de la densidad. No hace falta explicar muy en detalle, pero por si acaso, lo que ocurre es lo siguiente. Se consideran las 8 posiciones alrededor de la hormiga (los cuadritos que tocan, al menos en una esquina, al cuadrito en que la hormiga está parada). Sea n la cantidad de cuadritos, de entre esos 8, que tienen basura. Si la hormiga lleva basura, la probabilidad de que la bote es proporcional a n. Si la hormiga no lleva basura, y encuentra un poco, entonces la probabilidad de que la recoja es proporcional a $8\text{-}n$ (o sea, proporcional a la cantidad de cuadritos *sin* basura). Para justificar el primer agregado: la hormiga acaba de soltar algo, por algún motivo (cansancio, por ejemplo), y por eso, mientras le dure su breve memoria, esa razón sigue existiendo, y no querrá recoger. Para justificar lo segundo: si hay demasiada basura alrededor, a la hormiga le cuesta caminar, más aún si lleva carga, así que se siente inclinada a botar la que lleva, o a no recoger la que encuentre.

¿Cómo se forman las rumas? El mismo efecto está presente a todo nivel, y hace que a partir de un desparramo, se vayan formando rumitas, cada vez mayores. Si hay 10 rumas de tamaños distintos, las más grandes tienden a "comerse" a las más chicas. Es cosa de probabilidades, así que siempre es posible que la chica se coma a la grande... pero es muy poco probable. ¿Y si son del mismo tamaño? No importa: como siempre hay movimiento entre las rumas, al azar, se van a producir ligeros desniveles de tamaño, y esos desniveles van a echar a andar el proceso. Un poco más difícil que juntar cosas en un lugar, es juntar las cosas en varios lugar, dependiendo de cómo son. No una ruma, sino varias, cada una de un tipo distinto de "basura". Las hormigas hacen esto en varias situaciones. La más típica es al ordenar las larvas: si están desordenadas, las hormigas son capaces de dejar las más grandes en un lugar, las más chicas en otro, etc... La utilidad que eso tiene para las hormigas es que cada tipo de larva requiere distintos cuidados (distinta alimentación, por ejemplo), y al estar separadas por grupos, es más fácil que las hormigas "nanas", tontas como son, alimenten a cada una de manera apropiada.

Una posible aplicación. A estas alturas ya alguien puede estarse preguntando para qué sirve todo esto. Primero que nada, estamos entendiendo cómo las hormigas resuelven algo, que al comienzo parecía difícil para ellas. Había un misterio, una contradicción entre lo "tonto" de las hormigas y el efecto de su comportamiento, y eso lo estamos resolviendo.

Pero además, ahora que entendimos, podemos copiarles la idea y tratar de usarla para resolver problemas que se nos presentan a nosotros. Ejemplos: las grandes bases de datos de genética. O textos científicos en Internet. O simplemente páginas web. O información sobre personas. Los ejemplos son innumerables. Y la gracia es que con las "hormigas", los conjuntos de datos se pueden "ordenar solos". Pasamos al otro ejemplo. Olvidémosnos de la basura, del recoger y el botar. Ahora el fenómeno que queremos entender, es cómo las hormigas, sin memoria ni mapas, encuentran los caminos más cortos para ir desde el hormiguero hasta la comida. Después de ver el ejemplo anterior, ya no es tanta sorpresa enterarnos de que encuentran los caminos más cortos *sin buscarlos*. La hormiga no tiene idea de que sus actos la harán recorrer el camino más corto. De hecho, así como las otras hormigas "no tenían pensado" juntar la basura, aquí la hormiga no *quiere* buscar el camino más corto, ni *piensa* en eso. Como dijimos: ¡es demasiado simple! Es la evolución la que ha hecho el trabajo, dándole a las hormigas la pauta de comportamiento que resulta más exitosa. Es decir. la conducta de las hormigas está *grabada* en sus genes, son sus instintos, y el efecto que resulta (ya veremos cómo) es que se encuentran las rutas más cortas. En el caso de la formación de rumas, se puede decir lo mismo. La clave para este fenómeno está en una cierta sustancia química, llamada *feromona*. Muchos animales usan feromona, para distintas cosas (es parte de la química de la atracción sexual en los humanos, por ejemplo). Pero el uso que hacen las hormigas es otro: ir marcando los caminos por los que pasan. Una hormiga, cuando va hacia la comida, lo que hace es ir siguiendo la feromona que va encontrando. O sea: si está parada en un cierto punto, va a caminar en la dirección en que huela más feromona. O mejor dicho: va a caminar en cualquier dirección, pero la *probabilidad* de que se vaya en una cierta dirección será proporcional a la cantidad de feromona que haya ahí. Si un camino tiene 2 (gramos, miligramos, da lo mismo en qué se mida, importa la relación) de feromona, y otro tiene 1, entonces más o menos dos de cada tres hormigas escogerán el primero, y una de cada tres escogerá el segundo. Además, la hormiga cuando pasa por alguna parte va dejando feromona, que se agrega a la que ya había.

¿Cuál es la consecuencia? Supongamos que al comienzo no hay feromona. La mitad de las hormigas tomará un camino, la otra mitad otro. Las primeras hormigas que lleguen a la comida, serán las que se vinieron por el lado más corto. Así que en el momento de devolverse, ese camino tendrá más feromona que el otro (pues aún no llegan las que se fueron por ahí). Así que serán más las que tomen ese camino, que las que tomen el otro. Cuando lleguen las que habían tomado el camino viejo, le agregarán un poco a ese, pero al devolverse la mayoría elegirá el corto, porque ya tiene más feromona que el largo. El mecanismo se *retroalimenta*: la mayoría de las hormigas irá tomando el más corto, y eso acentuará la diferencia de feromona entre uno y otro, y eso hará que el favoritismo de las hormigas aumente, etc... Es una retroalimentación, un "círculo vicioso" (aunque virtuoso en este caso), al igual que antes, cuando la ruma grande tendía a comerse a la ruma chica. Un

dato extra: además una hormiga que camina mucho se va agotando y va dejando menos feromona. Así que eso también contribuye a "empobrecer" los caminos largos.
Ok. Suena bonito. ¿Pero funciona? Cuando en ciencias uno dice "este fenómeno se explica por tal cosa", la forma de mostrar que efectivamente esa explicación *da cuenta* del fenómeno, es hacer un *modelo*, y ver si el modelo reproduce el fenómeno que queríamos explicar. Este modelo está hecho en el computador, aunque también se podría hacer con pequeños robots que siguieran las mismas reglas que vamos a explicar (en el MIT lo han hecho). Aquí las "hormigas" serán unos puntitos que se moverán por un *grafo*, trasladándose en cada paso de un *vértice* a otro. (Ejemplos: los niños y quién es amigo de quién, los países y quién es aliado de quien, ciudades y de cuál se puede volar a cuál, etc.,etc.] Pondremos un hormiguero en una punta del grafo, y un lugar de comida en el otro. Las hormigas irán del nido a la comida, de la comida al nido, del nido a la comida, etc... Para decidir hacia donde ir en cada paso, verán cuánta feromona hay en las aristas que van en la dirección correcta (las que van hacia abajo, si van a la comida, o las que van hacia arriba, si van al nido). Y escogerán entre ellos de manera aleatoria, dándole a cada arista una probabilidad proporcional a la cantidad de feromona que tiene. En cada paso que den en una arista, dejarán un poco de feromona. Esa cantidad va bajando: en el primer paso dejan 1, en el segundo 1/2, en el tercero 1/3, etc... Cuando llegan a su destino, y parte de vuelta, vuelven a partir de 1, luego 1/2, etc. Existe una pequeña probabilidad, además, de que la hormiga decida de manera completamente arbitraria, sin hacer caso a la feromona. Pero es una probabilidad muy pequeña. La feromona se va evaporando (esto también ocurre en la realidad), de modo que si no pasan hormigas, disminuirá. La pregunta entonces: si el modelo es así, ¿encontrarán las hormigas el camino más corto? OK, ¿y qué hay con eso?
Es claro que con esto podemos encontrar los caminos más cortos en un grafo. Pero además, se pueden hacer adaptaciones ingeniosas (pega para matemáticos), para utilizar los mismos mecanismos y resolver otros problemas, como el del vendedor viajero, el de árboles de peso mínimo (un trabajo que se hizo aquí en Chile). Asignación de tareas (un ejemplo que no es originariamente de grafos), y un etcétera que fue creciendo a lo largo de los años 90. Un ejemplo concreto fue la aplicación en la British Telecom. Ahí el grafo representaba una red de centrales telefónicas, y para cada llamada que se generaba en una central y tenía otra central como destino, había que rutearla a través de las centrales, de modo que ojalá se usaran pocas centrales intermedias, y que la red NO se congestionara. Así que se hizo circular "hormigas virtuales" por la red, que se demoraba más en recorrer un camino si estaba muy congestionado, y de ese modo los "caminos más cortos" eran las rutas óptimas de las llamadas. Después, para rutear la llamada, era cosa de que siguiera la pista de feromona dejada por las hormigas. Como las hormigas estaban permanentemente recorriendo, la solución se iba actualizando según los cambios en los niveles de congestión. Hasta ahora, es la mejor solución que se ha encontrado para este problema. Existen otros métodos para resolver problemas; los matemáticos llevan décadas inventando métodos ("algoritmos"), para resolver el problema de camino más corto, el del vendedor viajero, etc.
Una primera ventaja, es que para algunos problemas (como el de ruteo de llamadas telefónicas), la mejor solución conocida es la que se obtuvo con hormigas. Además, los métodos "hormiguísticos" tienen varias gracias, que los distinguen de otros métodos. Una ventaja es que no existe información ni control centralizados. En el caso de la red telefónica, no hace falta que las centrales estén conectadas a un computador "jefe", que esté resolviendo el problema y diciéndole a cada llamada por dónde debe irse. Esto facilita

mucho la implementación en una red de vértices autónomos. Si se tratara de rutear emails en internet, por ejemplo, sería imposible tener un computador en alguna parte del planeta controlando las rutas que deben seguir los millones de emails diarios... En cambio, con información *local* en cada computador, se puede encontrar la solución. Más encima, la solución se va actualizando *online*. Es decir: si el problema cambia (cambia el grafo en un caso, cambia la basura en el otro), no hace falta hacer todo de nuevo, sino que la solución se va actualizando junto con el problema. Como se trata de agentes simples, no hacen falta cálculos complejos, es un sistema "barato" en términos computacionales. Se está "aprovechando el terreno para hacer el mapa". En otras palabras, las hormigas dibujan el mapa en el mismísimo terreno, y gracias a eso pueden, siendo simples, resolver problemas complejos, pues aprovechan la propia complejidad del problema.

A modo de cierre

Otros ejemplos de sistemas complejos son el cerebro (muchas neuronas simples interactuando, y produciendo en conjunto fenómenos como la conciencia, la memoria, los chistes, las matemáticas...), la biosfera (animales y plantas haciendo sus vidas, pero produciendo una historia natural compleja, con ciclos de poblaciones, extinciones, invasiones...), las sociedades humanas (como ejemplo, la economía: es posible modelar el comportamiento de los agentes económicos, pero el comportamiento global es complejísimo, y nadie puede predecir la bolsa), la evolución de las especies (aquí habría que pensar más bien en "la evolución del DNA", la explicación es más larga).

Vimos que las hormigas que andan "al azar" son necesarias para encontrar las soluciones novedosas en el problema del camino más corto. Compárese eso con lo que pasa en la evolución: las especies no saben cómo deben mutar para evolucionar, sino que se producen mutaciones al azar, y es la selección natural la que escoge las que son útiles, y así se produce la evolución. Sin el "error" (las mutaciones al azar), no habría evolución.

Bibliografía

Moreira, A. (ene.; 2003). "Hormigas y Matemáticas". Conferencia dictada en el contexto del proyecto Idea+, en "Primera Estadía de Especialización de Matemáticas" - Centro de Modelamiento Matemático (CMM) y Departamento de Ingeniería de Matemática (DIM) de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de Chile.
http://www.ideamas.cl/.
http://www.cmm.uchile.cl/
http://www.dim.uchile.cl/

IMÁGENES PARA EL ALGEBRA

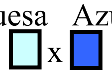
Ema Barreda y Felipe Saavedra
Colegio de Humanidades, Villarrica, Chile
embace13@netexplora.com, fhilip@netexplora.com

Resumen
Estas experiencias de aula, surgen como una propuesta de ejercicios tanto de operatoria como de representación gráfica, poniendo énfasis en el uso de material propio inspirado en el *software* "Primer Concurso Nacional de la Enseñanza Matemática - AutoMind Educación", a partir del Libro “Inteligencia Matemática”. Están dirigidas fundamentalmente a alumno(a)s de 1er. año de Educación Media, existiendo contenidos que han nacido a partir de las actividades, correspondientes a cursos superiores. Ella trata principalmente de permitirle a lo(a)s alumno(a)s utilizar materiales concretos, para que ésto(a)s resuelvan ecuaciones y representen expresiones numéricas y algebraicas; además *despierten su curiosidad y creatividad* a través de la construcción de recursos para que sean protagonistas de su propio aprendizaje, los "aprehendan" significativamente y se reencanten con esta disciplina. Se les entrega una guía que motive al trabajo en equipo y se les propone ejercicios tanto de operatoria como de representación gráfica, poniendo énfasis en el uso de material propio inspirado en figuras construidas en cartón de colores. Cada grupo tiene la misión de co y autoevaluar su propuesta y luego presentar un informe. Se reagrupan recibiendo la guía de invitación, y trabajan en su desarrollo; generando interacciones explicables en el producto logrado y que constituye un testimonio de las numerosas y diversas acciones de aprendizaje, que el(la) alumno(a) debe confrontar con los objetivos y traducirlo en un producto concreto, observable, evaluable y socializable. Los productos logrados están referidos a los siguientes contenidos: representación de Números Enteros; operatoria con Números Enteros; regularidades numéricas; representación geométrica de polinomios; adición de expresiones algebraicas; factorización de expresiones algebraicas; ecuaciones de 2º grado y sistemas de ecuaciones

Representación de Números Enteros

Materiales: A lo menos 20 cuadrados de dos colores a elección, por ejemplo:

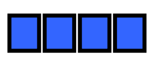
Turquesa Azul

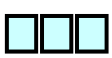


x

Los números enteros los podemos representar con las baldosas así, por ejemplo:

 **+ 1**  **- 1**

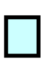
Luego, el número entero representad por  es 4

Y, así  es -3

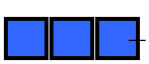
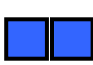
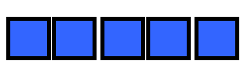
Operatoria con Números Enteros

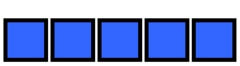
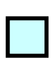
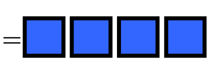
Adición de Números Enteros

Para asignar el valor cero**, lo representamos con la suma de las baldosas azul y turquesa, por ejemplo:**

 +  **= -1 + 1 = 0**

Luego;

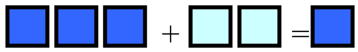
3 + 2  +  =  = 5

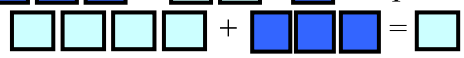
5 + (– 1)  +  =  = 4

Sustracción de Números Enteros

Análogamente a la adición. Para resolver la sustracción, la representamos con la suma del valor opuesto del sustraendo. Así: 5 – 2 = 5 + (-2).

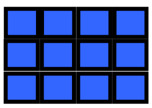
Luego;

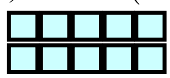
3 – 2 = 3 + (-2)  = 1

-4 – (-3) = -4 + 3  = -1

Multiplicación de Números Enteros

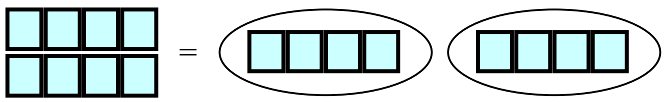
a) $3 \bullet 4$ b) $2 \bullet (-5)$





Buen desafío: Observar el producto de valores negativos…

División de Números Enteros

-8 : 2 =  = -4

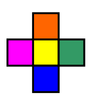
Otro desafío: Divisiones con divisor negativo…

Regularidades Numéricas

Materiales: A lo menos 50 cuadrados de colores a elección.

Ejemplo 1. Construcción de figuras con un número determinado de cuadrados, considerando éstos como área 1. Así:

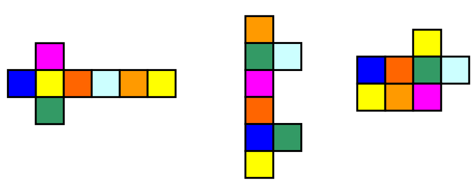
Con 5 cuadritos se puede construir una cruz, cuya área es de cinco cuadrados, como se ve en la siguiente figura:



Con los mismos 5 cuadritos, pero en distinta posición, se construyen otras figuras geométricas, cuya área sea equivalente al área de la figura anterior.

Pregunta: ¿Cuántas figuras se puede construir con los 5 cuadros de manera que el área sea equivalente a las anteriores?

Si con 8 cuadritos pueden formarse diversas figuras geométricas, algunas de ellas aparecen a continuación:

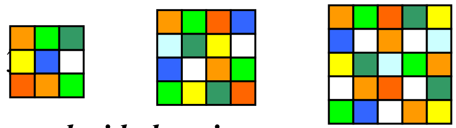


Calcule el número de figuras geométricas que ha construido.

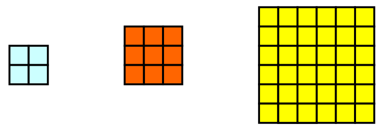
Ahora; calcule el número de figuras construidas con 15 cuadritos.

Finalmente; generalice y responda ¿Cuál es el número de figuras geométricas construidas con "n" cuadritos?

Ejemplo 2. Con ayuda de los cuadritos dados, se construyen cuadrados de lado 3 y de lado 4; al juntar los cuadritos formando un solo cuadrado, se puede expresar la igualdad de las potencias siguientes:

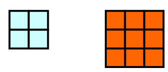


He aquí una regularidad curiosa:
En forma análoga construya un cuadrado de lado 2, otro de lado 3 y otro de lado 6, al juntar los cuadraditos y construir un solo cuadrado determinando el lado, se expresa la igualdad:

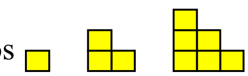


$$2^2 \quad + \quad 3^2 \quad + \quad 6^2 \quad = \quad ....$$

En forma análoga, construya y exprese la igualdad: $3^2 + 4^2 + 12^2 = ...$
Además: $4^2 + 5^2 + 20^2 = ...$;
¿Se atreve a continuar? Entonces, exprese la igualdad que empieza con 10; con 18; y la que empieza con n.



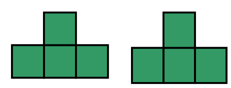
Ejemplo 3. Observando la secuencia de dibujos



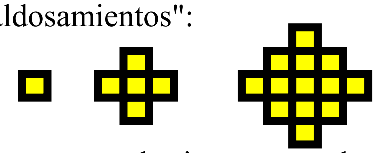
Y contando los cuadritos, para la primera figura se necesita 1 y para la segunda 3.
Luego, ¿Cuántos cuadritos se necesitan para la quinta figura? Y, ¿para la décimo segunda? Y, finalmente, ¿Cuántos cuadritos se necesitan para la n-ésima figura?

Ejemplo 4. Si la segunda figura, en lugar de ser una escalera para un solo lado, es una escalera hacia los dos lados, así:

¿cuántos cuadritos son necesarios para la n-ésima figura?

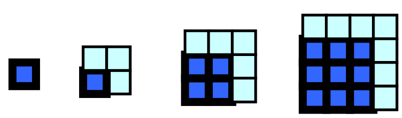


Ejemplo 5. Observe la siguiente secuencia de "embaldosamientos":



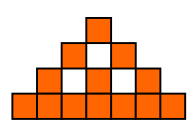
¿Cuántas baldosas (cuadritos) se ocupará, sucesivamente, para el primer, segundo, tercero y cuarto embaldosado?
Luego, determine el número de baldosas (cuadritos) necesaria(o)s para el embaldosado n - ésimo.

Ejemplo 6. Otra secuencia:



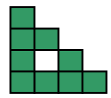
Determine el número de baldosas que es necesario para construir cada uno de estos embaldosados. ¿Qué números son los que va agregando? (Recuerde que ésta es una suma aritmética notable). Al agregar baldosas, ¿qué números son los que se van formando? Determine el número de baldosas necesarios para construir el n-ésimo motivo, o sea, la suma de los n primeros números impares y analice la relación con los cuadrados perfectos.

Ejemplo 7. Visualización geométrica de sumas notables:



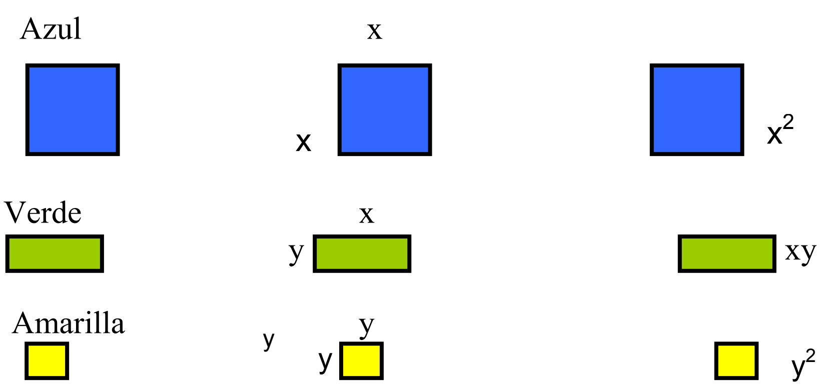
La suma 1 + 3 + 5 + ... + (2n-1), se puede representar como:
Visualice cuántos cuadritos hay, sin contarlos. Y, ¿cuánto es el total de cuadritos con 6, 7, 8, ... filas? (recuerde que las filas corresponden a impares consecutivos)
Luego, ¿a qué es igual la suma 1 + 3 + 5 + ... + (2n-1)?

Ejemplo 8. Otra suma notable:
1 + 2 + 3 + ... + n, se puede representar:

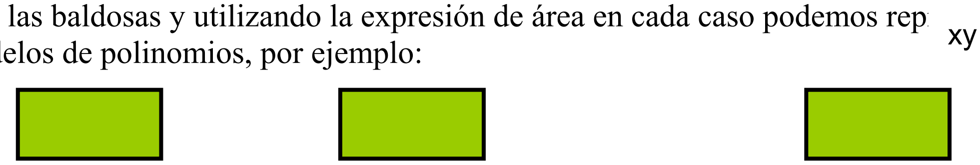


¿Cuántos cuadritos ve a simple vista, sin contarlos? Dado que la disposición de los cuadritos es un triángulo rectángulo, exprese el número de cuadritos como producto.
Y, ¿cuánto es el total de cuadritos con 7, 8, 9,... filas? (recuerde que las filas corresponden a números consecutivos)
Luego, ¿a qué es igual la suma 1 + 2 + 3+ 4 +..... + n?

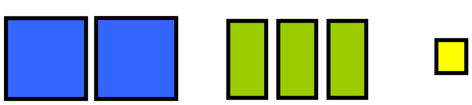
Representación Geométrica de Polinomios
Materiales: A lo menos 10 cuadriláteros de cada forma, cuya medida de los lados se relacionan. Todos ellos deben se "reversibles", de colores fuertes en el anverso y una tonalidad más baja en el reverso.
COLOR LONGITUD DE LOS LADOS ÁREA



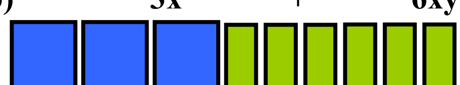
Representaciones Polinomiales
Con las baldosas y utilizando la expresión de área en cada caso podemos rep
modelos de polinomios, por ejemplo:



a) $\mathbf{2\,x^2 \quad + \quad 3\,x\,y \quad + \quad y^2}$



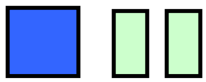
b) $\mathbf{3x^2 \quad + \quad 6xy}$



Para **asignar un valor negativo**, lo representamos con **las baldosas por el reverso**, así:

Por ejemplo:

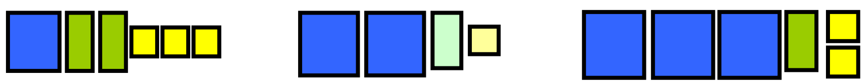
$\mathbf{X^2 \;+\; (-2xy)}$



Luego, lo(a)s alumno(a)s pueden usar las baldosas para construir el modelo que representa cada expresión polinomial.

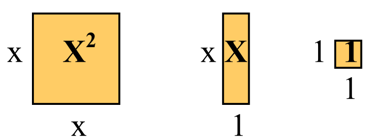
Adición de expresiones algebraicas. Dado el material anterior y usando el concepto de "cero", se pueden eliminar aquellas baldosas que se anulan, siempre que sea posible.
Por ejemplo:

$(x^2 + 2xy + 3y^2) \quad + \quad (2x^2 - xy - y^2) \quad = \quad 3x^2 + xy + 2y^2$

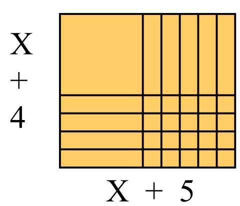


Como actividades exploratorias, lo(a)s alumno(a)s pueden representar los modelos con sus baldosas, escribir el polinomio de cada modelo y encontrar la suma de dos o más polinomios, dibujarlos y escribir su expresión.

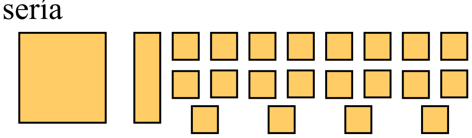
Factorizacion de trinomios. Materiales: A lo menos cinco cuadrados "grandes", 20 rectángulos y 50 cuadrados "chicos", con las dimensiones y área que se indican y "reversibles" con tonalidad fuerte en el anverso y más débil en el reverso:



Ejemplo 1. Si se construye un **cuadrilátero** con el área formada por $X^2 + 9X + 20$, así:



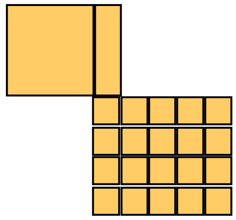
Observamos que sus lados miden $(x + 4)$ y $(x + 5)$, luego y como el área $X^2 + 9X + 20 = (x + 4)(x + 5)$, entonces, el trinomio $X^2 + 9X + 20$ ha quedado factorizado.
Ejemplo 2. Para construir un cuadrilátero con el área formada por $X^2 + X – 20$, el material a utilizar sería



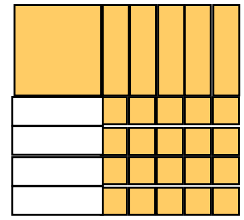
¿Imposible?…

¡NO!, Es posible si se procede así: $X + 5$

y luego completamos con "ceros", quedando:

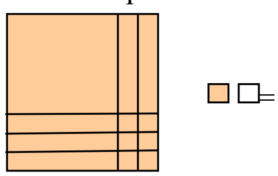


X
-
4



Luego, $X^2 + X - 20 = (x + 5)(x - 4)$.
El(la) alumno(a) puede construir un cuadrilátero con el área correspondiente a trinomios cualesquiera, y además, determinar una regla general.

Ecuaciones de 2º grado
¡Qué gran título!... No te preocupes,... es sólo eso... puro título, nada complicado.
Si el(la) alumno(a) recuerda cómo factorizamos trinomios, ¡Excelente!... Empecemos, entonces...
Ejemplo 1. En forma análoga a las factorizaciones, debemos construir **cuadriláteros** con los trinomios, y luego, igualarlos a cero, por ejemplo:
a) Dibuja el área formada por $X^2 + 5X + 6 = 0$:

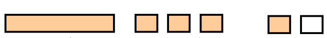


X + 2

Como el área $X^2 + 5X + 6 = (x + 3)(x + 2) = 0$, entonces,
(x + 3) = 0 o bién **(x + 2) = 0**, que al resolverlas en forma independientes, resulta:

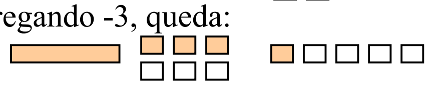
Si $x + 3 = 0$, entonces:

=



agregando -3, queda:

=



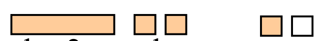
Luego:

=

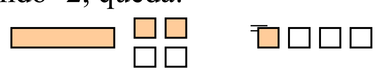
x = -3

Si $x + 2 = 0$, entonces:

=



agregando -2, queda:



Luego:

=

x = -2

Finalmente, las soluciones de la ecuación $X^2 + 5X + 6 = 0$, son "x = -3" y "x = -2"
Ahora, puedes resolver ecuaciones de 2º grado ¡Claro que sí, y sin quedar sólo en el intento!

Sistemas de ecuaciones de primer grado
¡Con este título sí que estamos grandes!...

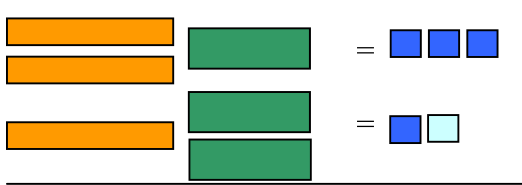
Las variables (o incógnitas) "x" (también "y"), se representan por barras y los coeficientes numéricos por cuadraditos. Sus correspondientes valores negativos con colores más débiles al reverso; así:

X Y 1 -1

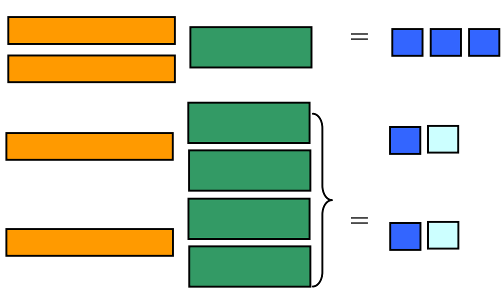
Ejemplo 1. Para resolver un sistema de ecuaciones, se construirán éstas mediante las representaciones correspondientes, por ejemplo:

$$\begin{aligned} 2\,x + y &= 3 \\ x + 2\,y &= 0 \end{aligned}$$

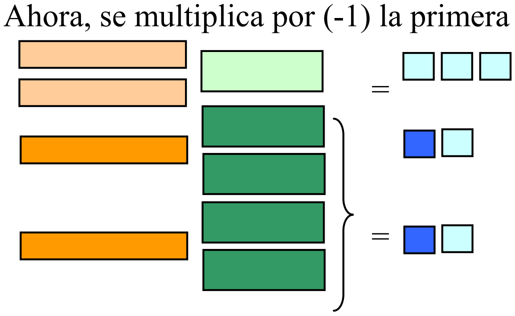
Su representación sería:



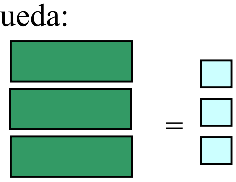
Si se igualan los coeficientes numéricos de una de las incógnitas. Por ejemplo, al igualar las "x", multiplicando por 2 en la segunda ecuación, se visualiza el doble y el sistema quedaría:



Ahora, se multiplica por (-1) la primera ecuación:



Y, sumando, queda:

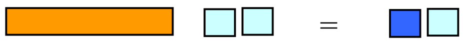


Entonces:

Luego:

$$Y = -1$$

Continuemos: si reemplazamos $y = -1$ en la segunda ecuación, por ejemplo, resulta:



Y queda:

Entonces:

Luego: $\mathbf{X = 2}$

Las soluciones del sistema $\left.\begin{array}{r}2x + y = 3\\ x + 2y = 0\end{array}\right\rfloor$ son “$x = 2$” e “$y = -1$”

Bibliografía

Araya Schulz, R. (2000). *Inteligencia Matemática*. Editorial Universitaria. ChileAutoMind Educación, proyecto IDEA+http://www.ideamas.cl/ Idea+, el proyecto FONDEF (2002)responsable de la creación de este concurso, desarrollado durante el mes de Enero, Chile.

LA EDUCACIÓN ESCOLAR INDÍGENA Y LA CIENCIA INDÍGENA KUIKURO[1]

Pedro Paulo Scandiuzzi
UNESP – Campus São José do Rio Preto y Campus de Rio Claro, Brasil
pepe@edu.ibilce.unesp.br

Resumen
Este artículo presenta la ciencia del pensamiento mítico elaborada por el pueblo indígena kuikuro, habitante del Parque Nacional del Xingú – MT, a través de la figura geométrica denominada en nuestras escuelas de hipérbola y el impacto producido por el confronto que la educación escolar indígena elaborada por los no-indígenas causa cuando introducida en los medios indígenas. La ciencia indígena desaparecerá, pues su constructor desaparecerá. El educador de las etnomatemáticas puede trabajar en tal contexto.

Reflejando
Pero entrar en el mundo indígena es como si nos volviésemos al revés, pues el todo aprendido parece no decir respecto a la verdad. Entrar en el mundo indígena es conocer otro mundo, es palpitar de emoción con una manera de ser y de existir. Entrar en el mundo indígena es vivenciar valores tan "irreales" en relación a nuestro conocimiento como debe de ser para ellos nuestro mundo. Sin embargo, la realidad globalizante en que vivimos nos conduce a una intensidad del contacto con una idea que parece presente en todas las culturas: la de la reciprocidad de las relaciones entre los grupos humanos y el mundo exterior. (Carvallo, 1979, p.364).

Este trato cada vez más acelerado por causa de los medios de comunicación y de las exigencias que se hacen cada vez más fuertes en el mundo en que vivimos hace que no podamos evitar nuestro encuentro con el mundo indígena. Este encuentro empezó con el genocidio practicado por los invasores en los primeros contactos. En nuestro caso, eso se dió al fin del siglo pasado y principios de este siglo. El pueblo kuikuro, que vive en las márgenes del río kuluene, en el estado de Mato Grosso, recibe, en 1884, la visita de Karl von den Steinen, médico alemán que viene hacer estudios etnográficos juntamente con otros dos más: Clauss que será el dibujista topográfico y Guierme, el dibujista retratista y paisajista (Castro, 1885, p. 158-159). No serán los primeros a entrar en el área de los kuikuro, pues el príncipe Adalberto de Prusia da noticias de un teniente de Milicias que bajó el Xingú desde Mato Grosso en 1816 (Castro, 1885, p.220) pero serán los primeros en estar en el área para estudios.
Este contacto que pareció amigable, sin luchas, no fue muy bueno para los pueblos indígenas, pues, ya en 1914, ocho aldeas recencelladas por Steinen habían desaparecido totalmente y el blanco pasó a ser conocido como 'dueño de las enfermedades.

En los días de hoy, una nueva presión se hace presente. Ella viene con una característica nueva, pues nos motiva a nosotros y nos impele a ser tratados como bonificadores de un pueblo. Se conoce esta nueva presión como educación escolar indígena. Su camuflaje viene con la necesidad de que los indios se adapten a nuestros conocimientos y a nuestras

[1] Ayuda económica parcial para la presentación en Chile de la FUNDUNESP

costumbres, pues creemos que somos detenedores y productores de un saber mejor elaborado y eso sin que conozcamos lo que ellos producen. Tal vez nuestra arrogancia sea tan grande y tan conviviente con los medios de comunicación que nos olvidamos de verificar la producción de estos pueblos que viven y sobreviven desde hace millares de años y detienen el conocimiento de su contexto.

Validando el pensamiento

Para validar este argumento exploraré una única figura: la figura denominada en los espacios escolares por hipérbola. Se hace esta elección porque el cotidiano de los kuikuro está relleno de figuras hiperbólicas. Ellas se hallan en el formato del campo de fútbol, en las pinturas del pelo del "pajé", en las 'piernas' de los bancos en que sientan los hombres, en las pinturas corporales masculinas. Sin embargo, en los escritos de la historia de las matemáticas, no encontré la hipérbola como una forma geométrica descrita antes de los estudios de Menaecmo, a no ser las observaciones características de los libros de Historia de las matemáticas, exactamente como están en los decires de Boyer (1974; p. 70,197, 103-107) y de Domingues (1998, p. 43), que afirman que:

> *(...) no hay un consenso sobre como ni cuando las secciones cónicas aparecieran en la historia de las matemáticas. Pero, en la versión más difundida, la de Erastótenes (siglo III a. C.), el origen estaría en la tentativa de Menaecmo (siglo IV a. C.) de resolver el problema de la duplicación del cubo...*

Sin embargo, el punto de vista de Seidenberg (1960 – 1962; p. 489, 492, 503, 523) nos impulsa a pensar que la geometría tuvo su origen en los rituales, que existe una distinción entre uso y origen y que los círculos y cuadrados eran figuras sagradas y las estudiaban los sacerdotes tal cual ellos estudiaban las estrellas, nominalmente, para conocer mejor a sus dioses.

Los indicios de que desde la puerta de entrada de la casa de los hombres es posible visualizar el movimiento del sol y de la luna durante el año y de que los kuikuro determinan la perpendicular del ángulo del meridiano local, sugieren que, para construir la aldea, este pueblo observa las sombras proyectadas por el sol y construye la casa de los hombres dentro del círculo. Desde esta puerta central es posible la observación, casi diaria, del movimiento del sol y de sus sombras. Tal vez sea por este motivo que Campos y Franchetto (1987, p. 263) explican que este tipo de construcción

> *(...) entera el conocimiento de los kuikuro al incorporarse en la arquitectura de sus aldeas por el alineamiento este-oeste de tres elementos: el sitio de la lucha, el banco de tora y la casa de los hombres. Esta incorporación hace posible que funcione una especie de reloj solar, donde la casa funciona como abrigo a los rayos solares al proyectar su sombra sobre la plaza de la aldea. A las tres de la tarde, cuando la plaza se encuentra bajo el sol, tiene inicio la lucha; y termina cuando la sombra, inicialmente sobre la tora, cae sobre los luchadores.*

¿Qué observan los kuikuro especialistas en astronomía, a través de las sombras, durante el año?

En el día de los dos solsticios – el del invierno y el del verano – cuando la curva hecha por la sombra de algún objeto se proyecta en el suelo, se percibe que ellas forman los dos lados de la hipérbola, mientras que, el día del equinoccio ellos ven una recta. El sol sale en el horizonte, lanza sus rayos solares en dirección a la casa de los hombres, pasa por el local del huka-huka, por la tora y por la puerta central y sigue su camino pasando por la casa del jefe de la casa de los hombres. En este día del equinoccio, la casa de los hombres y la casa del jefe de la casa de los hombres recibirán la luz del sol más intensamente por la puerta de entrada.

Estas observaciones solares y lunares, entre los solsticios y equinoccios están relacionadas con las cosechas y plantíos, una vez que el pueblo kuikuro tiene las estaciones de la sequía y de las lluvias. Por ejemplo, inicio de la recolección de los huevos de tracajá es señal de que las lluvias están llegando. El equinoccio de la primavera se aproxima. Será en esta época que los arcos de la hipérbola van a cambiar el lado, cambiar su posición en relación al eje de simetría, que, en este caso, es la sombra producida por el equinoccio y las sombras si proyectarán simétricamente, hasta que vuelva al equinoccio del otoño. La simetría de reflexión ocasionada por los movimientos del sol se observa en el decurso de un año.

¿Será por causa de que las observaciones se hacen a partir del sol y de la luna que la forma geométrica del círculo y la de la circunferencia están presentes?

¿Pueden también juntarse a estas observaciones las cuatro fases de la luna? Esta última interrogante proviene de que la observación lunar, durante las cuatro fases de la luna, también produce una figura hiperbólica, con eje central de reflexión en la luna nueva y sus extremos están de una luna llena a otra, caracterizando el mes, por eso el uso de "mi hijo tiene x lunas".

Estas observaciones confirman las conclusiones de Carvalho (1979, p. 17) respecto de la triple encrucijada que se da entre tres círculos que se interceptan, produciendo tres espacios definidos: el espacio que permite la relación entre personas y "cosas" que no pertenecen a la aldea, llamado por Carvalho de "mundo exterior"geográfico; el otro espacio que simboliza el "mundo nuestro", mundo de los kuikuro. Estos dos espacios permiten la ida y venida, mientras que el tercer espacio, que es el espacio formado por las curvas de la hipérbola –espacio donde se da el eje de la simetría de la hipérbola, donde está el juego de la vida y de la muerte, de la luna y del sol– este no tiene regreso.

La llegada de la escuela...

Pero, a partir de 1976, se implanta la primera escuela en el Puesto Indígena Leonardo Villas-Boas, dentro del área del PQXin (Parque Nacional del Xingú), ocasionando la destrucción sistemática de modos de vida y de pensamiento de personas diferentes de aquellas que conducen la empresa de la destrucción, matándoles en el espíritu.

Justificamos, para el alivio de nuestra conciencia y para la satisfacción de nuestro ego, que la necesidad de intensificación del contacto exige la implantación de esas escuelas y que los pueblos indígenas necesitan el conocimiento difundido por ellas. Y justificamos más aún, que, por estos motivos, debemos 'caridosamente' llevarles nuestra educación y nuestra escrita. Actitud/postura, esta, cargada de altruismo y humanismo, inscrito en el corazón de la cultura occidental, que acaba desembocando en la disolución del múltiple en uno.

Por eso, en mi país, se hizo necesario un Referencial Curricular Nacional para las Escuelas Indígenas y, optimistamente, nos alegramos con la construcción de salón de clases y formación profesores para el Magisterio Indígena / 2° grado de las sociedades indígenas, accionando una fuerza centrípeta, la cual tiende a aplastar las fuerzas centrífugas inversas, cuando las circunstancias lo exigen, descubriendo, en la esencia de la sustancia del Estado, la fuerza de acción del Uno y la vocación de rechazo del múltiple, el terror y horror a la diferencia, siendo el etnocídio el camino del Estado y de sus sociedades para conducir todo el proceso.

Aun ante realidad mortífera, que no es sanguinaria, nos damos cuenta de que este pueblo indígena utiliza de sus tácticas, siendo una de ellas la de filtrar las informaciones de sus datos culturales y sociales, permaneciendo firmes en su identidad.

Concluyendo

Por eso, la postura del educador debe excluir toda autosuficiencia, dialogar con igualdad, aceptar la diferencia y la alteridad, dejar que sea el otro que se defina aceptando la auto lectura a partir de la propia identidad. Esta postura reconoce la capacidad social de decisión y derecho de participación en la programación de los procesos de formación de los pueblos indígenas. Reconoce y acepta la pluralidad cultural y el derecho a manejar, de manera autónoma, los recursos de su cultura. Son eses pueblos que deben decidir su futuro, según proyectos que partan de sus intereses y aspiraciones. Nos toca respectarlos y tratar de conocer su producción científica. El programa de las etnomatemáticas contempla estas condiciones.

Blibliografía

Boyer, c. B. *História da matemática*. São paulo. Edgard blücher ltda. 1974

Carvalho, s. M. S. Onças míticas e jogo de bola. In: revista de antropologia. *Volxxii. 1979*

Castro, f. P. Relatório da viagem exploratória de matto-grosso a pará pelo rio xingú 1885. In: anais da biblioteca e arquivo públicos. *Belém –pa . 1885*

Domingues, h. H. Seções cônicas: história e ensino. In: revista de educação matemática. *São paulo. Sbem. Ano 6 nº4. 1998. P. 43- 49*

Franchetto, b. E campos, m. D. Kuikuru: integración cielo e tierra en la economia y en el ritual. In: de greiff, j.a. E reichel, p. E. Etnoastronomias americanas. *Bogotá. Ediciones de la universidad nacional de colômbia. 1987*

Seidenberg, a. The ritual origin of geometry. *In archive for history of exact sciences. Alemanha. P. 488-527 1960-1962*

Steinen, k. Von den. Entre os aborígenes do brasil central. In: revista do arquivo municipal. São paulo. *Xxxiv – lviii. 1894/1940*

LA ENSEÑANZA DE LA MATEMATICA EN LOS PROYECTOS PEDAGOGICOS ESCOLARES REFLEXIONES DESDE UNA PERSPECTIVA CRITICA

Martín Andonegui
U.P. Experimental Libertador – I.P. de Barquisimeto
ioritz@hotmail.com

Resumen

Las reflexiones iniciales se centran en la dinámica de la sociedad actual, sumida en un proceso de globalización que genera desequilibrios y paradojas. Se observa que la matemática está presente de forma prescriptiva en la sociedad, a la que moldea por la vía del diseño de la tecnología. Para afrontar las paradojas sociales, la educación debe concebirse como crítica y transformadora. En consecuencia, la educación matemática se plantea como objetivo la alfabetización matemática de los individuos. Para lograrlo, debe proponer tres tipos de conoceres: el matemático, el tecnológico y el reflexivo. En este contexto, los proyectos pedagógicos se muestran como apropiados desde una perspectiva educativa crítica. El tema de los proyectos es lo primero a considerar, y su selección debe responder a ciertos criterios: contextualización, intención transformadora, posibilidad de percibir la fuerza modeladora de la matemática, y capacidad para generar nuevos conocimientos y competencias. Además, debe tomarse en cuenta el clima de aprendizaje, centrado en el diálogo y en la negociación.

La relación matemática – sociedad

La primera aproximación al tema se centra, indudablemente, en el análisis de la relación existente entre la matemática y la sociedad actual. Y para iniciar este análisis debemos asomarnos a esta última. Castells (1994) la califica como *sociedad informacional*, concepto que asume e integra los calificativos de sociedad *de la información* y sociedad *del aprendizaje*. Lo que se sostiene con tales precisiones es que el impacto de la tecnología –particularmente las de la información y comunicación- ha incidido en las estructuras culturales, económicas y políticas de nuestra sociedad. Se instauran, además, el conocimiento y la información como fuentes de valor y de poder.

Pero esta transformación no se produce en un mundo equilibrado y neutro. Los fenómenos de la globalización esconden, tras su apariencia de alcance universal y pretendidamente igualitario, gérmenes de una nueva colonización. Los sectores nuevamente colonizados –el Cuarto Mundo, como lo califica Castells (1994), que incluye al Tercero y también a vastos sectores de los propios países desarrollados- son aquellos que son irrelevantes para la producción y el consumo del conocimiento y de la información.

Este desarrollo contradictorio conduce así a la emergencia de la *paradoja de la inclusión*, que "se refiere al hecho de que el actual modelo de globalización de la organización social, que establece como principio el acceso y la inclusión universal, también conduce a una marcada exclusión de ciertos sectores sociales". (Skovsmose y Valero, 2002, p.386 [La traducción es propia]).

¿Qué papel juega la matemática en este escenario? Davis y Hersh (1988) –en un texto de sugerente título, "El sueño de Descartes: El mundo según las Matemáticas"- hablan de una matematización prescriptiva presente desde la antigüedad en situaciones tales como la medida de magnitudes físicas, el establecimiento de calendarios y relojes, los sistemas monetarios, los planos para construir máquinas y edificaciones, etc. Pero esta incidencia se ha incrementado casi ilimitadamente hasta nuestros tiempos y ha penetrado numerosos sistemas: de calificación personal –cociente intelectual, calificaciones escolares…-, de seguros, de comunicaciones, monetarios, de consumo, de armamentos, de votación, de transportes… Son sistemas que regulan y alteran nuestra vida y caracterizan a nuestra civilización. Y todos ellos reflejan una matematización prescriptiva, desconocida para la gran mayoría de personas.

En esta misma línea, Skovsmose (1994*a*) suscribe también la tesis de que la matemática tiene la capacidad de moldear -"formatear"- a la sociedad, por ser el principio básico para el diseño de la tecnología, particularmente de la que sustenta los sistemas de información y comunicación.

Que esta ingerencia fundamental de la matemática continuará en el futuro queda claro, por ejemplo, en el testimonio de P. Griffiths, Secretario de la Unión Matemática Internacional, quien concluye así su reporte acerca de las matemáticas ante el nuevo milenio: "Los matemáticos nos planteamos dos objetivos ahora que entramos en un nuevo milenio. El primero es el de ser capaces de mantener la tradicional fortaleza de nuestra investigación básica, que es semillero de nuevas ideas y nuevas aplicaciones. El segundo es ampliar nuestro contacto con el mundo que está más allá de la ciencia" (Griffiths, 2000, p. 41).

De todo lo anterior puede inferirse, pues, que la matemática está en el centro de la paradoja de la inclusión. Ahora bien, ¿qué significa esto para nosotros como docentes de matemática?

En primer lugar, debemos plantearnos el papel que debe jugar la educación en un escenario como el descrito. Porque, de entrada, se presenta una nueva paradoja, la *paradoja de la ciudadanía*, que alude a que, "por un lado, la educación parece dispuesta a preparar para el ejercicio de una ciudadanía activa, pero por el otro, parece garantizar la adaptación de los individuos al orden social establecido" (Skovsmose y Valero, 2002, p.386 [La traducción es propia]).

Para afrontar esta segunda paradoja y so pena de convertirse en cómplice de los desequilibrios que fomenta la actual globalización, la educación debe adoptar una postura crítica. Esto significa que debe investigar las condiciones en las que se adquiere el conocimiento, que debe estar atenta para identificar y evaluar los problemas que se presentan en la sociedad, y que debe convertirse en una fuerza de reacción frente a tales situaciones problemáticas (Skovsmose, 1994*a*).

Planteamiento que coincide con el que ya ha sido sustentado por diversos autores desde hace algún tiempo y ante otros fenómenos de exclusión. Así y en nuestro medio latinoamericano, Paulo Freire considera a *la educación como práctica de la libertad* (Freire, 1969*,* 1970), es decir, como una acción de conocer, una aproximación crítica a la realidad, pues sólo en su relación dialéctica con la realidad puede la educación concebirse como un proceso transformador, de constante liberación del hombre. Para ello debe

promover la concientización, proceso que permite problematizar la realidad y percibir las restricciones que impone, con el fin de dar paso a una acción transformadora.
La educación matemática debe situarse en este ámbito. Skovsmose (1994*b*) –en una línea general ya iniciada por Freire- le asigna como objetivo propiciar la *alfabetización matemática* de los individuos. Esto significa atribuirle el propósito de formar ciudadanos críticos, mediante un empoderamiento que permita a los alumnos reorganizar y reconstruir sus interpretaciones relativas a las instituciones sociales. Es decir, capacitarlos para discutir críticamente la utilización de la matemática en el diseño tecnológico y, por esta vía, las condiciones a que se ve sometida su vida por la aplicación de esta tecnología.

El mismo autor destaca tres tipos de conoceres implicados en el logro de tal propósito:

- El *conocer matemático*, referido al dominio de los conceptos, procedimientos y demás competencias matemáticas al uso.
- El *conocer tecnológico*, referido a las habilidades para aplicar el conocimiento matemático y para construir modelos matemáticos. Es decir, es el conocer necesario para desarrollar y utilizar una tecnología dada.
- El *conocer reflexivo*, relativo a la capacidad de reflexionar acerca del uso de la matemática, es decir, acerca de las consecuencias sociales y éticas, derivadas de la aplicación de la tecnología en los distintos sistemas económicos, culturales y políticos.

Skovsmose (1994*b*) insiste en este tercer tipo de conocer como una especie de metaconocimiento acerca de la tecnología, que nos permite verla en un contexto más amplio, es decir, en el contexto de las implicaciones sociales, ecológicas, económicas y políticas. No puede haber alfabetización matemática si no se alcanza este tercer nivel del conocer, ya que las competencias matemática y tecnológica no poseen de suyo la capacidad de predecir y de analizar los resultados de su propia producción. Pero, a su vez, el conocer reflexivo no tiene ningún sentido si no puede referirse a los dos anteriores.

Los proyectos pedagógicos escolares (PPE)
La perspectiva crítica de la educación y, en particular, de la educación matemática, lleva a infundirles una orientación hacia la *resolución de problemas* y hacia el desarrollo de *proyectos*. Vamos a detenernos en este segundo aspecto, objeto de estas reflexiones.

Al respecto, los currículos escolares de algunos países latinoamericanos incluyen a los PPE (con diversos nombres; así, en Venezuela se denominan Proyectos Pedagógicos de Aula) como una vía para la planificación y el desarrollo del proceso de enseñanza aprendizaje en el nivel básico. Estos PPE poseen como características la globalización de dicho proceso –lo que implica buscar el modo de integrar los saberes de las diversas disciplinas escolares-, así como servir de enlace con situaciones significativas del entorno de los alumnos. En lo que sigue, tratamos de analizar la praxis de los PPE desde la perspectiva de la construcción de los conoceres matemático, tecnológico y reflexivo.

El punto inicial para construir un PPE es el relativo a la selección del *tema*. Skovsmose (1994*b*) sugiere, al respecto, algunos criterios útiles. Los dos primeros son de carácter global; los tres últimos se refieren al enlace con el aprendizaje de la matemática que el tema debe propiciar:

- Debe ser un tema familiar para los alumnos, al que puedan referirse con soltura en su lenguaje habitual.
- Que, aun dentro de la "pequeñez" del área propuesta, posea ciertos rasgos de ejemplaridad con respecto a otras situaciones sociales globales, cuyas estructuras puedan vislumbrarse desde el tema seleccionado.
- Que posea su propio valor para los niños y que no se convierta simplemente en una introducción ilustrativa para un tema matemático formal.
- Que pueda ser abordado de alguna manera por todos los niños, a pesar de sus posibles diferencias en cuanto a capacidades y competencias matemáticas.
- Que se preste para ampliar sus conocimientos matemáticos y para desarrollar nuevos conceptos y competencias.

A esta exposición de criterios quisiéramos agregar la insistencia que, desde el campo de la etnomatemática (Borba, 1990), se hace en relación a que el tema sea extraído de la propia vida diaria de los alumnos, pues de lo que se trata es de problematizar la realidad en el aula con el fin de transformarla, y no sólo de hacer ver el poder modelador que posee la matemática en la sociedad (Munter et al., 1994). En definitiva, se trata de contextualizar el aprendizaje de la matemática.

Como puede apreciarse, no es tarea sencilla la selección de un tema para un proyecto pedagógico: a su *significatividad contextual* y a su *intencionalidad transformadora* debe aunarse su capacidad para permitir aplicar y *comprender la potencia modeladora* de la matemática y para *desarrollar nuevos conocimientos matemáticos* en los niños. De hecho, los proyectos reportados por el propio Skovsmose en su trabajo adolecen de algunas debilidades: selección del tema por los docentes, construcción de escenarios un tanto artificiales, insuficiente tratamiento matemático… Por su parte, algunos otros proyectos desarrollados desde la perspectiva de la etnomatemática resultan demasiado puntuales, o sólo se preocupan de los procedimientos de resolución de problemas, o surgen en ambientes desescolarizados (Munter et al., 1994).

Haciendo referencia al caso venezolano, la selección del tema en las aulas de los grados 1º a 6º de la Escuela Básica es guiada habitualmente por los intereses de los niños –más que por sus necesidades, según testimonios de los mismos docentes- y negociada por la maestra. Esta forma de actuar por parte de los sujetos de la selección parece oportuna por cuanto puede garantizar la significatividad contextual, pero en la práctica hemos podido apreciar que rara vez se cumplen los otros requisitos de intencionalidad transformadora, de presencia modeladora de la matemática, y de desarrollo de nuevos conocimientos matemáticos en los niños.

Estas dos últimas carencias son, sin duda, consecuencia de la debilidad que, en promedio, presentan nuestros docentes de Educación Básica en cuanto a conocimientos matemáticos, situación que compromete seriamente la planificación y el desarrollo de los proyectos pedagógicos por cuanto, sin esa base, no es posible la construcción de los conoceres tecnológico y reflexivo, ni es posible una cabal problematización de la realidad.

Además de la selección de los temas de los proyectos pedagógicos, otro de los puntos fundamentales a tomar en cuenta es el del *clima*, del *estilo de aprendizaje* en el que deben desarrollarse. Cabe destacar aquí, en primer lugar, que el aprendizaje se concibe como una acción, caracterizada por una meta a alcanzar y por unas razones para iniciarla y sostenerla. Que los alumnos puedan participar en la selección del tema es un buen inicio para lograr que asuman la responsabilidad por su propio aprendizaje.

En resumen, el clima de aprendizaje en los proyectos pedagógicos debe incluir *diálogo* acerca de las intenciones de los distintos actores –alumnos y docente-, interacción, discusión, confrontación de opiniones y de conocimientos, cuestionamiento de contenidos y de procedimientos, planteamiento de retos colectivos e individuales, y la *negociación* de metas compartidas. Estos factores de confrontación, evaluación crítica y negociación se consideran fundamentales para trascender los conoceres matemático y tecnológico y poder arribar así al nivel del conocer reflexivo.

Todo lo anterior implica una revisión del *papel del docente* en los proyectos pedagógicos. No parece que un estilo directivo sea el más apto. Más bien, el docente debe saber "meterse" en el grupo, ganarse su rol de negociador y de orientador, ser aceptado como alguien implicado en el proyecto y, como tal, corresponsable de sus resultados.

Finalmente, otro de los puntos a considerar es el del *lenguaje*. Son diversos los lenguajes potencialmente presentes en el desarrollo de un proyecto pedagógico y cuya construcción hay que potenciar. De entrada, el lenguaje común, en el que debe exponerse el tema, así como el lenguaje matemático, cuyo objetivo fundamental es el de hacer visibles –por la vía de la construcción y aplicación de modelos- aquellas relaciones que el lenguaje natural puede esconder. Pero también debe buscarse el desarrollo de un metalenguaje, que permita a los alumnos expresarse acerca de la educación y de la matemática, así como el de un lenguaje tecnológico, propio del terreno en que se aplica la matemática.

Algunas conclusiones provisionales

1. De entrada podemos decir que el enfoque crítico de la Educación Matemática sustenta la conveniencia de trabajar por la vía de los proyectos pedagógicos en el aula y que éstos, en lo que a la formación matemática respecta, tendrían como objetivo la alfabetización matemática de los alumnos. Pero, por lo que hemos podido argumentar anteriormente, es notable la diferencia que existe entre un posible deber ser y la realidad de nuestra práctica educativa. En particular, no podemos obviar las debilidades de nuestros docentes de Educación Básica en lo que respecta a sus conocimientos matemáticos.

2. Por todo ello, cualquier intento de fortalecer los proyectos pedagógicos pasa, entre otras cosas, por una formación a fondo de nuestros docentes en el área matemática. Formación en el conocer matemático, en torno a *ideas matemáticas poderosas* (Skovsmose y Valero, 2002), pero orientada además hacia un conocer tecnológico, es decir, abierta hacia el poder de modelación y hacia las aplicaciones de la matemática.

3. De un modo similar, la formación debería alcanzar a otros aspectos relativos a los proyectos pedagógicos, tales como la generación y el mantenimiento de un clima de diálogo, el abandono de un estilo directivo, la competencia de negociar con los alumnos –particularmente en la selección de los temas de los proyectos-, etc.

4. Como un espacio abierto a la reflexión y a la investigación quedan algunas cuestiones, como por ejemplo, las posibilidades y limitaciones que puede presentar la implementación de los proyectos pedagógicos –desde la perspectiva aquí presentada- en el nivel de los tres primeros grados de la Educación Básica. Esta interrogante se justifica por cuanto en este nivel resulta más delicado el tratamiento de los conoceres tecnológico y reflexivo, y puede estar menos desarrollada en los niños la capacidad de problematizar la realidad.

5. En esta misma línea, cabe preguntarse por la posibilidad de desarrollar –allí donde no se hagan- proyectos pedagógicos en los grados 7 a 11 ó 12, niveles en los que la mayor madurez de los alumnos y un bagaje más amplio de conocimientos matemáticos y tecnológicos podría ofrecer una base más cabal para un conocer reflexivo y para una acción transformadora.

Bibliografía

Borba, M. (1990). Ethnomathematics and education. *For the learnings of mathematics*, 10, 39-43.

Castells, M. (1994). Flujos, redes e identidades: Una teoría crítica de la sociedad informacional. En: M. Castells et al., *Nuevas perspectivas críticas en educación*, pp. 37-64. Barcelona, Paidós.

Davis, P., Hersh, R. (1988). *Descartes' dream: The world according to mathematics*. London, Penguin Books.

Freire, P. (1969). *La educación como práctica de la libertad*. Madrid, Siglo XXI.

Freire, P. (1970). *Pedagogía del oprimido*. Madrid, Siglo XXI.

Griffiths, P. (2000). Las Matemáticas ante el cambio de milenio. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, Vol. 3, nº 1, 23-41.

Munter, J. et al. (1994). *Mathematics Education – based on Critical Mathematics Education and Ethnomathematics*. Aalborg, Aalborg University.

Skovsmose, O. (1994*a*). Towards a critical mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 27, 35-57.

Skovsmose, O. (1994*b*). *Towards a philosophy of critical mathematics education*. Dordrecht, Kluwer Academic. [Trad. por Paola Valero, *Hacia una filosofía de la educación matemática crítica*. Bogotá, una empresa docente, 1999].

Skovsmose, O., Valero, P. (2002). Democratic acces to powerful mathematical ideas. En: L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education*, pp. 383-407. Mahwah, LEA.

LA GEOMETRIA EN LAS DANZAS FOLKLÓRICAS ARGENTINAS

Oscar Sardella
Instituto Superior del Profesorado “J.V.Gonzalez”. Argentina
oscarsardella@hotmail.com

Resumen
Es conocida la relación de la geometría con el arte, (Pedoe, 1979), así como su influencia en la arquitectura (Alsina y Trillas, 1983) y en las realizaciones artísticas de los indígenas que ocuparon el territorio argentino (Gonzalez, 1983) Sin embargo existen otros aspectos interesantes como por ejemplo la Geometría en las danzas tradicionales argentinas. Son numerosas y poco conocidas las formas y características de la música precolombina en las regiones que hoy ocupa la República Argentina. Las referencias que se tienen indican que muchas tribus realizaban un ritual músico en sus ceremonias tanto guerreras como religiosas. En las danzas folclóricas argentinas es característico el movimiento de los bailarines por pareja suelta, hombre y mujer, realizando evoluciones en general independientes, es allí donde aparece la geometría. Se analizaran las coreografías de varias danzas y se observará como existe una geometría oculta que rige sus movimientos. Los objetivos de este trabajo son: establecer la relación entre la Matemática, más precisamente la Geometría con otras disciplinas y hallar relaciones entre los temas que se enseñan habitualmente en la escuela, sus orígenes y desarrollos históricos, para integrar la Matemática y su relación con otras áreas a la práctica docente.

Introducción
Es conocida la relación entre la geometría con el arte, así como su influencia en la arquitectura y en las realizaciones artísticas de los indígenas que ocuparon el territorio argentino. Sin embargo existen otros aspectos interesantes como por ejemplo la geometría en las danzas folclóricas argentinas.

Son muchas y poco conocidas las formas y características de la música existente antes de la conquista en las regiones que hay ocupa la República Argentina. Todas las referencias indican que las tribus tenían un ritual músico que utilizaban tanto en las ceremonias religiosas como en las guerreras.

Los que conquistaron estas tierras no tuvieron en cuenta esta música, desda ya, muy primitiva en relación con el refinamiento de la propia, que fueron imponiendo paulativamente.

Fandangos, rondas, zapateos y otras danzas junto con coplas, serenatas y cantares de caza, o de guerra fueron característicos en los primeros años de la colonia.

Solamente en algunas regiones del oeste de Sudamérica, donde habitaron los núcleos aborígenes más adelantados, entre ellas el noroeste argentino, lograron en parte hacer sobrevivir la música autóctona.

Pese a que la música incaica tuvo gran desarrollo en los pueblos primitivos. fue perdiéndose gradualmente ante el avance de la música española. Al ser desplazada de los centros de mayor población solo se pudo refugiar en la intimidad de los pueblos, que aún la ejecutan con arcaicos instrumentos.

El predomino de la música española, aunque influenciada por la local. indica que el origen de nuestro folclore viene de dicha música y allí estan las raíces de nuestras canciones y danzas populares.

El aporte europeo llegó a estas tierras por distintas vías y esta música fue incorporada en los salones del virreinato, para luego generalizarse en la sociedad colonial, sufriendo los cambios propios de este pasaje.

Así siguiendo llegó a indígenas, negros y europeos de cultura inferior, hasta terminar en al habitante rural, el criollo, que la moldea y la adopta.

En resumen de formas cultas europeas, y con los matices que le imprimeron indígenas, negros y criollos, nace el folclore nacional con características propias.

Caracteristica de las danzas

Es característico de las danzas argentinas que los bailarines, hombre y mujer, realicen sus movimientos en pareja suelta, siendo sus evoluciones independientes.

El ritmo de la melodía es vivo y se agiliza en la parte del zapateo.

La mayor parte de las piezas musicales consta de dos partes llamadas primera y segunda que se inician con el aura (a la voz de aura) algunas acompañadas por pañuelos y otras con palmas.

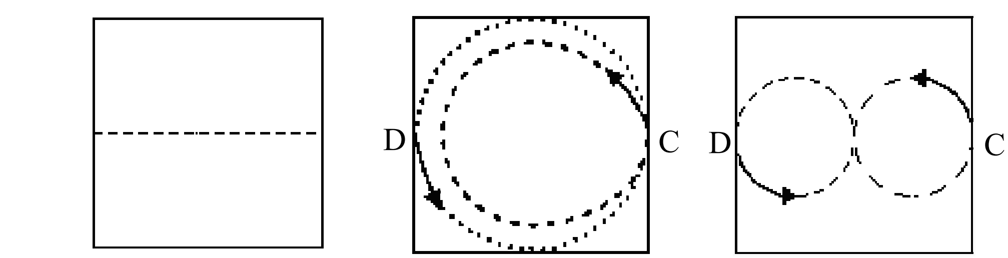
El canto queda reducido a coplas, más bien pequeñas, de índole amorosa y refraneras, repitiéndose el primer verso de cada estrofa y el estribillo.

Nos ocuparemos de la danza y su relación con la geometría. La cantidad de danzas nativas es muy grande. Mencionaremos algunas, como por ejemplo:
el Pericón, el Triunfo, el Cielito, la Media Caña, la Zamba, la Zamacueca, la Cueca, el Gato, la Huella, el Escondido, la Chacarera, la Condición, el Sombrerito, el Palito, el Federal, el Pala Pala, etc.

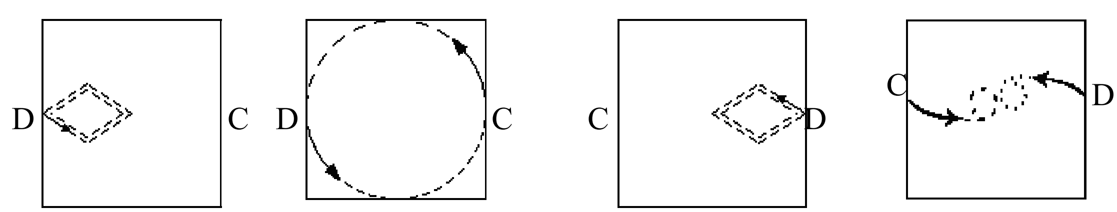
Tomaremos algunas de estas danzas y estudiaremos sus movimientos coreográficos que responden a figuras geométricas conocidas.

El gato
Danza considerada como una de las más antiguas perteneciendo a las denominadas picarescas, de pareja suelta, conocida también con los nombres Perdiz y Mis-mis. Se bailaba en Chile, Perú, Paraguay y en todo el territorio argentino. Esta danza subsiste aún hoy en nuestro país. El gato figuró, antaño, en sitios de honor, tanto en las reuniones aristocráticas como de campaña. Es el arquetipo de las danzas nativas argentinas.

Es la danza más popular del acervo folclórico argentino y ha generado distintas variantes coreográficas que implican solo ligeras modificaciones regionales de la misma. Para el análisis se tomó una coreografía simple, la que corresponde al "gato de un giro".
Los tramos o ideas coreográficas son seis. Las evoluciones se realizan dentro de un **cuadrado** imaginario donde los bailarines se ubican para comenzar la danza en los extremos de una **mediana,** tal cual se indica en la figura.
1) Vuelta. El caballero (C) y la dama (D) recorren la circunferencia por la derecha intentando tocar los puntos medios de cada lado del **cuadrado** original, volviendo al punto de partida. Al llegar al punto de partida los bailarines se enfrentan brevemente y en seguida comienzan el giro.
2) Giro. Caballero y dama, describen cada uno una **circunferencia** volviendo al lugar de origen.
3) Zapateo-zarandeo. El caballero zapatea y la dama hace el zarandeo (describe un **rombo**).
4) Media vuelta. Caballero y dama describen una **circunferencia** como en el primer movimiento, pero lo interrumpen por la mitad (**semicircunferencia**)
Como consecuencia de esta media vuelta, el caballero ocupará el lugar de la dama y ésta la del caballero.
5) Zapateo-zarandeo. En el nuevo lugar el caballero zapatea y la dama zarandea.
6) Giro final. Caballero y dama giran a la izquierda sobre sí mismos, describiendo cada uno una **circunferencia** de radio menor que la mitad del lado del **cuadrado** inicial.
En ese momento termina la música y los bailarines con los brazos algo extendidos de tal modo que las manos de uno lleguen casi a tocar el hombro del otro.
Las figuras indican los seis tramos descriptos.



1 2



3 4 5 6

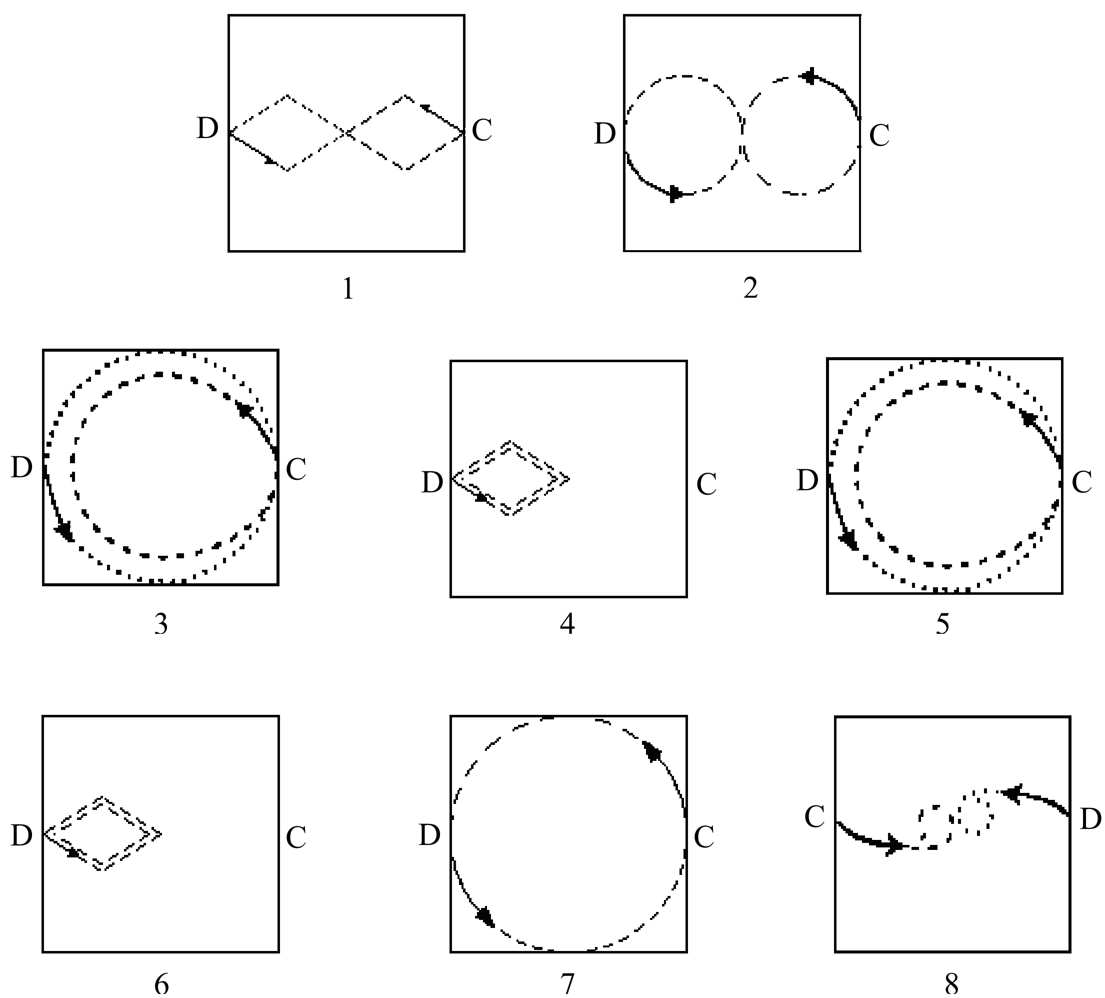
La chacarera

La chacarera es una danza de pareja suelta y picaresca que, según el investigador Félix Coluccio, llegó a la Argentina procedente de Perú, que a su vez la recibió de Europa. Se baila en todo el país con excepción de la zona sur y puede ser bailada por una o dos parejas indistintamente, comenzándose toda la coreografía con el pie izquierdo.

Se parte de un cuadrado con la pareja en los extremos de una de sus medianas. Sus tramos y las figuras geométricas de su coreografía son:

1) Avance y retroceso (rombos)
2) Giro (circunferencias)
3) Vuelta entera (circunferencias)
4) Zapateo y zarandeo (rombo)
5) Vuelta entera (circunferencias)
6) Zapateo y zarandeo (rombo)
7) Media vuelta (semicircunferencia)
8) Giro y coronación (circunferencias)

Ver figuras.



La zamba

Según el “Diccionario Folclórico Argentino” de Félix y Susana Coluccio, la palabra zamba proviene de “zambra”, vocablo árabe con el que se designaba la fiesta morisca en la cual solían danzar las almeas.

Es una danza picaresca de pareja suelta, también llamada chilena, cueca, zamacueca, etc. Al igual que en la cueca, el hombre persigue a la mujer tratando de conquistarla por su habilida de bailarín y con el lenguaje mudo del pañuelo.

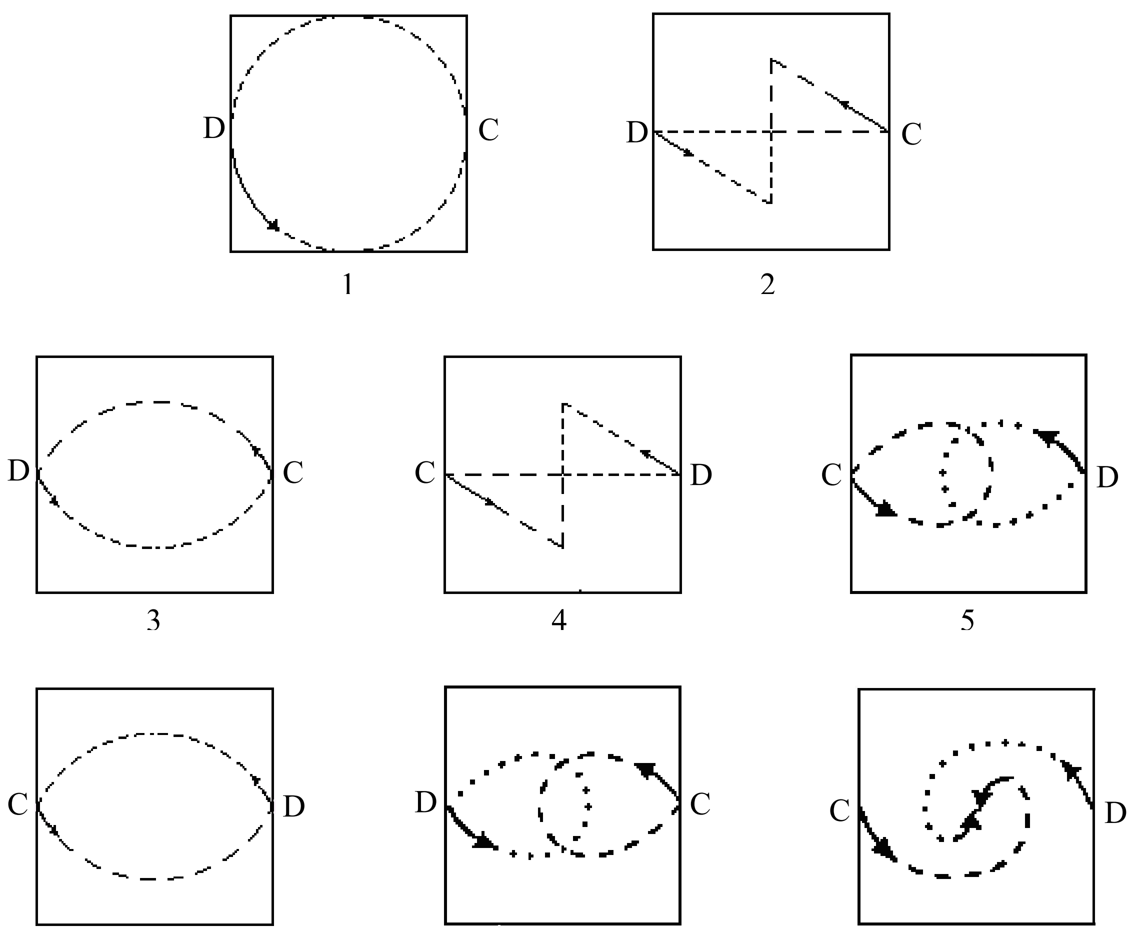
La danza se realiza en un **cuadrado** imaginario, donde la pareja de bailarines se ubica inicialmente en los extremos de una de las **medianas**.

Los tramos y las respectivas figuras geométricas utilizadas son:

1) Vuelta entera (circunferencia), 2) arresto simple (triángulos),

3) media vuelta (semicircunferencias o arcos de elipse), 4) arresto simple (triángulos),

5) arresto girando (circunferencias), 6) media vuelta (circunferencias o arcos de elipse), 7) arresto girando (circunferencias), 8) media vuelta al encuentro (espiral).



Trabajo interdisciplinario

Se propone un trabajo coordinado entre docentes de matemática y de música.

Por ejemplo, tomar la coreografía de una danza analizada en todos sus aspectos (musical, histórico, coreográfico) en la asignatura música, luego, en matemática, identificar las figuras geométricas utilizadas en la coreografía, definir cada una de ellas, enunciar sus propiedades y, según los casos, demostrarlas.
Como pequeño trabajo de investigación conjunto hacer un listado de danzas nativas y buscar las coreografias de varias de ellas, determinar qué figuras geométricas utilizan.
En caso de que aparezcan figuras distintas de las ya localizadas, definirlas y enunciar y demostrar sus propiedades básicas. (tener en cuenta los niveles de los alumnos).

Consideraciones finales

En general la matemática representa para los alumnos de la escuela media una gran preocupación, a veces se suele plantear que es muy abstracta, otras que **no se entiende en qué se puede aplicar** y en otros casos se admite la necesidad de estudiarla pero es rechazada.

Teniendo en cuenta lo anterior, con este trabajo se pretende dar elementos que le posibiliten al docente trabajar en forma integrada con colegas de otras materias.
Los alumnos en este caso apreciarán la presencia de la geometría en otras disciplinas.
Esto tiende a lograr que un docente, cualquiera sea su especialidad, no debe restringirse a conocer y estudiar solo y exclusivamente su materia. Todos los conocimientos que se adquieran y los intereses que cultive, lo enriquecerán para realizar la tarea elegida.

Bilbliografía

Alsina, C.(1983). *Lecciones de Algebra y Geometría.* Trillas. Barcelona: Gustavo Gilli.
Aretz, I. (1991). *El Folclore Nacional Argentino*. Buenos Aires. Editorial Ricordi.
Beruti, P. (1960). *Manual de Danzas Nativas.*Buenos Aires. Edición Escolar.
Coluccio, A. (1960). *Folclore para la Escuela*. Buenos Aires. Editorial Plus Ultra.
Coluccio, F. y Coluccio, S. (1964). *Diccionario Folclórico Argentino*. Editorial Plus Ultra.
Gonzalez, R. (1983). *La Argentina Indígena.* Buenos Aires. Editorial Paidos.
Sardella, O. (2001). La Geometría en la Argentina Indígena. Epoca prehispánica*. Revista Números. N° 45*. Tenerife. Sociedad Canaria Isaac Newton de Educación Matemática.
Vega, C. (1958). *Bailes Tradicionales Argentinos*. Editorial Julio Korn. N° 11960 y ss.

LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN EL CURRÍCULUM CHILENO

Maryorie Benavides, Miguel Villarraga, Enrique Castro y Carolina Brieba
P. U. Católica de Chile, U. del Tolima Chile, U. de Granada , Mineduc-Chile
mbenavid@mat.puc.cl, miguelvr@ugr.es, ecastro@ugr.es, mbrieba@mineduc.cl

Resumen

A finales de la década de los años setenta del siglo veinte, la actividad de resolución de problemas adquirió gran importancia en la enseñanza y aprendizaje de la matemática: sus orígenes, se sitúan en la necesidad de modificar aspectos importantes tanto metodológicos como curriculares.

En este artículo se presenta una aproximación a "resolución de problemas", se describen diversas clasificaciones de problemas a partir de algunos criterios, los factores que inciden en la resolución, las propuestas metodológicas para la enseñanza aprendizaje, el papel de la resolución de problemas en el currículum de matemáticas y finalizamos con la resolución de problemas en el currículum chileno, enunciando los objetivos fundamentales y contenidos mínimos relacionados con el tema.

Aproximaciones a "Resolución de problemas"

Pese a la importancia de la resolución de problemas en el ámbito científico, en el educativo y en otros campos relacionados, las expresiones *problema y resolución de problemas* no tienen un significado unívoco que las caracterice dentro de la investigación en Educación Matemática. Se impone esclarecer estos términos para tener una caracterización comprehensiva de la resolución de problemas aplicable a la Educación Matemática y para precisar el sentido con que los vamos a utilizar.

Cuando observamos los tipos de problemas que se han utilizado desde una perspectiva general de investigación vemos que incluyen tareas tan dispares como resolución de anagramas, razonamientos silogísticos, colocación de cerillas u otros objetos según distintas configuraciones, cambios de posición mediante secuenciación de transformaciones como en la torre de Hanoi, tareas estratégicas como hacer cruzar lobos y corderos un río, y muchas otras. Aún ciñéndonos a la resolución de problemas estrictamente matemáticos el campo de tarea posibles es tan amplio que surgen dificultades a la hora de establecer una noción general de problema.

Una manera de describir la resolución de problemas es considerar los distintos agentes que intervienen en la resolución de un problema y los componentes que lo articulan. Desde el punto de vista escolar, en el que estamos interesados hay que tener en cuenta que en toda situación de resolución de los problemas de matemáticas se distinguen o intervienen tres componentes: el *problema*, interrogante o cuestión que se plantea, el *alumno* (o los alumnos) a quien se plantea la cuestión a la que deben encontrar respuesta y la *situación* en que resuelve el problema, que en el ámbito educativo es el aula, manejada por el *profesor.*

La consideración de cada uno de ellos, por separado o conjuntamente, en interacción con los otros componentes, permitirá precisar lo que entendemos por problema y por resolución de problemas en Educación Matemática.

La componente *problema* hace referencia al ámbito de la matemática, donde se distinguen problemas de demostrar y problemas de hallar. La formulación y la invención de problemas son un aspecto clave del quehacer matemático y, hacerse preguntas de ¿qué pasaría si? Es una estrategia para plantear nuevos problemas.

Desde el punto de vista del resolutor, un problema se puede describir como “una situación en la cual se intenta alcanzar una meta y se hace necesario encontrar un medio para conseguirlo” porque el camino directo a la meta está bloqueado. Esta clase de formulación es típica de los psicólogos, quienes usualmente añaden que un problema requiere un individuo en la situación, alguien que asuma, “que tenga”, el problema. Mayer (1986) considera que la mayoría de los psicólogos concuerdan en que un problema tiene ciertas características: “datos ..., objetivos ..., obstáculos” (p. 18), agrega que una definición de *problema* debe tener en esencia las tres ideas siguientes: “1) El problema está actualmente en un estado, pero, 2) se desea que esté en otro estado, y 3) no hay una vía directa y obvia para realizar el cambio.” (p. 19) Algunos autores consideran que la diferencia entre problema y ejercicio, se refiere a que: un problema es una situación en que el resolutor no tiene un proceso algorítmico que le conduce con certeza a la solución.

Los problemas que resuelven los alumnos en la clase de matemáticas provienen en muchas ocasiones o están propuestos por el profesor. Con ello se introduce un matiz nuevo: En estas situaciones de enseñanza se emplean a menudo como sinónimas las palabras “problema” y “tarea”, sin reconocer que “tarea” implica la existencia de un emisor y un receptor, mientras que no sucede así con “problema”. Entramos con ello en una perspectiva sociológica de la resolución de problemas, en la cual la clase de matemáticas es un medio social en el que los participantes tienen que interpretar las acciones e intenciones de los demás, estructurando conjuntamente la situación a la luz de sus propias agendas.

En Educación Matemática la Investigación en Resolución de Problemas ha conducido a la identificación de variables de análisis en resolución de problemas relativas a estas tres componentes (Castro, 1991; Castro y Villarraga, 2001).

Clasificación de problemas

Hay varias clasificaciones de problemas. A continuación mencionaremos algunas de las más referenciadas en la literatura.

Charles y Lester (1982) realizan una clasificación en seis tipos de problemas: *Ejercicios de repetición (desarrollan habilidades), problemas de traducción simple*, *problemas de traducción compleja* (realizan más de una operación para encontrar su solución), *problemas de procesos* (la forma de cálculo no aparece claramente delimitada), *problemas aplicados* y *problemas de puzzles* (muestran el potencial recreativo de las matemáticas.)

Un tipo particular de problemas: “Los problemas aritméticos cuya expresión o enunciado es verbal se les llama “Problemas aritméticos enunciados verbalmente” y se les suele designar con las siglas P.A.E.V.”, tal como lo define (Castro 1991, p.66). Atendiendo al número de datos que aparecen explícita o implícitamente en la información se puede hablar de PAEV simples y compuestos. Para resolver un PAEV simple se necesita una sola clase de operación aritmética: adición, sustracción, multiplicación o división, a partir de las cuales se establecen las distintas categorías semánticas que describimos a continuación.

- *La categoría semántica de problemas de estructura aditiva* esta formada por cuatro tipos de problemas: problemas de cambio, problemas de combinación, problemas de comparación y problemas de igualación.
- *La categoría semántica de problemas de estructura multiplicativa*, se clasifican en cuatro grupos, según Vergnaud: problemas de “Isomorfismo de medidas” (problemas de proporcionalidad simple), problemas de “producto de medidas”, problemas de “comparación” y problemas de “proporcionalidad múltiple”

Factores que inciden en la resolución de problemas

Charles y Lester (1982) analizan el proceso mental que supone resolver adecuadamente los problemas matemáticos. Para ellos, los datos iniciales determinan los objetos del problema. Las orientaciones en los datos iniciales son: el análisis de la información, los datos esenciales y su confrontación; de donde surge el esquema general o estrategia de resolución apoyada en un sistema de operaciones que lleve a la solución, posteriormente se confrontan los resultados con los datos iniciales, si hay acuerdo termina la actividad, si no hay acuerdo se vuelve al primer paso para determinar los objetivos del problema a partir de los datos iniciales.

Existen tres conjuntos de factores del sujeto que interaccionan en el trabajo de resolución de problemas. Los factores *afectivos* de: motivación, interés, perseverancia y ansiedad, los factores de *experiencia*: fundamentos matemáticos previos, edad y familiaridad con estrategias de solución y finalmente los factores *cognitivos* de: memoria, habilidad analítica y lógica, y la habilidad lectora, espacial y de cálculo.

Propuestas metodológicas para la enseñanza aprendizaje de la resolución de problemas

Schoenfeld (1980) propone un esquema similar al de Polya (1945), en cuatro etapas: analizar y comprender un problema (dibujar un diagrama, examinar un caso especial e intentar simplificarla), diseñar y planificar una solución (planificar la solución y explicarla), explorar soluciones (considerar una variedad de problemas equivalentes, considerar ligeras o amplias modificaciones del problema original, finalmente verificar la solución.

Bransford y Stein (1984) centran su interés en conseguir buenos resolutores. Proponen el método IDEAL, de resolución de problemas que está concebido con la finalidad de facilitar la identificación y reconocimiento de las distintas partes o componentes a tener en cuenta en la resolución de problemas. Las letras del método IDEAL, corresponden a las iniciales de las etapas del método propuesto: identificación del problema, definición y representación del problema, exploración de posibles estrategias, actuación fundada en una estrategia y logros: observación y evaluación de los efectos de las actividades.

Papel de la resolución de problemas en el currículum de matemáticas

Según Stanic y Kilpatrick y (1989), en el currículum de matemáticas la resolución de problemas se ha utilizado como: contexto, habilidad y arte.

La resolución de problemas como contexto, consiste en utilizar los problemas como medio para lograr otros objetivos. Según finalidad se subdividen en: resolución de problemas como justificación, resolución de problemas como motivación, resolución de problemas como recreación, resolución de problemas como vehículo y resolución de problemas como práctica.

La resolución de problemas como habilidad, en este caso se entiende que la resolución de problemas es una de las muchas habilidades que deben enseñarse en el currículum, dentro de la jerarquía de habilidades para ser adquirida por los estudiantes. Estas distinciones jerárquicas se hacen en función de problemas “rutinarios” y problemas “no rutinarios”. La resolución de problemas “no rutinarios” se caracteriza por la necesidad de utilizar altos niveles de destreza y habilidad que se pueden adquirir una vez que los estudiantes hayan aprendido conceptos básicos y las habilidades rutinarias.

La resolución de problemas como arte emerge del trabajo de George Polya. Entre sus aportes destacan las que hacen referencia a las actitudes adecuadas y a los métodos o heurísticas particulares que forman parte de la resolución de problemas. Polya afirma que la mejor contribución es enseñar al alumno a pensar. La resolución de problemas es un arte práctico, y se aprende por imitación y práctica, y el papel del profesor es el de facilitador del aprendizaje de estrategias y técnicas necesarias, como guía para introducir a la resolución de problemas en las clases.

La importancia de la resolución de problemas en la enseñanza aprendizaje de las matemáticas, se resume en la siguiente cita de los Principios y Estándares para las Matemáticas Escolares de Estados Unidos (2000):

Los programas de instrucción … deberían permitir a los estudiantes:

- construir conocimiento nuevo a través de la resolución de problemas;
- resolver problemas que surjan en matemáticas y en otros contextos;
- aplicar y adaptar una amplia variedad de estrategias para resolver problemas;
- controlar y reflejar el proceso de resolución de problemas.

La resolución de problemas en el currículum chileno

El Decreto Supremo de Educación N°220 de 1998, “Establece Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios para la Enseñanza Media[3] y fija normas generales para su aplicación”. Los Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios de la Educación Media (Educación Secundaria) han sido formulados por el Ministerio de Educación, respondiendo a:

- Las necesidades de actualización, reorientación y enriquecimiento curricular que se derivan de cambios acelerados en el conocimiento
- Las políticas educacionales de Estado que impulsa el Gobierno de Chile en la última década del siglo XX, están orientadas hacia el logro de objetivos de mejoramiento de la calidad y la equidad de las oportunidades educativas.

El aprendizaje de la matemática se asocia al desarrollo de ciertas habilidades, que se han considerado importantes en la formación de cada chileno:

- Habilidades referidas al aprendizaje de procedimientos y métodos que permiten el uso de instrumentos, la realización de cálculos y estimaciones, y la aplicación de fórmulas.
- Habilidades referidas a la estructuración y generalización de los conceptos matemáticos, búsqueda de patrones y de regularidades, integración y síntesis de conocimientos, y encadenamiento lógico de argumentos.
- Habilidades referidas a la resolución de problemas, como la identificación de la incógnita, estimación del orden de magnitud de la incógnita, búsqueda de caminos de solución, análisis de las soluciones, estimación de soluciones, sistematización del ensayo y error, y formulación de conjeturas.

Las últimas habilidades mencionadas, referidas a la resolución de problemas, son un aspecto innovador en el currículo chileno, por cuanto intenta acercar la aritmética a la realidad, planteando problemas de diferentes tipos, en particular:

[3] La Enseñanza Media, la cursan los jóvenes de entre 14 y 18 años de edad.

> "Los problemas aritméticos verbales se incluyen en el currículo escolar con la finalidad, entre otras, de facilitar al alumno este acercamiento entre aritmética y realidad, entre aritmética y aplicaciones a la vida real, que hacen más significativo y valioso su estudio"
>
> (Castro, 1995, p. 17).

A continuación se presentan los objetivos fundamentales y contenidos mínimos, relacionados con la resolución de problemas para cada nivel de enseñanza media.

Primer año Medio

Objetivos Fundamentales

Utilizar diferentes tipos de números en diversas formas de expresión (entera, decimal, fraccionaria, porcentual) para cuantificar situaciones y resolver problemas.

Resolver problemas seleccionando secuencias adecuadas de operaciones y métodos de cálculo, incluyendo una sistematización del método ensayo-error.

Contenidos Mínimos

Análisis de la significación de las cifras en la resolución de problemas.

Resolución de desafíos y problemas numéricos, tales como cuadrados mágicos o cálculos orientados a la identificación de regularidades numéricas.

Planteo y resolución de problemas que perfilen el aspecto multiplicativo del porcentaje.

Planteo y resolución de problemas que involucren proporciones directa e inversa.

Planteo y resolución de problemas que involucren ecuaciones de primer grado con una incógnita.

Resolución de problemas relativos a congruencia de trazos, ángulos y triángulos.

Resolución de problemas relativos a polígonos, descomposición en figuras elementales congruentes o puzzles con figuras geométricas.

Segundo año Medio

Objetivo Fundamental

Explorar sistemáticamente diversas estrategias para la resolución de problemas, profundizar y relacionar contenidos matemáticos.

Contenidos Mínimos

Resolución de desafíos y problemas no rutinarios que involucren sustitución de variables por dígito y /o números.

Representación, análisis y resolución de problemas contextualizados en situaciones como la asignación de precios por tramo de consumo, por ejemplo de agua, luz, gas, etc.

Planteo y resolución de problemas y desafíos que involucren sistemas de ecuaciones.

Planteo y resolución de problemas relativos a trazos proporcionales.

Tercer año Medio

Objetivo Fundamentales para el plan común

Aplicar y ajustar modelos matemáticos para la resolución de problemas y el análisis de situaciones concretas.

Objetivos Fundamentales para la formación diferenciada científico-humanista

Analizar, confrontar y construir estrategias personales para la resolución de problemas o desafíos que involucren ecuaciones de 2° grado, lugares geométricos expresados analíticamente y programación lineal.

Contenidos Mínimos para el plan común

Resolución de problema relativos a cálculos de alturas o distancias inaccesibles que pueden involucrar proporcionalidad en triángulos rectángulos.
Resolución de problemas sencillos que involucren suma o producto de probabilidades.
Contenidos Mínimos para la formación diferenciada científico-humanista
Resolución gráfica y analítica de problemas sencillos que involucren rectas, circunferencia y parábola.
Planteo y resolución gráfica de problemas sencillos de programación lineal.

Cuarto año Medio
Objetivo Fundamental para el plan común
Reconocer y analizar las propias aproximaciones a la resolución de problemas matemáticos y perseverar en la sistematización y búsqueda de formas de resolución.
Objetivo Fundamental para la formación diferenciada científico-humanista
Analizar, confrontar y construir estrategias personales para la resolución de problemas o desafíos que involucren funciones, relaciones entre geometría y progresiones.
Contenidos Mínimos para el plan común
Plantear y resolver problemas sencillos que involucren el cálculo de interés compuesto.
Resolución de problemas sencillos sobre áreas y volúmenes de cuerpos generados por rotación o traslación de figuras planas.
Contenidos Mínimos para la formación diferenciada científico humanista
Planteo de algunos problemas geométricos de probabilidades o de matemáticas financiera que involucren la noción de sumatoria.
Progresiones aritméticas y geométricas, suma de sus términos.
Aplicación a la resolución de algunos problemas geométricos y de interés compuesto.

Bibliografía

Bransford, J. D. y Stein, B. S. (1984). *Solución IDEAL de problemas.* Barcelona: Labor.

Castro, E. (1991). *Resolución de problemas aritméticos de comparación multiplicativa.* Granada: Universidad de Granada.

Castro, E. (1995). *Niveles de comprensión en problemas verbales de comparación multiplicativa*. Granada: Comares.

Castro, E. y Villarraga, M. (2001). Resolución de Problemas matemáticos y detección de la diversidad en una unidad conceptual. En J. Cardeñoso, A. Moreno., J. Navas y F. Ruiz (Eds.) *Investigación en el aula de Matemáticas. Atención a la Diversidad* (pp. 125-133). Granada: Universidad de Granada. Departamento de Didáctica de la Matemática.

Charles, R. y Lester, F. (1982).*Teaching problem solving. What*, *Why, How*. Palo Alto:Dale Seymour Pu.

DECRETO N°220. (1998). Publicado en el Diario Oficial de la República de Chile.

Goldin, G.A. y MaClintock, C. E. (Eds.) (1980). *Task Variables in Mathematical Problem Solving*. Philadelphia, Pensilvania: The Franklin Institute Press.

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, V.A: NCTM.

Polya, G. (1945). How to Solve It. Princeton University Press.Trad. cast. *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas, 1979.(Octava impresión).

Mayer, R. E. (1986) . Pensamiento, resolución de problemas y cognición. Barcelona: Paidos.

Schoenfeld, A.H. (1980). Heuristic in the classroom. En NCTM *Problem solving in school Mathematics* (pp.9-23). Reston, V.A: NCTM.

Stanic, G. y Kilpatrick, J. (1989). Historical perspectives on Problem Solving in the Mathematics Curriculum. En R.I. Charles y E.A. Silver (Eds.), *The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving*. Reston, VA:NCTM-LEA.

LAS CALCULADORAS GRÁFICAS Y EL CONOCIMIENTO CIENTÍFICO DE LAS MATEMÁTICAS

Olga Pérez y Ana Quiroga
U. de Camaguey, Instituto Laurens
Cuba y México
olguitapg@yahoo.com, olgapg@inf.reduc.edu.cu

Resúmen

Uno de los desafíos esenciales de la enseñanza de las matemáticas consiste en la utilización de métodos y medios de enseñanza que propicien en los alumnos la formación de un conocimiento científico.

Se asume como referente teórico los métodos del conocimiento científico de las ciencias pedagógicas, teniendo en cuenta que cuando el conocimiento que se quiere formar es científico, tiene que crear una actividad cognoscitiva nueva, lo que hace que la enseñanza y los medios de enseñaza que utilicemos sean diferentes, particularmente por el lenguaje que tiene la matemática, que ha de ser el lenguaje científico donde, además del habitual, se da el simbólico.

El objetivo del trabajo es fundamentar la utilización de las calculadoras gráficas como un medio muy importante y actual para lograr formar en los alumnos un conocimiento científico de las matemáticas, y precisar que no basta con la enseñanza expositiva para que el estudiante se forme un conocimiento científico, pues la actitud científica hay que formarla, educarla en los estudiantes.

Se caracterizan los niveles del conocimiento científico de las matemáticas, el empírico y el teórico y se precisa que ambos niveles se distinguen por los métodos de enseñanza y aprendizaje, donde el empírico emplea métodos que permiten describir los hechos, y es por eso que para este nivel se recomienda la visualización con la utilización de las calculadoras gráficas, y el nivel teórico utiliza métodos para distinguir las esencias, por ejemplo el hipotético-deductivo, el lógico histórico, la ascensión de lo abstracto a lo concreto pensado, etc.

El trabajo aporta como resultado los principios para la utilización de las calculadoras gráficas en las clases de matemáticas en aras de formar un conocimiento científico en la enseñanza de esta materia.

Introducción

Uno de los problemas esenciales de la enseñanza de las matemáticas consiste en la utilización de métodos y medios de enseñanza que propicien en los alumnos la formación de un conocimiento científico.

Cuando el conocimiento que se quiere formar es científico, tiene que crear una actividad cognoscitiva nueva, lo que hace que la enseñanza y los medios de enseñaza que utilicemos sean diferentes, particularmente por el lenguaje que tiene la matemática, que ha de ser el lenguaje científico donde, además del habitual, se da el simbólico.

Las calculadoras gráficas constituyen un medio importante y actual para lograr esto, pues no basta con la enseñanza expositiva para que el estudiante se forme un conocimiento científico de las matemáticas, pues, la actitud científica hay que formarla, educarla en los estudiantes.

Desarrollo

Hay dos niveles del conocimiento científico de las matemáticas, el empírico y el teórico. El nivel empírico da sólo el saber del hecho o los hechos fundamentales que caracterizan un fenómeno, es un saber principalmente de datos, de hechos y de propiedades. Para este caso las calculadoras gráficas son un potente medio, por ejemplo, en la enseñanza primaria, los niños deben estudiar los movimientos del plano (reflexión, traslación y la simetría central o rotación de 180^{0}) y deben aprender que “en un movimiento, una figura y su imagen son iguales”, además deben conocer que estos movimientos se pueden realizar sucesivamente, es decir, mover una figura sucesivamente según varios movimientos.

Con la visualización, a través de las calculadoras gráficas, de estos movimientos podemos formar el nivel empírico, pues este emplea acciones materiales sobre los objetos, y esto sienta las bases para el nivel teórico que emplea esencialmente la abstracción, sobre la base del saber empírico, y puede así el maestro llevar al alumno a que descubra las propiedades esenciales de la reflexión, traslación y la simetría central, para después volver a la utilización de las calculadoras gráficas en la resolución de problemas relacionados con los movimientos en el plano.

Como puede apreciarse en este ejemplo, el nivel empírico utiliza un lenguaje descriptivo para obtener saber sobre los hechos, por lo que es común la utilización de los datos, mientras que el nivel teórico emplea un lenguaje simbólico y su sentido son los objetos ideales.

Ambos niveles se distinguen también por los métodos de enseñanza y aprendizaje. El empírico emplea métodos que permiten describir los hechos, y es por eso que para este nivel resulta útil la utilización de las calculadoras gráficas, y el nivel teórico utiliza métodos para distinguir las esencias, por ejemplo el hipotético-deductivo, el lógico histórico, la ascensión de lo abstracto a lo concreto pensado, etc.

Se distinguen, por tanto, por los resultados. El nivel empírico es un saber objetivo, libre de errores, aunque es tan subjetivo como todo acto cognitivo. Se fija en un lenguaje diferente de las proposiciones protocolares. El hecho empírico se obtiene mediante la repetición de las proposiciones protocolares limpiando de lo casual para obtener así las invariantes del conocimiento.

Una simple afirmación protocolar no es un hecho empírico, sino la separación de la invariante y su ubicación en una teoría, ya que el hecho empírico siempre va acompañado y tiene que ser ubicado e interpretado en un contexto teórico, o sea, que el hecho empírico no puede ser separado de la teoría, como expresión de los niveles del conocimiento, lo que nos afirma que estas calculadoras no lo resuelven todo sino que constituyen un medio para llegar al conocimiento científico.

El nivel teórico arroja como resultado una teoría o generalizaciones científicas, como formas del saber teórico y por ello podemos definir este saber teórico como un sistema de puntos de vistas, ideas y representaciones orgánico, íntegro y no contradictorio que descubre en forma generalizada las propiedades y enlaces regulares esenciales de la realidad. Sobre su base se logra la explicación y el pronóstico acerca de los fenómenos.

El nivel empírico no solo precede al teórico sino que de cierto modo es su nivel de culminación. A su tiempo, la teoría surge de la empiria y la predetermina de igual forma, por lo que el enlace entre ambos niveles del conocimiento es dialéctico.

Por tanto, consideramos que la metodología de la utilización de las calculadoras gráficas, para la formación de un conocimiento científico en la enseñanza de las matemáticas, se determina por los principios siguientes:

a) Permitir la objetividad y cognocibilidad de los fenómenos;
b) Dar un enfoque multifacético en el estudio de los procesos, fenómenos y hechos, su interacción e interdependencia;
c) Permitir la consideración de los objetos de investigación en movimiento, cambio y desarrollo;
d) Posibilitar dar paso del análisis y la explicación del fenómeno al conocimiento de su esencia, la revelación de las leyes, tendencias y regularidades de los fenómenos y hechos estudiados;
e) Considerar la práctica como fuente y criterio de la veracidad.

Conclusiones

El conocimiento científico expresa siempre una aproximación más objetiva al conocimiento verdadero porque su intencionalidad es precisamente esta, por lo que tiene que hacer uso de medios de probada efectividad para desentrañar la esencia de los objetos y fenómenos de la realidad y establecer diferentes instancias de complejidad de este, y las calculadoras gráficas constituyen en la actualidad un potente medio con estas características, por lo que desde la primaria hasta el nivel universitario se debe valorar las vías didácticas para su uso efectivo, bajo los principios de su utilización aquí definidos los cuales se basan en los principios de la didáctica ya definidos por varios autores.

Bibliografía

Pérez, O. L. (2000). *La evaluación del aprendizaje como elemento del sistema de dirección del proceso de enseñanza aprendizaje en la enseñanza de las matemáticas para ciencias técnicas*. Universidad de Camagüey. Cuba. Tesis de Doctorado.

Talízina N., F. (1992). La formación de la actividad cognoscitiva de los estudiantes. México. Ángeles.

NATIONAL COUNCIL TEACHERS OF MATHEMATICS (NCTM) (1995). *Assesment standards for school Mathematics*

Valera, O. *Problemas actuales de la pedagogía y la psicología pedagógica*. Soporte electrónico. Ciudad Habana. Cuba.

MATEMÁTICA, UNA ACTIVIDAD HUMANA

Vilma Viazzi y Gloria Suhit
UNS - Fac. Reg. B. Bca - UTN, Argentina
vviazzi@criba.edu.ar; gsuhit@criba.edu.ar

Resumen
Año tras año constatamos que los alumnos aspirantes a ingresar - tanto a la Universidad Nacional del Sur como a la Facultad Regional Bahía Blanca, UTN - se enfrentan con distintos obstáculos asociados con los objetos básicos del cálculo, los que se reiteran en forma sistemática. Desde nuestra experiencia creemos que algunas posibles causas que obstaculizan el aprendizaje y muy especialmente el de los contenidos matemáticos las podemos relacionar con una educación matemática basada durante mucho tiempo en ideas que provienen de un enfoque formalista de la disciplina, en métodos didácticos apoyados fuertemente en la memoria y la algoritmia, sobre valorando los procedimientos analíticos, otorgando excesiva prioridad al marco algebraico o al numérico. En cambio, si consideramos a la matemática como una construcción humana que surge como consecuencia de la necesidad del hombre para dar respuesta a cierta clase de problemas, problemas que se pueden referir al mundo natural y social o bien pueden ser internos a la propia disciplina, los objetos matemáticos (conceptos, procedimientos, teorías,…) surgen y evolucionan progresivamente, para dar respuesta o solución a estos problemas. Esta visión obliga a una reformulación epistemológica, la cual consiste en considerar al humano haciendo matemática y a diseñar situaciones donde el foco de atención no esté sólo en la adquisición del conocimiento, sino también en el desarrollo de actividades, para lo cual la formación docente es un factor primordial para iniciar el cambio.

Introducción
En la historia del desarrollo del pensamiento humano ha existido una constante conexión entre sus corrientes filosófica y matemática. Muchos son los movimientos filosóficos que buscaron su apoyo, su inspiración, y hasta su modelo, en el estilo y modo de proceder de la matemática. La dinámica interna del pensamiento matemático, la lógica de su estructura, simple y clara, hacen de él un modelo de reflexión fiable. A través de la historia hubo períodos en que predominó la matemática como filosofía y otros en los que prevalecieron las aplicaciones. Estos períodos se complementaron mutuamente y el progreso de la matemática ha resultado del empuje alternado de las dos tendencias. En los dos aspectos la matemática es profunda. Sus aplicaciones son esenciales para el desenvolvimiento en la vida y sus concepciones enriquecen lo más puro del espíritu. La actual filosofía de la matemática, dejó de preocuparse tan insistentemente como en la primera mitad del siglo pasado sobre los problemas de fundamentación de la matemática y pasó a enfocar su atención en el carácter cuasiempírico de la actividad matemática, así como en los aspectos relativos a su historicidad e inmersión en la cultura en la que se origina, considerando la matemática como un subsistema cultural con características en gran parte comunes a otros sistemas semejantes.

En cambio, se puede considerar a la matemática como una construcción humana que surge como consecuencia de la necesidad del hombre para dar respuesta a cierta clase de problemas, problemas que se pueden referir al mundo natural y social o bien pueden ser internos a la propia disciplina. En respuesta o solución a estos problemas, externos o internos, surgen y evolucionan progresivamente los objetos matemáticos (conceptos, procedimientos, teorías,…) sujetos a un proceso de negociación social, procesos que deben considerarse en la enseñanza – aprendizaje. Esta es la posición de las teorías constructivistas, que tienen sus raíces inmediatas en la teoría de Jean Piaget, quien desarrolla su epistemología genética sobre el supuesto de que el conocimiento se construye mediante la actividad del sujeto sobre los objetos, en forma progresiva y a partir de estructuras cognoscitivas anteriores. Los objetos matemáticos ya no habitan en un mundo eterno y externo a quien conoce, sino que son producidos, construidos, por él mismo en un proceso continuo de asimilaciones y acomodaciones que ocurre en sus estructuras cognitivas. La epistemología genética, mediante su método histórico- genético (que considera a la historia como un " laboratorio epistemológico " en el que se rectifican o ratifican ciertas hipótesis) muestra que hay cambios en el desarrollo de la matemática que no corresponden a una nueva acumulación de nuevos " descubrimientos ". En efecto, los conceptos matemáticos han ido reconstruyendo su significado con el transcurso del tiempo, ampliándolo, precisándolo o revisándolo, adquiriendo relevancia o por el contrario, siendo relegados a segundo plano.

La nueva hipótesis consiste, entonces, en que la actividad humana es la fuente de reorganización de la obra matemática. Según esta nueva epistemología, al estudiar la construcción del conocimiento se deben tener en cuenta cuatro componentes fundamentales: las dimensiones epistemológica, cognitiva, didáctica y social. Esta aproximación múltiple y sistémica recibe el nombre de *acercamiento socioepistemológico* (Cordero Osorio, F; 2001)

La aproximación socioepistemológica intenta articular en sus componentes, lo humano y su actividad para que conviertan en elementos primarios en las teorizaciones de la matemática educativa. La enseñanza usual de los conceptos matemáticos tiende a presentarlos como objetos universales tanto en tiempo como en espacio, el análisis epistemológico los provee de historicidad y permite observar las disparidades entre el saber científico y el enseñado y ello contribuye a desterrar la concepción de que los objetos de enseñanza son copias simplificadas, pero fieles a los objetos de la ciencia. La componente social, a través del aprendizaje cooperativo, funciona como el medio más apropiado para estudiar las construcciones mentales que realiza el estudiante para entender los conceptos matemáticos. Si consideramos que la matemática es una construcción humana, un producto social y cultural, todo objeto matemático para consolidarse como tal, necesariamente pasa por varias etapas o momentos. Comienza por ser utilizado sin mayor conciencia de su presencia, siendo manipulado, extendido, formulado, dotado de representaciones y significados más precisos hasta ser insertado en una teoría con características propias.

A modo de síntesis podemos aseverar que las tendencias actuales reconocen un triple carácter a la disciplina: *como actividad humana*, comprometida con la resolución de ciertas situaciones problemáticas, *como lenguaje simbólico* y *como un sistema conceptual lógicamente organizado y socialmente compartido*, emergente de la actividad de matematización. Teniendo en cuenta estas tendencias, la educación matemática debería ser coherente con este triple carácter, tanto en el diseño curricular como en la planificación de la tarea aúlica. Los resultados de las evaluaciones de los alumnos aspirantes a ingresar a las distintas universidades, el bajo rendimiento académico (*) y la relevante deserción que se registra en el primer año de estudio muestran evidencias que estas tendencias no parecen ser consideradas.

(*) A continuación se muestran los % de alumnos que, sobre el número de inscriptos, aprobaron los trabajos prácticos de las asignaturas Análisis Matemático I y Álgebra y Geometría Analítica, correspondientes al primer cuatrimestre del primer año de estudio de carreras de ingeniería.

Asignatura	2000		2001		2002		2003	
	UNS	UTN	UNS	UTN	UNS	UTN	UNS	UTN
Análisis Matemático I	40	48	32,7	38	31	43	27,4	28
Álgebra y Geometría Analítica	37	47	33	42	32	40	30	23

Nuestra experiencia

Año tras año constatamos que los alumnos aspirantes a ingresar - tanto a la Universidad Nacional del Sur como a la Facultad Regional Bahía Blanca, UTN – se enfrentan con distintos obstáculos asociados con los objetos básicos del cálculo, los que se reiteran en forma sistemática.

Los últimos exámenes, donde se pretendió medir la conceptualización de objetos matemáticos como número real y función, mostraron que incluso aquellos alumnos que tuvieron una preparación previa para el examen no lograron resolver satisfactoriamente la ejercitación propuesta.

Así por ejemplo:

- El concepto de función es fundamental en la matemática y en muchas disciplinas que la utilizan como herramienta, luego es esencial que lo incorporen como objeto y como herramienta. Sin embargo se observa una gran dificultad para identificar, representar y transferir el concepto de función.
- Ejercicios donde se pregunta si una circunferencia o una recta perpendicular al eje de abscisas corresponden a la gráfica de una función, los resolvieron correctamente muy pocos alumnos, así mismo un limitado número logra expresar simbólicamente funciones a partir de problemas planteados, lo que muestra las dificultades en la interpretación y la falta de independencia en el razonamiento.
- Los alumnos desconocen el concepto de radián y su relación con el arco y radio de una circunferencia. Los ejercicios referidos a ello no fueron contestados por ningún alumno.
- El análisis de la veracidad o falsedad de ciertas afirmaciones referidas a propiedades de los números reales muestra la manera mecánica con que los alumnos realizan las operaciones con los mismos.
- Se evidencian serias dificultades para resolver situaciones problemáticas, para inferir e interpretar datos(en particular si los enunciados no posee valores numéricos ni sugieren la fórmula a utilizar), buscar alternativas de solución y realizar una mirada retrospectiva ante la solución hallada.

Los obstáculos epistemológicos de los principios básicos del cálculo se evidencian aún en los primeros años de universidad. Si bien se puede enseñar a los estudiantes cálculos en forma más o menos mecánica las grandes dificultades se encuentran en una comprensión satisfactoria de los conceptos y métodos de pensamiento, tanto en el campo del cálculo como en el del álgebra, dificultades que, en general, están asociadas a la comprensión lectora y se traducen en limitaciones para expresarse en forma oral y escrita, las que perduran en alumnos avanzados en la carrera.

Algunas posibles causas que obstaculizan el aprendizaje de los contenidos matemáticos la podemos relacionar con una educación matemática basada durante mucho tiempo en ideas que provienen de un enfoque formalista de la misma, en métodos didácticos apoyados fuertemente en la memoria y la algoritmia, sobre valorando los procedimientos analíticos, otorgando excesiva prioridad al marco algebraico o al numérico, dejando de lado el manejo de los significados en los dominios visual o verbal. De este modo el alumno no logra percibir las relaciones entre los procedimientos con las aplicaciones más cercanas a su vida cotidiana y se lo priva de experimentar sus propios aprendizajes en contextos distintos al que se presentan en el aula.

Al respecto M. Artigue afirma:
"Se observa que la enseñanza tradicional tiende a centrarse en una práctica algorítmica y algebraica del cálculo y a evaluar en esencia las competencias adquiridas en ese dominio. Este fenómeno se convierte en un círculo vicioso: para obtener niveles aceptables de éxito, se evalúa aquello que los estudiantes pueden hacer mejor, y esto es, a su vez, considerado por los estudiantes como esencial ya que es lo que se evalúa"

Y haciendo nuestras las palabras del Dr. Luis Santaló, creemos que:

> *"En todos los niveles y en todos los temas la matemática debe tener un valor formativo y otro informativo. Los dos objetivos deben coordinarse armoniosamente, pues las veces que se ha ensayado la polarización en uno sólo de ellos, los resultados no han sido buenos. Formar la mente educando las características de deducción lógica y la capacidad de síntesis y ordenación de conocimientos, pensando que luego el alumno aplicará por si solo la formación recibida a los problemas de la vida real o aun a problemas teóricos de las distintas disciplinas o actividades laborales que se le presentan, no da el resultado que podría pensarse. El alumno debe ser instruido al mismo tiempo en la aplicación de los conocimientos adquiridos a casos especiales que ejemplifiquen los mismos y le sirvan, por analogía, en casos parecidos. Es decir, además de formar, la matemática debe informar. El lema debe ser "formar informando" o bien "informar formando". … Enseñar a pensar, pero también enseñar a usar el pensamiento adecuado a cada oportunidad".*

En este contexto la enseñanza de la matemática debe ser vista como un quehacer de la cultura y la educación matemática entenderse como las acciones practicadas por los individuos sobre la realidad, donde el aprendizaje se produce como consecuencia de compartir significados, sentimientos y en búsqueda de acciones para el bien común.

Pero…. los docentes ¿están preparados para el desafío que presenta una educación matemática con estas características? ¿cuál es la concepción que tienen respecto de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática? ¿cuál es la concepción que tienen sobre la naturaleza de la matemática? … en síntesis ¿cuál es la postura epistemológica del docente frente al conocimiento matemático y cuál es la incidencia en su práctica?

Creemos que para dar respuesta a las tendencias actuales sobre educación matemática es necesario replantearse la formación docente- inicial y continua- la que debe estar asociada a una tarea de investigación e innovación permanente, basada en cursos que, entre otros aspectos

- Proporcionen una sólida comprensión de los conceptos fundamentales
- Familiaricen con el proceso de razonamiento que subyace en la construcción de los conocimientos.
- Valoricen el proceso de construcción y adquisición de los conocimientos sobre los resultados del aprendizaje.
- Muestren las dificultades que es posible encuentren los alumnos al estudiar la asignatura
- Muestren la forma peculiar de aparecer las ideas matemáticas a través del tiempo y las conexiones con otras ciencias
- Incentiven la capacidad de reflexionar en y sobre la práctica, para descubrir, criticar y modificar los modelos, esquemas y creencias que subyacen a la misma; promoviendo el cambio didáctico personal desde distintas perspectivas

Bibliografía

Ausubel, Novak, y Hanesian (1983) *Psicología Educativa*. Trillas.México

Artigue, M (1995) *Ingeniería didáctica en educación Matemática.*Grupo Editorial Iberoamérica.

Brousseau, G (1983). *Les obstacles épistémologiques et les problemes en mathématiques*. Recherches en Didactique des Mathématiques

Castorina,J. y otros (1996) *Piaget- Vigotsky : contribuciones para replantear el debate.* Paidós. Buenos Aires.

Coll, C. (coordinador) (1999) *Psicología de la instrucción de la enseñanza y el aprendizaje en la educación secundaria*. Horsori. Barcelona.

Coll, C. (1993) *Aprendizaje escolar y construcción del conocimiento*. Ed.Paidós

Cordero Osorio, F. (2001) *Una epistemología a través de la actividad humana.* RELIME. Vol. 4. N° 2.

Porlán, R (1993) *Constructivismo y escuela*. Diada. Sevilla

Santaló,L. y colaboradores (1994) *Enfoques, hacia una didáctica humanista de la matemática*. Troquel. Buenos Aires.

MÉTODOS ALTERNATIVOS EN LA BÚSQUEDA DE LOS PUNTOS CRÍTICOS Y DERIVADAS DE ALGUNAS FUNCIONES

Carlos Rondero, Alexander Karelin y Anna Tarasenko
Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, México
rondero@uaeh.reduaeh.mx, skarelin@uaeh.reduaeh.mx, anataras@uaeh.reduaeh.mx

Resumen

Para hacer sentir más profundamente qué son los puntos mínimos y máximos es útil regresar a sus definiciones. Se proponen ejemplos de funciones como polinomio de tercer grado, seno, coseno y otras para las cuales se encuentran puntos críticos sin usar la derivada.

Las nociones del límite y derivada de una función en un punto son tradicionalmente difíciles de comprender por parte de los alumnos de bachillerato y licenciatura. Las dificultades se encuentran precisamente en las definiciones de estas nociones, no en la aplicación de las reglas formales y en el uso de las fórmulas.

Consideramos funciones tales que en cada punto de su gráfica pasa sólo una recta L al respecto de la cual la gráfica misma está por encima o por debajo de ella y no tiene otros puntos de intersección. La idea básica es la siguiente: se resta de la función, la ecuación de la recta L, que corresponde a un punto x_0 de tal forma que ahora una nueva función cuyo mínimo o máximo esta precisamente en x_0.

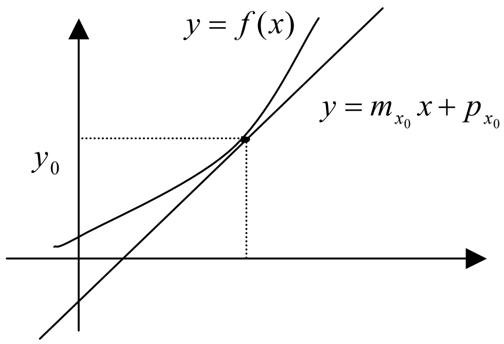
Este método nos ayuda a relacionar la derivada de una función en un punto dado con los puntos mínimos y máximos. El manejo de tales técnicas puede ayudar a los estudiantes de matemáticas de diferentes niveles educativos a asimilar métodos de análisis sobre características gráficas de las funciones. Su puesta en escena se ha hecho con estudiantes de maestría en matemática educativa para evidenciar aspectos geométricos y analíticos que complementan el estudio de la derivada y sus aplicaciones.

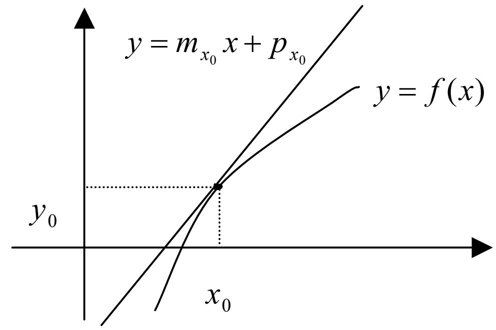
No queremos sustituir los métodos clásicos, pero proponemos un enfoque alternativo que posibilite al estudiante entender mejor las nociones básicas del cálculo a través de métodos no tradicionales para analizar el comportamiento de las funciones.

Se muestra una conexión entre la búsqueda de los puntos mínimos y máximos y el cálculo de la derivada de una función. Después en base a la interpretación geométrica de la concavidad, se propone hallar la derivada en un punto de algunas funciones simples.

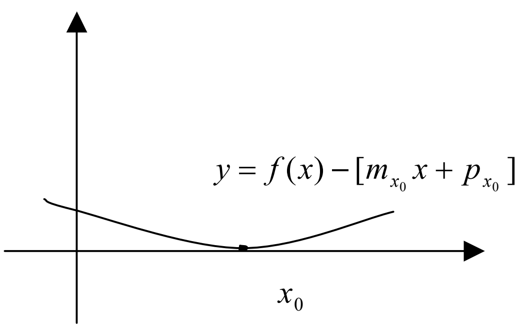
Conexión entre las nociones de los puntos mínimos, máximos y la derivada

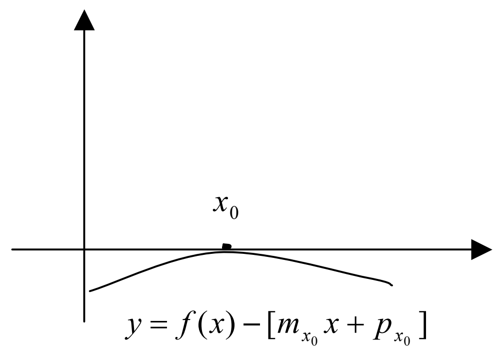
Consideremos las funciones $y = y(x)$ para las cuales en cada punto (x_0, y_0) de su gráfica $L:\{(x, y(x):)\}$ existe una y solo una recta $R(x_0, y_0) = m_{x_0} \cdot x + p_{x_0}$ que pasa por el punto (x_0, y_0), no tiene otros puntos comunes con la grafica L y L está ubicada arriba o abajo con respecto de la recta $R(x_0, y_0)$. La clase de tales funciones vamos a denotar D. La clase de tales rectas para una función $y = f(x)$ vamos a denotar como $T(f)$.





Afirmación 1.
Vamos a escoger una función $y = f(x)$ de la clase D y un punto (x_0, y_0), $y_0 = f(x_0)$.
Una recta $R(x_0, y_0) = m_{x_0} \cdot x + b_{x_0}$ es la recta de la clase $T(f)$ en el punto (x_0, y_0) para $y = f(x)$ si y solo si la función $y = F(x)$, $F(x) = f(x) - [m_{x_0} \cdot x + p_{x_0}]$ tiene un punto mínimo o un punto máximo en $x = x_0$.





Usando esta conexión entre los puntos mínimos y máximos y la derivada de una función se propone hallar la derivada de algunas funciones simples.

Polinomio de segundo grado

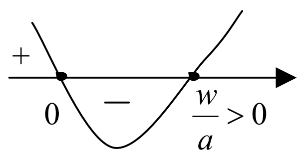
Hallar la ecuación de la recta tangente $R(x_0, y_0) = m_{x_0} x + p_{x_0}$ que pasa por el punto (x_0, y_0), de la parábola $y = P_2(x), P_2(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.
Anotamos que $y_0 = ax_0^{\ 2} + bx_0 + c$.
Sea $a > 0$, el caso $a < 0$ se estudia analógicamente.

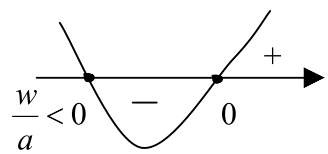
Completamos la función $F(x) = P_2(x) - [m_{x_0} x + p_{x_0}] = ax^2 + bx + c - m_{x_0} x - p_{x_0}$.
Según la Afirmación 1, esta función deberá tener un punto mínimo ($a > 0$) en el punto $x = x_0$.
Por la definición del punto mínimo local en x_0 debe cumplirse la desigualdad

$F(x) \geq F(x_0)$, alrededor del punto $x = x_0$, $|x - x_0| < \varepsilon$.
Respecto a la nueva variable $z = x - x_0$ tenemos
$F(z + x_0) \geq F(x_0)$, alrededor del punto $z = 0$, $|z| < \varepsilon$.
Al cumplir operaciones
$a(z + x_0)^2 + b(z + x_0) + c - [m(z + x_0) + p] \geq ax_0^2 + bx_0 + c - [mx_0 + p]$,
vamos a tener
$z(az + 2ax_0 + b - m) \geq 0$.

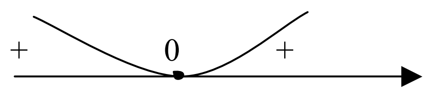
Cuando $w \neq 0, w = m - [2ax_0 + b]$
la desigualdad $z(az - w) \geq 0$ no se cumple alrededor de $z = 0$,

$y = z(az - w)$





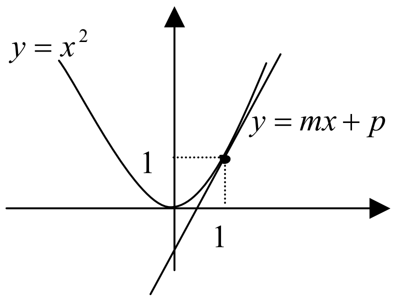
Cuando $w = 0$
La desigualdad $az^2 \geq 0$ se cumple alrededor de $z = 0$,
$y = az^2$

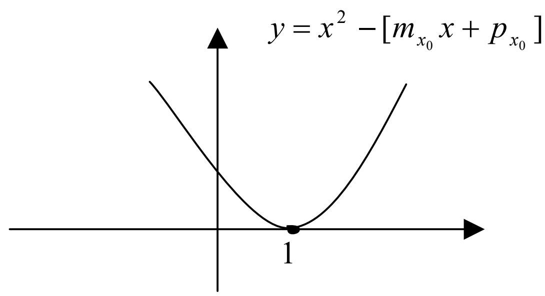


De aquí encontramos
$m = 2ax_0 + b \quad p = y_o - (2ax_0 + b)x_0 = -ax_0^2 + c$
y la resolución del problema
$y = (2ax_0 + b)x - ax_0 + c$.

Consideremos la función $y = x^2$.
Vamos a encontrar una ecuación de a recta tangente $y = mx + p$ que pasa por el punto $(1,1)$ sin hacer uso de la derivada.

Hay una relación entre pendiente y termino independiente $y|_{y=1} = mx|_{x=1} + p$, $1 = m + p$.
Según la Afirmación 1, la función $y = x^2 - [mx + b]$ debe tener su punto mínimo local en x=1





Por la definición del punto mínimo local en x_0 debe cumplirse la desigualdad
$x^2 - mx - b \geq 1^2 - m1 - b$ Cuando $|x-1| < \varepsilon$
o
$(z+1)^2 - m(z+1) \geq 1 - m$, $z = x - 1$, $|z| < \varepsilon$,
$z^2 + 2z - mz \geq 0$, $z(z + 2 - m) \geq 0$,
Esta desigualdad se cumple alrededor de $z = 0$ cuando $m = 2$.
De aquí tenemos $m = 2$, $p = 1 - m = -1$
y la resolución del problema
$y = 2x - 1$.

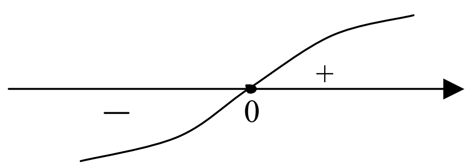
Polinomio de tercer grado
Hallar la ecuación de la recta tangente $R(x_0, y_0) = m_{x_0} x + p_{x_0}$ que pasa por el punto (x_0, y_0), de la grafica de la función
$y = P_3(x), P_2(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, $a_3 \neq 0$, $3a_3 x_0 + a_2 \neq 0$. Anotamos que
$y_0 = a_3 x_0{}^3 + a_2 x_0{}^2 + a_1 x_0 + a_0$.

Sea $a > 0$, el caso $a < 0$ que se estudia analógicamente.
Completamos la función $F(x) = P_3(x) - [m_{x_0} x + p_{x_0}] = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_o - m_{x_0} x - p_{x_0}$.
Según Afirmación 1 esta función tiene su extremo local en el punto $x = x_0$.
Por definición del punto extremo local en $p_{\min} = x_0$ de la función $y = P_3(x)$ debe cumplirse la desigualdad $F_3(x) \geq F_3(x_0)$ o $F_3(x) \leq F_3(x_0)$ alrededor del punto $x = x_0$.
Respecto a nueve variable $z = x - 1$
$F(z + x_0) \geq F(x_0)$, o $F(z + x_0) \leq F(x_0)$ alrededor del punto $z = 0$, $|z| < \varepsilon$,
$a_3(z + x_0)^3 + a_2(z + x_0)^2 + a_1(z + x_0) + a_0 - [m(z + x_0) + p] \geq$
$\geq a_3 x_0{}^3 + a_2 x_0{}^2 + a_1 x_0 + a_0 - [m x_0 + p]$,
o
$a_3(z + x_0)^3 + a_2(z + x_0)^2 + a_1(z + x_0) + a_0 - [m(z + x_0) + p] \leq$
$\leq a_3 x_0{}^3 + a_2 x_0{}^2 + a_1 x_0 + a_0 - [m x_0 + p]$
Al cumplir con las operaciones vamos a tener la desigualdad

$z[a_3 z^2 + (3a_3 x_0 + a_2)z + 3a_3 x_0{}^2 + 2a_2 x_0 + a_1 - m] \geq 0$
o
$z[a_3 z^2 + (3a_3 x_0 + a_2)z + 3a_3 x_0{}^2 + 2a_2 x_0 + a_1 - m] \leq 0$.

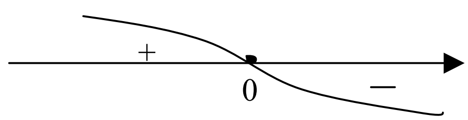
Cuando $w \neq 0, w = m - [3a_3 x_0{}^2 + 2a_2 x_0 + a_1]$,
$z = 0$ no es un raíz del polinomio en los corchetes
$\widetilde{P}_2(z) = [a_3 z^2 + (3a_3 x_0 + a_2)z + 3a_3 x_0{}^2 + 2a_2 x_0 + a_1 - m]$.
Alrededor de $z = 0$ el polinomio $\widetilde{P}_2(z)$ es negativo o positivo y ninguna de las dos desigualdades se cumple alrededor de $z = 0$,

$y = z\widetilde{P}_2(z)$



$\widetilde{P}_2(z) > 0$

$y = z\widetilde{P}_2(z)$



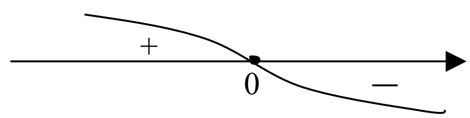
$\widetilde{P}_2(z) < 0$

Cuando $w = 0$,
la primera desigualdad toma forma $z^2[a_3 z + (3a_3 x_0 + a_2)] \geq 0$,
la segunda desigualdad toma forma $z^2[a_3 z + (3a_3 x_0 + a_2)] \leq 0$.
Recordamos que $3a_3 x_0 + a_2 \neq 0$.
Si $[a_3 z + (3a_3 x_0 + a_2)] \geq 0$ la primera desigualdad se cumple alrededor de $z = 0$.
Si $[a_3 z + (3a_3 x_0 + a_2)] \leq 0$ la segunda desigualdad se cumple alrededor de $z = 0$.
De aquí $m = 3a_3 x_0{}^2 + 2a_2 x_0 + a_1$.
Encontramos
$p = y_o - (3a_3 x_0{}^2 + 2a_2 x_0 + a_1)x_0 = -2a_3 x_0{}^3 - a_2 x_0{}^2 + a_0$
y la resolución del problema
$y = (3a_3 x_0{}^2 + 2a_2 x_0 + a_1)x - 2a_3 x_0{}^3 - a_2 x_0{}^2 + a_0$.

Consideremos la función $y = x^3$.
Vamos a encontrar una ecuación de a recta tangente $y = mx + p$ que pasa por el punto $(1,1)$ sin hacer uso de la derivada

La relación entre pendiente y término independiente es $1 = m + p$.
Según la Afirmación 1, la función $y = x^3 - [mx + b]$ debe tener su punto mínimo local en $x = 1$.
Por definición del punto extremo local en $p_{\min} = x_0 = 1$ debe cumplirse la desigualdad
$x^3 - mx - b \geq 1^3 - m1 - b$ al rededor de $x = 1$, en un entorno $|x - 1| < \varepsilon$
o
$(z+1)^3 - m(z+1) \geq 1 - m$, alrededor de $z = 0$, $|z| < \varepsilon$.
Después de las operaciones tenemos
$z^3 + 3z^2 + 3z - mz \geq 0$
o
$z(z^2 + 3z + 3 - m) \geq 0$.
La expresión $(z^2 + 3z + 3 - m)$ es negativa alrededor de $z = 0$, cuando $m < 3$

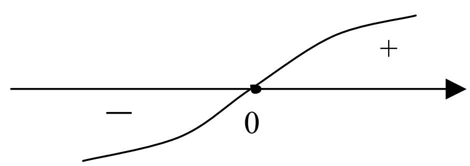
$z(z^2 + 3z + 3 - m)$



la desigualdad no se cumple alrededor $z = 0$.

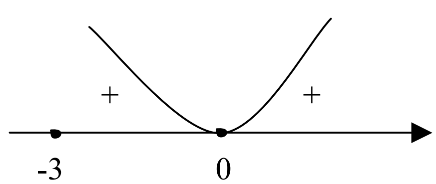
La expresión es positiva alrededor de $z = 0$, cuando $m > 3$

$z(z^2 + 3z + 3 - m) \geq 0$



la desigualdad no se cumple alrededor $z = 0$.
Cuando $m = 3$ la desigualdad toma la forma $z^3(z + 3) \geq 0$

$z^3(z + 3)$



Esta desigualdad se cumple alrededor de $z = 0$.
De aquí tenemos $m = 3$, $p = 1 - m = -2$
y la resolución del problema

$y = 3x - 2$.

Bibliografía

Stewart, J. (1999) *Calculus:EarlyTtranscedentes*, International Thomson Publ. Inc.

Rondero, C., González, M., Karelin, A., Tarasenko, A. (2002). El polinomio de tercer grado como un modelo para estudiar las propiedades de las funciones, Artículo aceptado para su publicación en las *Actas de RELME 16*.

MODELO MATEMATICO PARA LA DETERMINACION DE LAS TARIFAS SOCIALES DESTINADAS A LOS CLIENTES RESIDENCIALES DEL SERVICIO ELECTRICO

Marta Correa y Ricardo Gallo
U. Nacional de Tucumán y U. Tecnológica Nacional, Argentina
mcorrea@arnet.com.ar - rgallo@arnet.com.ar

Resumen

Este trabajo tiene como objetivo principal mostrar, a los estudiantes de los niveles superiores, los procedimientos principales de construcción de modelos matemáticos para resolver situaciones problemáticas que se manifiestan en la realidad cotidiana en el desarrollo de una determinada actividad profesional y como objetivo específico establecer alternativas de tarifas sociales con destino a núcleos de clientes perfectamente identificados en cuanto a su calidad, por su escasa capacidad de pago, y aproximadamente delimitados en cuanto a la cantidad. Bajo la denominación de tarifa social de cualquier servicio público se entiende a aquellas tarifas que, siguiendo distintos mecanismos, se subsidian implícita o explícitamente, parcial o totalmente, para beneficiar a ciertos sectores de usuarios con un determinado fin. Para tener una herramienta de análisis que permita simular distintas escenarios con el fin de fijar los subsidios a la tarifa de los clientes residenciales y tomar decisiones al respecto, se elaboró un modelo matemático que describe esta situación. Después del análisis de validación del modelo, mediante el trazado de superficies y curvas de nivel con la ayuda del medio lógico Derive, se realizó una simulación numérica a fin de acotar los resultados posibles que satisfagan los requerimientos impuestos por la situación problemática a resolver. Finalmente se concluye el trabajo con la especificación de la tarifa social buscada.

Desarrollo

Identificación del Problema

Bajo la denominación de tarifa social de cualquier servicio público se entiende a aquellas tarifas que, siguiendo distintos mecanismos, se subsidian implícita o explícitamente, parcial o totalmente, para beneficiar a ciertos sectores de usuarios con un determinado fin. En el caso que nos ocupa se buscará determinar una tarifa social mediante la asignación de subsidios explícitos para parte de los clientes residenciales del servicio público de electricidad de la provincia de Tucumán, que actualmente esta concesionado a un prestatario privado.

Plantearse el problema de determinar alternativas de tarifas sociales para los clientes residenciales del servicio eléctrico significa tratar de articular tres fines y tres actores, con el objetivo que este servicio público no se vea interrumpido en los hogares de escasos o nulos ingresos. Cada uno de los actores intervinientes; Estado, Cliente y Empresa, tienen, para este caso, los siguientes fines específicos.

a) Para el Estado; es importante que todos los habitantes cuenten en sus hogares, por lo menos, con el servicio eléctrico mínimo que ayude a la contenibilidad social del individuo.
b) Para el Cliente; el disponer del uso de la electricidad, en cantidades y calidades mínimas, que le permita desenvolverse en familia y en sociedad.
c) Para la Empresa; brindar un servicio acorde a los niveles de calidad que se imponen y recibir por ello una tarifa justa y razonable que permita la continuidad de la prestación.

De acuerdo a los términos del Contrato de Concesión que liga a la empresa concesionaria con el poder concedente (Estado Provincial), se fijan las tarifas para los distintos segmentos de clientes que hacen factible el servicio y que necesariamente debe percibir. Por lo tanto para que el cliente tenga el servicio que no puede pagar total o parcialmente, según sea el caso, debe ser subsidiado en forma explícita. De esta manera el planteo de usar los fondos específicos del sector eléctrico que dispone el estado provincial, para lograr una tarifa social, debe quedar en claro que es para subsidiar al cliente y no a la empresa. Lográndose, de esta manera, la articulación de los tres fines y los tres actores involucrados.

Delimitación y Alcance del Trabajo

La articulación de los distintos actores y sus fines es, obviamente, distinta según el marco de ordenamiento del sector eléctrico que se tome. Así para este trabajo hemos explícitamente asumido la continuidad del actual modelo de privatización. Bajo el supuesto que el actual marco de concesión del servicio eléctrico no cambiará en el corto plazo, este trabajo tiene como uno de sus objetivos establecer alternativas de tarifas sociales con destino a núcleos de clientes perfectamente identificados en cuanto a su calidad, por su escasa capacidad de pago, y aproximadamente delimitados en cuanto a la cantidad. Con esto se intenta fijar dos límites muy precisos del trabajo:

a) Los fondos que se usaran en la propuesta están asignados a la provincia mediante una Ley Nacional, y tienen una notable permanencia en el tiempo (más de cuarenta años). Todo parece indicar que esta situación no va ha cambiar en el corto, mediano o largo plazo.
b) Las tarifas sociales que se propongan tendrán una perfecta asignación a un conjunto de clientes residenciales que, fehacientemente por razones económicas, no pueden pagar el cien por cien de la tarifa y se encuentran aproximadamente identificados.

En los últimos doce años el valor más frecuente de los fondos que recibió la Provincia, desde la Nación, está entre los $150.000 y $200.000 por mes. Si nos ponemos en el centro del intervalo este valor se ubica en los $175.000, que es cercano a lo recibido en el año 2001 y muy inferior al promedio del período estudiado, que se ubica en $ 242.588. Tal como se manifestó anteriormente este fondo es el específico para aplicar como subsidio a las tarifas de clientes finales, si así lo determina el poder concedente.

Este análisis nos lleva a adoptar que el subsidio que se dispondrá bimestralmente será de $ 350.000 y es el que se aplicará para obtener la tarifa social destinada a la franja de clientes que a continuación se describe.

Según datos publicados por el Instituto Nacional de Estadísticas y Censos (INDEC), la provincia de Tucumán tiene una población estimada en aproximadamente 1.300.000 habitantes, siendo el departamento Capital, de entre los diecisiete departamentos en que está dividida la provincia, el más numeroso con un porcentaje, estimado, ligeramente superior al 42 % del total provincial. La misma fuente indica que la tasa de electrificación para todo el territorio provincial se ubica en el 95 %, o sea aproximadamente 1.235.000 personas tienen servicio eléctrico.

En octubre de 2001 el INDEC indicó que la tasa de desocupación en la provincia es del 17,9 %, lo que significan 221.000 personas están sin trabajo o subempleados y que podríamos estimar que están distribuidos entre 55.000 y 70.000 hogares con servicio eléctrico, a los que se les hace muy difícil sostener.

De este análisis surge que el número de clientes a subsidiar estará en el intervalo [55.000, 70.000].

Por el tipo de diseño tarifario adoptado en el modelo de privatización provincial, las tarifas para los clientes residenciales son del tipo denominado *binómica***.** Esto es, el cliente paga un *cargo fijo bimestral*, tenga o no consumo, y un *cargo variable* por cada unidad de energía consumida. Los montos de estos cargos, dentro de la categoría residencial, están especificados por bloques de consumo. Cada uno de los consumos individuales de los clientes caerá en algunos de los bloques previstos y de acuerdo a ello es el monto del cargo fijo y del cargo variable que deberá abonar. Para nuestro caso existen dos bloques para los clientes residenciales: hasta un consumo máximo de 300 kWh por bimestre y más de 300 kWh por bimestre. Siendo el primer bloque (de menor consumo) el más barato. Los precios para este bloque son: para el cargo fijo sin derecho a consumo de $ 3,50 por bimestre y para el cargo variable de $ 0,0745 por cada kWh consumido.

Como es de suponer, y dado que se trata de establecer tarifas sociales para una franja de clientes con escasos recursos económicos, es sobre estos montos que se deberán especificar los porcentajes de subsidios a aplicar. Por el mismo motivo, la cantidad de energía a subsidiar deberá tener como punto de referencia máximo los 300 kWh bimestrales.

Metodología

Marco teórico del modelo de análisis

Para tener una herramienta de análisis que permita simular distintas escenarios, que permitan fijar los subsidios a la tarifa de los clientes residenciales y tomar decisiones al respecto, se elaboró un modelo matemático que describe esta situación problemática y que tiene en cuenta todas las variables analizadas en el punto 2 de este trabajo, los que en apretada síntesis son:

1°) No se considera otro mecanismo de establecer una tarifa social que no sea la de asignar montos explícitos a determinados bloques tarifarios y de esta manera lograr que lo que le corresponda pagar al cliente sea menor y adecuado a su capacidad de pago. Por ejemplo, no se considera la posibilidad de establecer tarifas mas altas para algunos segmentos de clientes y bajar el de otros (subsidios cruzados) o cualquier otra forma de establecer tarifas sociales.

2°) Se supone que los clientes a ser subsidiados corresponden al segmento tarifario de los pequeños consumos de uso residencial exclusivamente, que según el contrato de concesión vigente les corresponde la tarifa denominada 1R. Esto significa que la tasa de subsidio se aplicará al cargo fijo establecido en 3,50 $/bimestre y sobre el cargo variable fijado en 0,0745 $/kWh.

3°) El consumo de energía a subsidiar estará por debajo de los 300 kWh bimestrales, que dentro del cuadro tarifario es el bloque de energía más barato. Se considera que un consumo máximo de 150 kWh. bimestrales es una cifra razonable. Para lograr que éste valor de consumo por cliente con tarifa social no sea superado se deberá instalar en el domicilio del cliente un limitador de energía, y de esta manera asegurar que el máximo de consumo de energía no atraviese la barrera impuesta.

4°) La única fuente de subsidio son los fondos Nacionales para ese fin, el cual, de acuerdo al análisis realizado, tendrá un tope máximo de $ 350.000 por bimestre.

5°) Se considera que la Tarifa Social es sin impuestos ni gravámenes de ningún tipo, porque no sería lógico imponer estos recargos sobre tarifas que tienen el carácter de social y además porque es el propio Estado el que suministra los fondos para su concreción y no tendría sentido el cobrar impuestos y gravámenes sobre ellos.

Especificación del Modelo

De acuerdo al marco establecido en el apartado anterior se propone el siguiente modelo matemático que permita plantear distintas alternativas de tarifas sociales atendiendo a las variables que se fueron analizando a lo largo de este trabajo. Siendo:

m = monto máximo total bimestral de subsidio disponible ($ 350.000)
x = máxima cantidad de energía a subsidiar por bimestre y por cliente
u = máximo número de cliente a subsidiar en la provincia
v = monto máximo bimestral a cargo del cliente
y = porcentaje del cargo variable ($/kWh.) a subsidiar por cliente (en por unidad)
z = porcentaje del cargo fijo a subsidiar por cliente (en por unidad)

El número máximo de clientes a subsidiar por bimestre será:

$$\mathbf{u = 350000/\,(0{,}0745xy + 3{,}50z) \qquad (1)}$$

Con:

$$\mathbf{55.000 \le u \le 70000}$$
$$\mathbf{0 \le x \le 150}$$
$$\mathbf{0 \le y \le 1}$$
$$\mathbf{0 \le z \le 1}$$

Los subsidios que se establezcan deberán tener presente que para distintas soluciones del número máximo de clientes a beneficiar, que cumplan con las restricciones de las restantes variables, se elegirá aquella que minimize el monto máximo mensual a cargo del cliente, dado por:

$$v \mathbf{= 0{,}0745x(1 - y) + 3{,}50(1 - z) \qquad (2)}$$

Análisis del Modelo

La **u** es una función multivariada definida en el espacio real de cuatro dimensiones. Como su rango esta acotado por las condiciones del problema en el intervalo [55000 - 70000], entonces se analizan las superficies de nivel de la función **u** para los extremos del intervalo. La expresión general de estas superficies de nivel esta dada por.

$$\mathbf{z = (100000/u) - 0{,}0213xy}$$

De donde se tendrá que:

1°) Para u = 55000, la superficie de nivel es: $\mathbf{z = 1{,}8182 - 0{,}0213.x.y}$

De igual forma esta superficie de nivel tiene rango acotado por las condiciones del problema al intervalo [0, 1], entonces para los valores extremos de este intervalo se tendrán las siguientes curvas de nivel:

1°a) Para z = 0; $\mathbf{y = 85{,}3615/x}$
1°b) Para z = 1; $\mathbf{y = 38{,}4131/x}$

2°) Para u = 70000, la superficie de nivel es: **z = 1,4286 - 0,0213.x.y**

Como en el caso anterior, esta superficie de nivel tiene rango acotado en el intervalo [0, 1], entonces para los valores extremos de este intervalo se tendrán las siguientes curvas de nivel:

2°a) Para z = 0; **y = 67,0704/x**

2°b) Para z = 1; **y = 20,1221/x**

De este análisis se desprende que para un mínimo de **u** = 55000 clientes a subsidiar y un consumo de energía bimestral **x** tomado en el entorno del punto $\mathbf{x_0}$= 150, el intervalo del porcentaje "**y**" de subsidio a la tarifa variable es (0,25 - 0,57). Mientras que para un número máximo de **u** = 70000 clientes y un consumo de tomado en el mismo entorno, el intervalo del porcentaje de subsidio a la tarifa variable es (0,13 - 0,45). Como es de esperar este intervalo queda contenido en el anterior, dado que al suponer un mayor número de clientes a subsidiar con el mismo monto máximo de subsidio y la misma cantidad de energía consumida por cada cliente, entonces la longitud del segundo intervalo resulta menor.

A los fines de obtener los valores de **u** y **v**, para distintas combinaciones de valores de las variables independientes **x, y, z,** con las restricciones mencionadas, teniendo presente las conclusiones que surgen del análisis de la función **u**, y de las superficies y curvas de nivel, se realizó una simulación numérica. Esta simulación se hizo fijando inicialmente los valores de **x, y** haciendo variar los valores de **z**. Los valores adoptados para **x** fueron de 50, 100 y 150 kWh, haciéndolos crecer de 50 en 50. Los valores de **y, z** se hicieron crecer desde 0 hasta 1 con variaciones de 0,1 en 0,1.

Conclusiones

Si se adopta como valor de búsqueda en la tabla el centro del intervalo [55000, 70000], o sea u= 62500 clientes, a los cuales se les subsidiaría una energía bimestral de 150 kWh, se obtienen los siguientes valores:

Tabla N° 1: Valores Seleccionados.

x	y	z	U	v
150	0,2	0,9	64995	9,29
150	0,3	0,6	64191	9,22
150	0,4	0,3	63406	9,16
150	0,5	0	62640	9,09
150	0,2	1	61029	8,94
150	0,3	0,7	60319	8,87

Dadas las incertidumbres de los límites de variación de algunas de las variables, como por ejemplo el número de clientes que fehacientemente debieran ser subsidiados, o del consumo que cada uno de ellos realizará bimestralmente, cualesquiera de los valores seleccionados en la tabla n° 1, es una solución posible a adoptar. No obstante se puede especular que, dados los hábitos de consumos observados, casi con seguridad la gran mayoría de los clientes subsidiados llegarán al límite de la demanda de energía bimestral de 150 kWh.

Todo este análisis sirvió para que las autoridades políticas provinciales tuvieran los suficientes elementos objetivos para inclinarse por la solución de subsidiar el 40 % del costo de la energía consumida (cargo variable) y el 30 % del cargo fijo y de esta manera subsidiar hasta un máximo de 63406 clientes que pagarán como máximo $ 9,16 por bimestre lo que significa 15 centavos por día.

Entonces la tarifa que se denominó Tarifa 1RS (Tarifa 1 Residencial Social) para pequeños consumos residenciales de hasta 150 kWh bimestrales, quedó de la siguiente manera.

Tarifa 1RS (Pequeños consumos residenciales subsidiados

	Unidad	**Importe**
Cargo fijo sin derecho a consumo	$/bim..	2,45
Hasta un consumo máximo de 150 kWh/bim.	$/kWh	0,0447

Bibliografía

Schuster, F.G., (1997) *El Método en las Ciencias Sociales,* Buenos Aires, Editores de América Latina, Método Axiomático y Modelos, cap. 4.

Chapelon, J.,(1965) Las matemáticas y el desarrollo social, en LE LIONNAIES, F. y colaboradores, *Las grandes corrientes del pensamiento matemático,* Buenos Aires, EUDEBA

Pita Ruiz, C.(1995). *Cálculo Vectorial.* México, Pearson Educación.

Stewart, J. (1999). *Cálculo Multivariado,* México, Thomson Editores.

MODELOS PARA LA TOMA DE DECISIONES EN LINEAS DE ESPERA

María Rodríguez de Estofán y Sandra Franco de Berduc
Universidad Nacional de Tucumán- Argentina
mrestofan@tucbbs.com.ar, sandranfranco@hotmail.com

Resumen

Un problema que se presenta con frecuencia en muchos organismos, como ser bancarios, gubernamentales, supermercados, etc., es el de intentar proporcionar los mayores niveles de servicios posibles, sin necesidad de incrementar su capacidad operativa. Nuestro trabajo consiste en analizar los fundamentos de la teoría de colas exponiendo modelos matemáticos que permiten tomar decisiones oportunas optimizando la planificación de un servicio y el uso de sus recursos disponibles. El objetivo esencial de conocer y aplicar la teoría de colas es la minimización de los costos totales, que surgen de dos fuentes: la propia espera y la capacidad del sistema. Por lo tanto el fin último de un directivo o gerente de un organismo es el de encontrar un equilibrio entre el costo de proporcionar un determinado nivel del servicio, con una cierta capacidad, y el costo de la espera de los clientes. Con este artículo intentamos hacer un aporte a la enseñanza de la matemática, mostrando algunos modelos que se sustentan en la teoría de probabilidades, con gran aplicación en múltiples situaciones de la vida real.

Introducción

Es importante mostrar los aportes que hace la matemática en la toma de decisiones de todo tipo de organizaciones: comerciales, industriales y gubernamentales. Para ello es necesario el estudio del comportamiento de personas, equipos, costos y procedimientos, a fin de comprender sus funcionamientos y optimizar su eficiencia y eficacia. Un problema que se suele presentar con frecuencia en muchos organismos es el de intentar proporcionar los mayores niveles de servicios posibles sin necesidad de incrementar su capacidad. Por ejemplo en una fábrica la carencia de los recursos necesarios origina la espera de trabajos a ser procesados, cuyo almacenamiento produce retrasos con aumentos de costos del trabajo e incumplimiento de la entrega final. Otra situación más adversa es aquella en la que el trabajo en espera es una persona, insatisfecha por el tiempo que pierde en una cola. Este caso es bastante habitual cuando los clientes tienden a solicitar servicios en forma aleatoria. Ejemplos comunes de esperas se presentan en la compra de entradas para espectáculos, oficinas de correos, mostradores de facturación en aeropuertos, hospitales, entradas y salidas de estacionamientos, etc. Todas estas situaciones constituyen problemas de colas o de líneas de espera. Con este artículo intentamos hacer un aporte a la enseñanza de la matemática, mostrando algunos modelos que se sustentan en la teoría de probabilidades, con gran aplicación en múltiples situaciones de la vida real. Nuestro trabajo consiste en analizar los fundamentos de la teoría de colas exponiendo modelos matemáticos que permiten tomar decisiones oportunas optimizando la planificación de un servicio y el uso de sus recursos disponibles. Las decisiones se basan en el empleo del método científico y en el uso de herramientas y conocimientos de muchas ciencias, entre ellas, la matemática, la economía, la física y del comportamiento.

Teoría de colas o líneas de espera

En muchas operaciones se forman líneas de espera para la prestación de un servicio, entre ellas, cuando los clientes esperan en fila para liquidar sus compras; las máquinas de una fábrica esperan ser reparadas o los aviones esperan para aterrizar en un aeropuerto. La característica común de estos ejemplos en apariencia distintos, es que un número de unidades físicas (llegadas) intentan recibir un servicio de un número limitado de instalaciones (los servidores). Como consecuencia, las llegadas deben esperar algunas veces en líneas hasta que llegue el turno de ser atendidas.

La teoría de colas se ocupa del estudio de las colas de espera de todo tipo concebible y la necesidad de reducir los embotellamientos y congestiones. La teoría de colas analiza la capacidad de una unidad operacional para prestar algún servicio. Las unidades o elementos de interés llegan a la instalación donde se presta el servicio deseado y abandonan el sistema. Estos modelos son característicos de las cajas de supermercados, peajes de autopistas, mostradores de ventas, instalaciones de embarque, etc.

El *objetivo* de los estudios realizados basándonos en la teoría de colas es determinar el número óptimo de personas o instalaciones necesarias para atender a los clientes que llegan al azar y minimizar los costos del servicio con el de la espera o congestión.

En general, la teoría de colas ofrece información sobre la probabilidad de que un determinado número de personas, máquinas, etc. tenga que esperar en la cola, durante cuanto tiempo espera hacerlo y el porcentaje de tiempo inactivo de la instalación que presta el servicio. Estas cantidades se usan para determinar si debería aumentarse el tamaño del espacio de espera o la velocidad del servicio. Toda esta información es obtenida de modelos matemáticos, que constan de fórmulas analíticas, basados en las distribuciones de probabilidades Poisson y Exponencial.

Características de la teoría de colas

Todo problema de teoría de colas puede describirse en término de tres características: la *llegada*, la *cola* y el *servidor*.

1) *La llegada*: se describen por su distribución analítica, que pueden especificarse de dos formas: distribución del número de llegadas por unidad de tiempo o distribución del tiempo entre llegadas. Si la distribución de llegadas se especifica en la primera forma, se deberá describir el número de llegadas que pueden ocurrir en cualquier período de tiempo dado. Es posible describir el número de llegadas que ocurren en una hora. Cuando las llegadas ocurren al azar, la información que interesa está dada por la probabilidad de que ocurran n llegadas en un período dado, donde $n = 0,1,2,...$

Si se supone que las llegadas ocurren con una tasa promedio constante y que son independientes entre sí, se presentan acorde con la distribución de probabilidad de Poisson. La probabilidad de n llegadas en el tiempo T está dada por

$$P(n,T) = \frac{e^{-\lambda T}(\lambda T)^n}{n!} \qquad \text{con} \quad n = 0,1,2,\ ... \quad \text{donde:}$$

λ = Tasa promedio de llegadas por unidad de tiempo. T = Intervalo de tiempo.

n = Número de llegadas en el tiempo T.

$P(n, T)$ = Probabilidad de que ocurra n llegadas en el tiempo T

Para valores pequeños de λT existe una alta probabilidad de que ocurran cero llegadas en el tiempo T y que la mayor parte de las probabilidades se concentran alrededor de 0, 1, 2 llegadas. A medida que aumenta el valor de λT la forma de la distribución cambia hacia una forma más simétrica (normal) y la probabilidad del número de llegadas aumenta.

El segundo método de especificación de llegadas está dado por el tiempo que transcurre entre llegada y llegada. En este caso se debe especificar la distribución de probabilidad de una variable aleatoria continua que mida el tiempo transcurrido entre una llegada y otra. Si las llegadas siguen la distribución Poisson, se demuestra matemáticamente que el tiempo entre llegadas seguirá una distribución exponencial.

$P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$ con $0 \leq t < \infty$ donde:

$P(T \leq t)$ es la probabilidad de que el tiempo entre llegadas T sea menor o igual que un valor dado t.
λ tasa media de llegadas por unidad de tiempo.
t un tiempo dado.

A medida que t aumenta, la probabilidad de que haya ocurrido 1 llegad se aproxima a 1.
La distribución exponencial y la de Poisson son equivalentes en cuanto a las suposiciones fundamentales sobre las llegadas. Por lo tanto, cualquiera de las dos puede usarse para especificar las llegadas: todo depende si se desea calcular el tiempo entre llegadas o el número de llegadas que ocurrirán en un tiempo dado.

2) ***La cola***: la naturaleza de la cola también afecta el tipo de modelo de teoría de colas que se formule. Una disciplina de colas es la bien conocida regla de *"quién llega primero se atiende primero"*.
Cuando se describe la teoría de cola, es necesario especificar la longitud de la línea de espera. Una suposición matemática común es que la *línea de espera puede alcanzar una longitud infinita*.
Por último, debe definirse el comportamiento de los clientes en la cola. La conducta de los *clientes* que se presupone en los modelos de teoría de colas simples, es que estos *esperarán hasta recibir el servicio*.
Para propósitos analíticos, las suposiciones más comunes en las teorías de colas son: servir primero a quién llegó primero, que la longitud de la línea es infinita y que las llegadas esperarán en la línea hasta que se les dé el servicio.
3) ***El prestador del servicio***: también existen varias características del prestador del servicio que afectan al problema de teoría de colas. Una de estas, es la distribución del tiempo de servicios. Al igual que el tiempo de llegada, el tiempo de servicio puede variar de un cliente al siguiente. Una presuposición común para la *distribución del tiempo de servicios implica una distribución exponencial*.
La segunda característica del prestador del servicio que debe especificarse es el *número de prestadores* que se encontrarán presentes. En ocasiones, a cada prestador del servicio se le llama *canal*.
El servicio puede proporcionarse en *una sola fase* o en *fases múltiples*. Una situación de fases múltiples es aquella en la que el cliente debe pasar a través de dos o más prestadores en secuencia para terminar el servicio.
La combinación de varios prestadores y varias fases del servicio da lugar a una gran variedad de problemas de teorías de colas.

Formulación de problemas de teorías de colas

Una vez que se han dado las suposiciones sobre las llegadas, la cola y los prestadores del servicio, se desea predecir, el *desempeño* de un sistema de colas específico. El *desempeño* que se predice para el sistema puede describirse mediante el *número promedio de llegadas en la cola*, el *tiempo promedio de espera de una llegada y el porcentaje de tiempo perdido de los prestadores del servicio*. Estas medidas de desempeño se pueden utilizar para decidir la cantidad de prestadores del servicio que deben colocarse, los cambios que se pueden hacer en la velocidad del servicio u otros cambios en el sistema de colas.

Cuando se evalúan las medidas de desempeño de teoría de colas, deben determinarse los *costos totales* siempre que sea posible. Esto se hace añadiendo el *costo del tiempo de espera de la llegada y el costo de los prestadores del servicio*. En el caso de reparación de máquinas, el tiempo de espera de la máquina es función del costo de la producción perdida. En los casos en que las llegadas son los clientes, resulta muy difícil estimar el costo del tiempo de espera. No siempre es posible determinar el costo total de un sistema de colas. En lugar de esto se utilizan objetivos sustitutos. Por ejemplo, un objetivo sustituto es que los clientes no deben esperar más de un promedio de 5 minutos para obtener el servicio. Las medidas y parámetros del desempeño para los modelos de teorías de colas, se especifican mediante la siguiente notación:

λ = Tasa promedio de llegadas (el número de llegadas por unidad de tiempo).

$1/\lambda$ = Tiempo promedio entre las llegadas.

μ = Velocidad media del servicio (el número de unidades a las que se le da servicio por unidad de tiempo cuando el prestador se encuentra trabajando).

$1/\mu$ = Tiempo promedio requerido para el servicio.

ρ = Factor de utilización del prestador del servicio (la proporción del tiempo en que el prestador del servicio trabaja).

P_n = Es la probabilidad de que n unidades (llegadas) se encuentren en el sistema.

L_q = Número promedio de unidades en la cola (longitud promedio de la cola).

L_s = Número promedio de unidades en el sistema.

W_q = Tiempo promedio de espera en la cola.

W_s = Tiempo promedio de espera en el sistema.

En el sistema se refiere a las unidades que pueden encontrarse en la cola o en el servicio. Es decir, W_q se refiere al tiempo de espera de una unidad en la cola antes de que comience el servicio y W_s se refiere al tiempo total de espera más el tiempo necesario para tener el servicio En condiciones uniformes, las condiciones de arranque iniciales no afectan las medidas del desempeño. La condición uniforme se logrará solamente cuando μ sea mayor que λ, la velocidad del servicio debe ser superior a la velocidad de llegadas para que se presente la condición uniforme. Siempre que $\mu \le \lambda$ el sistema de colas es inestable y la línea se puede acumular potencialmente hasta el infinito debido a que las unidades llegan con mayor rapidez de las que reciben el servicio. Se supondrá entonces que $\mu > \lambda$ a lo largo del trabajo.

Modelo simple de teoría de colas
Se basa en las siguientes suposiciones: a) Un solo prestador de servicio y una fase.
b) Distribución de llegadas Poisson donde λ = tasa promedio de llegadas.
c) Tiempo de servicio exponencial, donde μ = tasa promedio del servicio.
d) Disciplina de colas de servir primero a quién llega primero, todas las llegadas esperan en línea hasta que se les da el servicio y existe la posibilidad de una longitud infinita en la cola.
A partir de estas suposiciones se pueden derivar las siguientes estadísticas de desempeño: $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ $\quad P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$ $\quad P_n = P_0\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$ $\quad L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$ $\quad L_s = \frac{\lambda}{(\mu-\lambda)}$

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} \qquad W_s = \frac{1}{(\mu-\lambda)}$$

Modelo con varios prestadores del servicio
El modelo simple con llegadas tipo Poisson y tiempos de servicios exponenciales puede extenderse para incluir sin gran dificultad a varios prestadores del servicio. Si se establece que **S** es igual al *número de los prestadores de los servicios*, las mediciones de desempeño del sistema de colas con varios prestadores del servicio serán:

$$\rho = \frac{\lambda}{s\mu} \qquad P_0 = \frac{1}{\left[\sum_{n=0}^{s-1}\left(\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!}\right)\right] + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s}{s!}\left(1-\frac{\lambda}{s\mu}\right)^{-1}}$$

$$P_n = P_0 \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} \quad 1 \le n \le s \qquad P_n = P_0\left[\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{s!(s)^{n-s}}\right] \quad n \ge s$$

$$L_q = \frac{P_0\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \rho}{s!(1-\rho)^2} \qquad L_s = L_q + \frac{\lambda}{\mu} \qquad W_q = \frac{L_q}{\lambda} \qquad W_s = W_q + \frac{1}{\mu}$$

Estas fórmulas se verifican en condiciones de uniformidad y se presupone que las llegadas son de tipo Poisson, el tiempo de servicio exponencial; se aplica la disciplina de colas de atender primero a quién llega primero, todas las llegadas esperan en la cola hasta recibir servicios y la cola tiene longitud infinita.

Aplicación 1: suponga que un cajero bancario puede atender a los clientes a una velocidad promedio de 10 clientes por hora $(\mu = 10)$. Además, suponga que los clientes llegan a la ventanilla de los cajeros a una tasa promedio de 7 por hora $(\lambda = 7)$. Se considera que las llegadas siguen la distribución Poisson y el tiempo de servicio sigue la distribución exponencial. En la condición uniforme el sistema de cola tendrá las siguientes características de desempeño:

$\rho = \frac{7}{10}$ el prestador del servicio trabajará el 70% del tiempo.

$P_0 = 1 - \frac{7}{10} = \frac{3}{10}$; 30% del tiempo no habrá clientes en el sistema.

$P_n = \frac{3}{10}\left(\frac{7}{10}\right)^n$; esta fórmula determina la posibilidad de que n clientes se encuentren en el sistema en cualquier momento dado, n = 1,2,3,..., $P_1 = 0{,}21$, $P_2 = 0{,}147$, $P_3 = 0{,}1029$; etc.

$L_q = \frac{7^2}{10(10-7)} = 1{,}63$; en promedio 1,63 clientes estarán en la cola.

$L_s = \frac{7}{(10-7)} = 2{,}33$; en promedio 2,33 clientes estarán en el sistema.

$W_q = \frac{7}{10(10-7)} = 0{,}233$; el cliente pasa un promedio de 0,233 horas esperando en la cola.

$W_s = \frac{1}{(10-7)} = 0{,}333$; el cliente pasa un promedio de 0,333 horas en el sistema.

Es posible evaluar el desempeño del sistema de colas. El administrador tendrá que tomar en consideración el "tiempo perdido del prestador del servicio (30%), el tiempo que espera el cliente (0,233 horas) en la cola y la longitud de la línea que se forma (1,63 clientes)". Si este rendimiento es inaceptable, se puede colocar un segundo prestador del servicio o hacer otros cambios en las características de las llegadas, de la cola o del prestador de los servicios.

Aplicación 2: suponga que se coloca un segundo cajero en la aplicación anterior. ¿Qué tanto mejorará el servicio?. Los cálculos de desempeño para S=2 son:

$\rho = \frac{7}{2(10)} = 0{,}35$; los prestadores utilizan el 35% del tiempo

$P_0 = 0{,}4814$; prob. de que no haya clientes. $P_1 = 0{,}3369$; prob de que haya 1 cliente.

$P_2 = 0{,}1179$; prob. de que haya 2 clientes. $P_3 = 0{,}0413$; prob. de que haya 3 clientes.

$P_4 = 0{,}0145$; prob. de que haya 4 clientes. $L_q = 0{,}0977$; un prom de 0,0977 clientes estará en la línea. $L_s = 0{,}7977$; un promedio de 0,7977 clientes estará en el sistema.

$W_q = 0{,}0139$; el cliente pasa un promedio de 0,0139 horas en la cola (menos de un 1').

$W_s = 0{,}1139$; el cliente pasa un promedio de 0,1139 horas en el sistema.

Con dos prestadores del servicio, las estadísticas de los clientes mejoran. Ahora se tiene un promedio de solamente 0,097 clientes en la línea y el cliente espera en promedio solamente 0,0139 horas para recibir el servicio (menos de un minuto). El costo de este servicio es que los prestadores solamente están ocupados durante el 35% de su tiempo. A menos que se desee un servicio extraordinariamente bueno, es probable que el banco no desee incurrir en el gasto del segundo cajero.

Conclusiones

Con este trabajo hemos querido destacar la importancia de la Matemática en la toma de decisiones de optimización de servicios a menores costos. Aunque, hemos mostrado los casos más simples de los modelos de teorías de colas, existen muchos modelos más elaborados, donde varían los supuestos. Uno de ellos, fue considerar que la longitud de la cola es infinita, lo que significa que la llegada de un cliente para ser atendido o el servicio completo, no afecta la probabilidad de futuras llegadas. Sin este supuesto las ecuaciones de los modelos con uno o con varios prestadores de servicio difieren.

También, los modelos cambian si el tiempo de la prestación del servicio es constante que se traduce fundamentalmente en variaciones de la longitud promedio de la cola y del tiempo promedio de espera.

La teoría de colas no ha sido ideada sólo para contestar *cuánto* tiempo de espera *debe* introducirse en un sistema, sino por el contrario, responde dos preguntas importantes: ¿Qué cantidad de tiempo de espera es posible en un sistema?, ¿Cómo cambiará este tiempo de espera luego de alterar las instalaciones? Para solucionar estos problemas los ejecutivos de empresas recurren a los modelos que aporta la teoría de colas.

El objetivo esencial de conocer y aplicar esta teoría es la minimización de los costos totales, que surgen de dos fuentes: la propia espera y la capacidad del sistema. Los relacionados con la espera incluyen los costos de las personas que prestan el servicio, del tiempo de espera de los clientes y los derivados de la posible pérdida de clientes o de ventas por no haber sido atendidos a tiempo. El costo de la capacidad del sistema se refiere al costo de mantener un determinado nivel del servicio. Por lo tanto el fin último del directivo de una empresa es encontrar un equilibrio entre el costo de proporcionar un buen nivel de servicio con una cierta capacidad y el costo de la espera de los clientes.

Bibliografía

Gould, f. J., Eppen, G. D. y Schmidt, C. P. (1992) *Investigación de Operaciones en la Ciencia Administrativa*. Prentice-Hall Hispanoamericana. México.

Kotler, P. (1973) *Mercadotecnia Aplicada*. Interamericana. México.

Sacristán, G., Pérez Gómez, A. (1985) *La Enseñanza: su Teoría y su Práctica* Capítulos 8 y 10. Akal Editor. España

Shamblin, J. E. y Stevens, G. T. (1975) *Investigación de Operaciones.* McGraw-Hill. México.

PROCESO DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE DE LOS SIGNOS DE AGRUPACIÓN: UNA EXPERIENCIA NOVEDOSA.

María E. Rodríguez Montero
Liceo Unión Panamericana, Santo Domingo, República Dominicana
j.luciano@codetel.net.do

Resumen

Como educadora en el área de la matemática trato de hacer todos mis esfuerzos en crear estrategias que puedan servir de gran utilidad a los alumnos y alumnas en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Había estado buscando la manera de lograr que los alumnos y alumnas pudieran usar correctamente los signos de agrupación y lograba muy poco. Mientras desarrollaba el proceso de enseñanza-aprendizaje, todos supuestamente entendían y participaban de una forma o de otra; pero cuando evaluaba el conocimiento adquirido a corto plazo, no respondían de la forma esperada; lo que me causaba gran inquietud. Ante esta situación me tracé los objetivos de buscar nuevas estrategias que faciliten a los y las alumnos(as) la buena comprensión de la Matemática, y comprender que el proceso de enseñanza-aprendizaje no es estático y cerrado, sino que requiere de fuerza y voluntad. Para lograrlos diseñé una estrategia de socialización con dramatización, mediante la cual los y las alumnas representaban símbolos de agrupación y elaboré ejercicios que me permitieran ir desarrollando todo el proceso, apoyándome en los lineamientos que oferta la Propuesta Curricular de la Secretaría de Estado de Educación. Esta experiencia de aula está programada para desarrollarse en una sesión de clases de 40 minutos y está dirigida a estudiantes de nivel medio o de octavo grado. Luego del desarrollo de la experiencia se entregará una práctica con problemas a resolver. En los primeros 15 minutos se desarrollará el contenido; luego se procederá a organizar los alumnos. El maestro/a debe asegurarse de revisar el dominio de los signos operacionales (+, -, x, ÷), así como las operaciones algebraicas y el concepto de términos semejantes y conocer los nombres de los signos.

Marco de la experiencia

Se consideran como antecedentes históricos la introducción a los signos de agrupación Así como la supresión de los signos de agrupación. Entre las consideraciones metodológicas están

1) El uso del eje transversal natural y social porque usamos recursos sociales, naturales y humanos. Realizamos esta experiencia con toda originalidad cuando usamos los círculos con las cadenas usadas, con la participación activa de las y los alumnos y porque logramos la integración e interacción de todas y todos los que deseaban.
2) La aprehensión de la matemática, porque todo el objetivo es dominar lo que queremos en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática lo mejor posible, y basado en los (fundamentos del currículo, tomo II, 3-20) que los alumnos deben tener múltiples oportunidades de apreciar la interacción de la matemática con otras disciplinas y con la sociedad.

Por su parte los fundamentos técnicos y metodológicos refieren a la educación actual en el uso de los ejes transversales. El proceso de enseñanza-aprendizaje se hace mas activo, incluso se pueden prolongar los periodos de atención en clase. Es transformar con lo que tenemos: educandos y educadore, los espacios educativos y los materiales básicos para producir los aprendizajes. En el nuevo currículo se debe ensayar haciendo muy bien lo que se debe y se puede hacer con los medios de que se dispone, en el ambiente en que nos corresponde trabajar. Ese es el método de construir una transformación curricular. La educación actual es juntar de nuevo las inteligencias colectivas, la creatividad y los talentos para seguir elevando la calidad de la educación. Entre los aspectos que cabe citar como desafíos al aprendizaje de la matemática están los prejuicios de la matemática. Una manera de abordarlo es organizando grupos de trabajo para que los alumnos y alumnas trabajen activamente.

¿Qué actividades plantear? ¿Cómo plantearlas? ¿Cómo dinamizar las clases? ¿Cómo lograr una enseñanza activa de la matemática?. Es lo que me sigue preocupando e inquietando a continuar buscando estrategias diferentes para lograr una enseñanza-aprendizaje mas dinámica.

Propósitos de la experiencia

- Que los y las alumnas pierdan el temor en la solución de problema
- Que sean capaces de resolver cualquier problema en matemática
- Que vean esto como un juego, y como lo dijo el Dr. Ricardo Cantoral, la matemática está ahí, solo se necesitan estrategias que facilitan el proceso de enseñanza-aprendizaje.
- Enseñarle a manejar los signos como un juego
- Poder colocar al alumno ante situaciones necesarias para que pueda alcanzar sin ninguna imposición, los conceptos lógico-matemáticos que le permitan resolver la situación ante la cual lo hemos colocado, Jiménez V. (1990).
- Que sean manipulativas: que ellos puedan manejar, palpar el proceso.
- Que sean prácticas, que durante el proceso no vean nada subjetivo o abstracto
- Que sean reales
- Que nada quede oscuro ni implícito
- Que el grado de dificultad sea reducido a su mínima expresión, y por ultimo,
- Un desafío a enfrentar los ejercicios con los signos de agrupación de manera simultánea, con dinamismo, confianza y seguridad. Jiménez V. Pastor aconseja que "Aquellos maestros y maestras que carecen de experiencia en algunos tipos de dinámica de clase es aconsejable que las inicien realizando pequeños ensayos", eso es parte de nuestros propósitos.

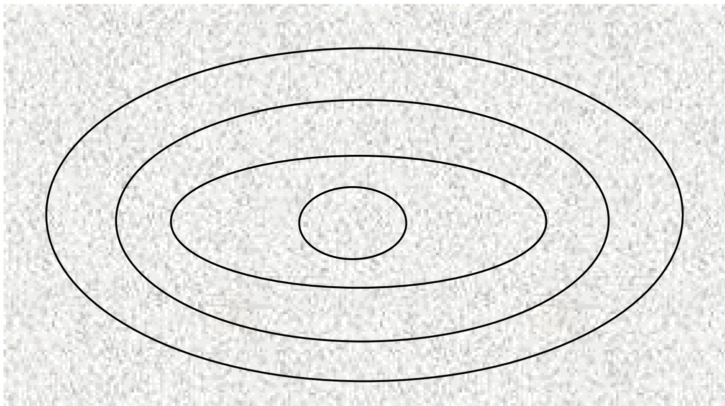
La experiencia de aula

Esta experiencia de aula está programada para desarrollarse en una sesión de clase de 40 minutos y está dirigida a estudiantes de nivel medio o de octavo grado. Luego del desarrollo de la experiencia se entregará una práctica con problemas a resolver. En los primeros 15 minutos se desarrollará el contenido y luego se procederá a organizar los alumnos (as) y como dice Vicente Jiménez Pastor (Op. Cit., 1990) el papel del educador pasa a convertirse en el de un conductor y no en el de un conocedor. Adopté ejercicios nuevos para la dinámica del uso de los signos de agrupación.

Elaboré un ejercicio de esta forma:

$$3x + [- \{-5x - 2y - (4y - \overline{-4x - 5})\}]$$

Observamos aquí un ejemplo donde están todos los signos de agrupación de forma simultánea (esquema #1)



Hice lo siguiente. Le escribí el ejercicio en la pizarra e invité a los alumnos a participar.

Cabe citar de nuevo a Jiménez V. (1990) quien señala a la formación de grupos como tarea difícil. Puse mi empeño en lograrlo y formé una ronda con 4 alumnos y le puse el nombre de corchetes. Formé una 2da ronda con el nombre de llaves, precedida por el signo menos (-). También formé otra ronda con el signo de paréntesis, haciéndole la advertencia de la precaución que deben tener al manejar los signos. Por último formé otra ronda con la barra o vínculo y los alertaba para que tuvieran cuidado con los signos.

Los grupos estaban formados para afuera, de menor a mayor. Iba cancelando los signos de agrupación y se lo mostraba. Ver figura # 2.

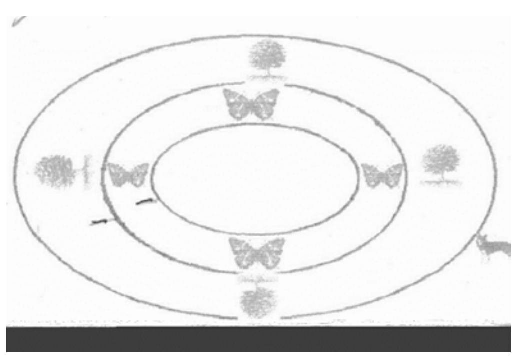
Observamos aquí un ejemplo donde están todos los signos de agrupación de forma simultánea.

$\mathbf{3x + [- \{ -5x - 2y - (4y - \overline{- 4x - 5})\}]}$

Nota: Puede y debemos usar las figuras que ellos deseen o más les guste.

Paso 1.

Eliminamos en la ronda #1 de adentro hacia fuera los pececillos, tomando en cuenta el signo que llevan delante.



Quedando

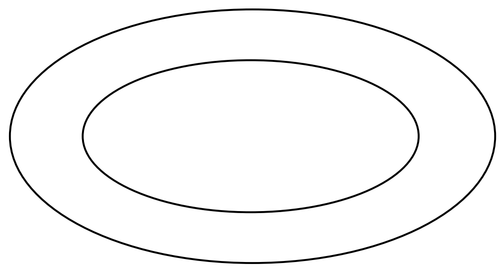
Ver aquí: (deben ir mostrando el cambio) y cada niño debe tener cartulina o planchas de marquetería para aprovecharse con mas precisión.

3x+[-{-5x-2y-(4y + 4x+5)}]

Se fue la barra o vínculo.

Paso 2: Ahora vamos a eliminar la 2da ronda (ronda de las mariposas) retro-alimentándolas en los
signos que tienen precedidos

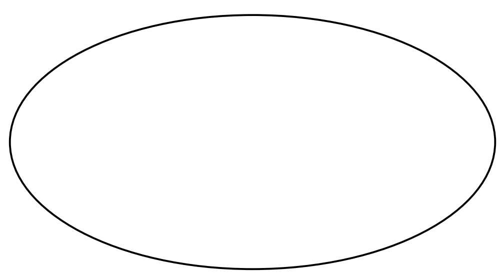
Figura # 3



En el ejercicio queda así:
3x+[-{-5x-2y-4y-4x-5}]
Se fueron los paréntesis

Observaciones:
Los y las colegas deben resaltar siempre el color de los signos para que no olviden la importancia de los mismos y su utilidad.
Pues ¿nos quedarán los caballitos?

3er paso. Vamos a eliminar las matitas y nos quedo así



En el ejercicio nos queda: 3x+[5x+2y+4x+5]

Se fueron las llaves. Pero, solo nos quedan los corchetes, vamos a eliminarlos también, ¡ultima ronda! Se fueron los corchetes
3x+5x+2y+4x+5

Al finalizar todos tienen que dominar correctamente el proceso.
Observaciones de los participantes

Esta experiencia la presenté en el Seminario Tel-educ celebrado en el Hotel Quinto Centenario de Santo Domingo, organizado por la Secretaría de Estado de Educación. Al principio los (as) alumnos (as) se turbaban cuando comenzaban a trabajar y no sabían como iniciar el proceso, no eran capaces de resolver el problema sin la ayuda del maestro. Finalmente me formularon algunas preguntas y sus inquietudes fueron satisfechas. Algunos técnicos de la Secretaria de Educación me invitaron a participar como multiplicadora junto con dos catedráticas brasileñas en las escuelas de Santo Domingo.

Preguntas que me hicieron con sus respuestas

¿Qué ejes transversales usaste? porque son varios. El Natural y el Social

¿Por qué usaste esos ejes? Porque es el que más se acerca a la interacción del alumno con la realidad y donde se pueden involucrar los padres y allegados.

¿Qué eje temático usaste? Apreciación de la matemática

¿Por qué usaste ese eje? Porque además de darse una integración, al alumno se le hace ciertos aprestamientos con las plásticas, para lograr el propósito deseado.

¿Cómo lo haría en computadora? En Word usted le va analizando los ejercicios, luego de habérselo detallado; pero con la participación de ellos. Asegurarse de que todos dominen el proceso antes de ir al computador. En Power Point usa los diseños o figuras como se muestra en las láminas. En Microsoft Excel puede usar las gráficas y es mucho más divertido para ellos.

Recomendaciones

- El maestro no debe obviar algunos pasos para terminar rápido. Es importante dar todos los pasos a medida que va suprimiendo los signos, también ponerlo a participar seguido en el aula, organizándolo como crea necesario.
- Debe asegurarse de revisar el dominio de los signos operacionales (+, -, x, ÷), así como las operaciones algebraicas, el concepto de términos semejantes y conocer los nombres de los signos.
- Lograr una concentración total de los alumnos y alumnas para que se puedan alcanzar los propósitos deseados.
- Comprobar también el aprendizaje a través de elevaciones, como dice Jiménez V. (Op. Cit., 1990).
- Utilizar situaciones que conduzcan a respuestas inteligentes de tipo matemático, las demás las provocamos nosotros mediante una enseñanza dinámica y activa.

Bibliografía

Diccionario Enciclopédico (2000). El pequeño Larousse Ilustrado.

Fundamentos del Currículo, Tomo 1 (1994), Secretaría de Estado de Educación, Serie Innova 2000, República Dominicana.

Jiménez , V. (1990). Como lograr una enseñanza activa de la Matemática, Aula práctica, Ediciones CEAC, Barcelona, España.

Nole, J. (1999). Analogía entre las ecuaciones en diferencia y las ecuaciones diferenciales ordinarias. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Volumen 12, Tomo1.

RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES DE DIFUSIÓN EN COORDENADAS CILÍNDRICAS

Gladys Guineo Cobs yVíctor Martínez Luaces
Universidad de La República, Montevideo, Uruguay
GEGCTRINI@MIXMAIL.COM VICTORML@FING.EDU.UY

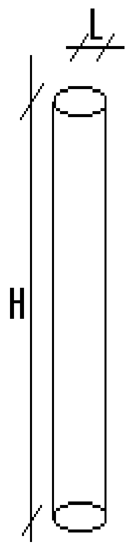
Resumen
En los cursos de Cálculo Numérico no resulta muy habitual la presentación de problemas de la vida real vinculados a los contenidos de la asignatura (Martínez Luaces, V. y Martínez Luaces, F., 2003). Por lo general, cuando se trabaja en la resolución de Ecuaciones en Derivadas Parciales parabólicas, se suele presentar el problema clásico de la transmisión de calor en una varilla fina. En este trabajo se resolverá un problema proveniente del secado de alimentos, que en el caso de estudiantes de Ingeniería de Alimentos, Ingeniería Química o ramas afines, puede resultar mucho más aplicado y motivador que los problemas de difusión de calor (Martínez Luaces, V., Guineo Cobs, G, 2002).
Se presentaran distintos métodos de resolución (Mathews, J., 1987), pero por motivos didácticos se ilustrará el algoritmo del método explícito y se analizarán sus ventajas educativas, complementando con una ilustración gráfica que permita la visualización de los distintos elementos vinculados a la solución del problema.
En función de lo anterior se formulan algunas conclusiones y se realizan recomendaciones.

Introducción
Los problemas de difusión en Química y ciencias afines responden a modelos que involucran Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDP) de tipo parabólicas. Entre los problemas de difusión de mayor riqueza matemática y de mayor relevancia industrial se encuentran los problemas de Transferencia de Masa. Por ejemplo, en la industria del arroz, el secado es una de las etapas determinantes de todo el proceso de producción, algo similar sucede en la industria del condimento o en la producción de frutas en almíbar donde la etapa de difusión de glucosa suele ser decisiva.
La riqueza matemática de los problemas de Transferencia de Masa se basa fundamentalmente en el hecho de trabajar con EDPs en distintos tipos de coordenadas, e incluso con cuerpos que cambian de geometría con el tiempo. Todo ello desemboca en una solución analítica que resulta complicada y no muy aprovechable del punto de vista práctico y/o didáctico, en cursos de grado.
En éste trabajo analizaremos el secado de una hierba, denominada Ciboulette, que posee cierta importancia económica y cuya geometría puede ser considerada aproximadamente cilíndrica.
La resolución analítica de este problema involucra temas como series de Fröbenius, funciones de Bessel de primera y segunda especie, de orden cero, uno y menos uno; series de Fourier – Bessel, etc.
Todos estos temas no siempre se llegan a enseñar en cursos de grado por lo que muchas veces su aplicabilidad didáctica se limita a cursos de nivel superior, como es el caso de los cursos de postgrado, los cursos de perfeccionamiento, etc..
En cambio si se “ataca” el problema con herramientas del Cálculo Numérico, en principio podría ser trabajado en los cursos de grado, con muy pocos prerrequisitos. El problema tiene algunas dificultades propias de la resolución de un problema real, por ejemplo, el trabajar con derivadas en las condiciones de borde y algunas diferencias de implementación

de los algoritmos utilizados normalmente para la resolución de EDP, debido a la presencia del operador Laplaciano en coordenadas cilíndricas.

El problema en estudio

La ciboulette es una hierba de geometría cilíndrica con L << H, como se ve en la figura adjunta.



La Ley de Fick, que rige el proceso de secado, establece que:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D.\left(\frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + \frac{1}{r}.\frac{\partial C}{\partial r}\right)$$

donde C es la concentración de agua en el sólido, t es el tiempo, r es la posición radial (obsérvese que la expresión entre paréntesis es el Laplaciano en coordenadas cilíndricas) y D es la difusividad del agua dentro de la hierba.

Respecto a la difusividad, D, esta no depende de la posición (pues se puede considerar que es un sólido isotrópico respecto a la difusión), ni del tiempo (ya que en este caso el secado se realiza a temperatura constante).

Se supone además que:

a) C_a es la humedad inicial en la hierba,
b) en la superficie lateral se alcanza inmediatamente el equilibrio (llamaremos C_e a la humedad en el equilibrio) y
c) por simetría, no hay flujo a través del eje del cilindro.

En resumen, el problema en su versión matemática, queda expresado de la siguiente manera.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial C}{\partial t} = D\left(\dfrac{\partial^2 C}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial C}{\partial r}\right) \quad 0 \le r \le L \quad t > 0 \\ C(L,t) = C_e \quad C(r,0) = C_a \quad \dfrac{\partial C}{\partial r}(0,t) = 0 \end{cases}$$

Los Métodos Numéricos aplicables al problema planteado

Los Métodos Numéricos para este tipo de problemas pueden ser organizados en tres categorías (Mathews, J., 1987):

a) Métodos Explícitos o de Diferencias Progresivas, los cuales presentan problemas de estabilidad de las soluciones.
b) Métodos Implícitos o de Diferencias Regresivas, los cuales son asintóticamente estables pero requieren conocer iteraciones posteriores a las que se están calculando

c) y Métodos semi-implícitos, que corresponden a la combinación de un método implícito con uno explicito. Los mismos, dependiendo de las coordenadas en las que se trabaje, resultan estables o asintóticamente estables en posición y tiempo.

El método explicito o de Diferencias Progresivas no es asintóticamente estable, y las soluciones obtenidas pueden no responder adecuadamente al problema de origen, por lo que no es el más conveniente del punto de vista práctico aunque tal vez si lo sea del punto de vista didáctico. En este problema en particular este método es sumamente ilustrativo ya que muestra claramente cuales son las dificultades que se generan al utilizar el Laplaciano en coordenadas cilíndricas y la condición de borde de derivada nula.

Método de diferencias progresivas

Analicemos el procedimiento numérico.

Primero seleccionamos h y k, que son respectivamente los pasos en r y t, de modo tal que $\begin{cases} r_i = i.h & i \in (0,m),\ i \in Z \\ t_j = j.k & j \in Z_{\geq 0} \end{cases}$ generando una red cuyos puntos son $(r_i,\ t_j)$.

Como segundo paso se obtiene el método de diferencias progresivas por serie de Taylor:

$$\frac{\partial C}{\partial t}(r_i,t_j) = \frac{C(r_i,t_j+k)-C(r_i,t_j)}{k} - \frac{k}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial t^2}(r_i,\zeta_j) \qquad \zeta_j \in \left(t_j,t_{j+1}\right)$$

$$\frac{\partial C}{\partial r}(r_i,t_j) = \frac{C(r_i+h,t_j)-C(r_i,t_j)}{h} - \frac{h}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial r^2}(\xi_i,t_j) \qquad \begin{matrix} \xi_i \in \left(r_i,r_{i+1}\right) \\ i=0,1,...(m-1) \end{matrix}$$

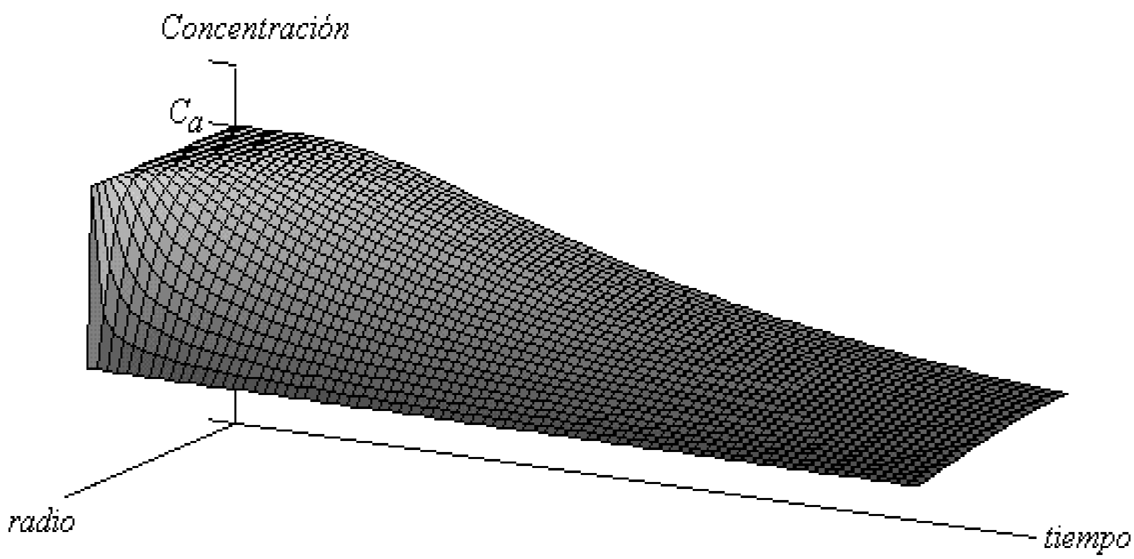
$$\frac{\partial^2 C}{\partial r^2}(r_i,t_j) = \frac{C(r_i+h,t_j)-2C(r_i,t_j)+C\left(r_i-h.t_j\right)}{h} - \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 C}{\partial r^4}(\varsigma_i,t_j) \qquad \begin{matrix} \varsigma_i \in \left(r_i,r_{i+1}\right) \\ i=1,2,...(m-1) \end{matrix}$$

Si ahora utilizamos $w[i,j]$ como aproximación de $C(r_i,t_j)$

- El error de truncamiento es: $\tau_{ij} = \frac{k}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial t^2}(r_i,\zeta_j) + \frac{h}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial r^2}(\xi_i,t_j) + \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 C}{\partial r^4}(\varsigma_i,t_j)$
- la ecuación en diferencias progresivas para la EDP estudiada queda planteada de la siguiente manera: $\frac{w[i,j+1]-w[i,j]}{k} = \frac{D}{h^2}\left(\left(1+\frac{1}{i}\right).w[i+1,j]+w[i-1,j]-\left(2+\frac{1}{i}\right).w[i,j]\right)$
- la condición de derivada nula, como primera aproximación puede ser reemplazada por su aproximación en diferencias progresivas, lo que conduce a $w[1,j]=w[0,j]$.
- y finalmente, las demás condiciones quedan expresadas como: $\begin{cases} w[m,j]=C_e \\ w[i,0]=C_a \end{cases}$

El sistema construido posee una matriz asociada convertible en tridiagonal, **A**, de forma tal que la solución aproximada queda dada por $\mathbf{W}^{<j>}=\mathbf{A}.\mathbf{W}^{<j-1>}$, donde $\mathbf{W}^{<j>}$ representa la solución obtenida en la j-ésima iteración.

Si bien este método no es incondicionalmente estable, permite comprender el algoritmo de construcción y obtener fácilmente el método de diferencias regresivas. Posteriormente, combinando ambos métodos se puede construir el método de diferencias promediadas (método semi-implícito), el cuál permitiría obtener la solución. Para visualizar la misma se presenta el siguiente gráfico.



Conclusiones

Podemos observar que en este procedimiento (explícito) se utilizaron muy pocas herramientas matemáticas, concretamente Polinomio de Taylor con Resto de Lagrange y la discretización propia de la derivación numérica. Es decir, que a diferencia de la solución analítica la presentación de éste problema para cursos de cálculo numérico es absolutamente inmediata. Sin embargo no es tan inmediata la implementación con otros algoritmos más eficientes pero no tan didácticos. La combinación de las EDP parabólicas ya conocidas por el alumno, con los elementos ya mencionados de un primer curso de cálculo, favorece la construcción de una Zona de Desarrollo Próximo (Vigotsky, L.S., 1978) que hace posible la adquisición de estos nuevos proceptos.

Bibliografía

Martínez Luaces, V., Guineo Cobs, G., en evaluación "Las EDP en problemas industriales de secado de alimentos: su resolución analítica y su transferencia al aula", enviado al *III Seminario Internacional de Matemática, Física e Informática Educativa*.

Mathews, J., (1987). *Numerical Methods for Mathematic, Sciencie and Enginering*. Ed. Prentice-Hall. ISBN 0-13-624990-6.

Vigotsky, L.S., (1978). "Mind in society. The Development of Higher Psychological Processes", USA: Harvard University Press.

Martínez Luaces, V. y Martínez Luaces, F., (2003). "La importancia de la visualización en la resolución de problemas de Cálculo Numérico", *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.*16.2 686-693.

RESULTADOS DEL USO DEL PAQUETE DIDÁCTICO PARA EL CURSO DE ÁLGEBRA

Francisco Bañuelos; Guillermo Carrasco, Marta Arjona, Javier Montes y Claudio Galvan
Academia Institucional de Matemáticas y Instituto Politécnico Nacional, México.
frabate51@hotmail.com, ditac@terra.com, earjona@ipn.mx,
nopalerosmil@hotmail.com, geoancla02@hotmail.com

Resumen
El Programa 'Paquetes Didácticos para los cursos de Matemáticas' de la Academia Institucional de Matemáticas del Nivel Medio Superior (AIM-NMS-IPN) en colaboración con la Dirección de Tecnología Educativa del Instituto Politécnico Nacional, desarrollaron el Paquete Didáctico de Álgebra para el Nivel Medio Superior que consiste en un libro y un disco compacto con software especializado. El paquete didáctico tiene como propósito dotar al profesor y al estudiante de materiales de calidad, elaborados usando el conocimiento generado por las investigaciones, es un conjunto de materiales que concretan operativamente los cuatro organizadores del currículo: objetivos, contenidos, metodología y evaluación. En particular, las estrategias didácticas y metodológicas, los conocimientos matemáticos y los elementos teóricos para ampliar la cultura matemática de los estudiantes. Estos materiales pretenden apoyar las clases presenciales con materiales innovadores que permitan lograr aprendizaje significativo en los alumnos que cursan esta materia. En este trabajo se presenta un informe de los resultados del cuestionario de opinión aplicado a los alumnos de los grupos piloto con el objetivo de conocer sus impresiones al utilizar este tipo de materiales, así como las mejoras que propongan, todo esto para lograr que el Paquete Didáctico responda realmente a las necesidades de los alumnos.

Introducción

El Programa 'Paquetes Didácticos para los cursos de Matemáticas' de la Academia Institucional de Matemáticas del Nivel Medio Superior del Instituto Politécnico Nacional de México (AIM-NMS-IPN) tiene como propósito dotar al profesor y al estudiante de materiales de calidad, elaborados usando el conocimiento generado por las investigaciones y aplicado de manera sistemática, que les permitan trabajar conjuntamente para lograr los objetivos institucionales del área de matemáticas. Estos objetivos se conciben como la dimensión matemática de las Competencias Básicas de los Estudiantes de Bachillerato y la formación para el trabajo. El paquete didáctico es un conjunto de materiales que concretan operativamente los cuatro organizadores del currículo: objetivos, contenidos, metodología y evaluación. En particular, las estrategias didácticas y metodológicas, los conocimientos matemáticos y los elementos teóricos para ampliar la cultura matemática de los estudiantes.
La pregunta principal de este trabajo es *¿Qué características tiene el conjunto de materiales que usa un profesor en una práctica docente profesional?* En los proyectos se descompone en varias que preguntas que en conjunto aportarán elementos para responder la pregunta principal.

Desarrollo

Para el diseño del paquete se consideran el marco institucional y algunos estándares, tanto nacionales como internacionales. Se define una gama de experiencias de aprendizaje congruente con las competencias que ahí se establecen. Los materiales necesarios para lograr los ambiciosos objetivos de la educación actual son complejos y requieren de un profesor con una cultura profesional, capaz de aprovechar creativamente el sustento técnico que proporciona el conocimiento profesional, principalmente el que proviene de los resultados de la investigación en educación matemática. Una parte fundamental del proyecto corresponde, entonces, a la familiarización y capacitación del profesor en el manejo del paquete. Diversas son las estrategias que se consideran para darle viabilidad a los paquetes. La primera se refiere a la comunicación permanente con los grupos académicos de las escuelas mediante sus representantes en el cuerpo académico rector. La segunda pasa por la formación de núcleos en cada escuela que promueven y asesoran a los profesores interesados durante la instrumentación de las guías. Una tercera es la Red de Interacción Académica (RIA) que ha comenzado a operar en internet. La capacitación de estos núcleos se realiza en un taller que se diseña específicamente con este fin. Los profesores participantes en este taller se prepararan para coordinar los talleres que se realizan en las distintas zonas del área metropolitana, primero, y según la demanda de las academias, después. La evaluación que se hace, tanto del paquete como de su instrumentación, permite aprovechar la experiencia para mejorar el material y su uso.

Bogue y Saunders hacen una adaptación de los elementos de la ingeniería de la calidad al campo de la educación. Definen la calidad como «la conformidad con la misión especificada y el logro de los objetivos, dentro de estándares públicamente aceptados y en un contexto de responsabilidad social e integridad». Estos mismo autores señalan diez principios que orientan los esfuerzos para propiciar la calidad en la educación y se pueden constituir en criterios para evaluarla y que hemos considerado en el proyecto.

Los principios que requieren de mayor atención, y de esfuerzos adicionales, se refieren principalmente a los indicadores que permitan describir el desempeño de los actores y la eficiencia de los materiales y las prácticas. Con este proyecto se tiene una mayor probabilidad de cumplir con los objetivos institucionales pero estamos todavía lejos de contar con indicadores válidos y confiables en algunos de los aspectos fundamentales, señaladamente el aprendizaje de los estudiantes y del desempeño docente.

Resultados

Para evaluar el impacto que tuvo este material, el cual fue implementado en todos los grupos del semestre 2002-I , se eligieron cinco grupos piloto de diversas escuelas, en los cuales se hizo un seguimiento puntual de las actividades realizadas con apoyo del Paquete, a través de diferentes instrumentos como bitácoras, formatos, exámenes y cuestionarios.

El instrumento aplicado es un cuestionario de opinión acerca de cuatro aspectos básicos: contenidos, forma de trabajo, profesor y participantes. Consta de 30 preguntas, 18 preguntas con cinco opciones a escoger: deficiente, regular, bueno, muy bueno, excelente, según lo que opinaran de los recursos del paquete y 12 preguntas abiertas más 1 de observaciones generales. Se aplicó a un total de 188 alumnos de los CECyTs: ”Lázaro Cárdenas del Río”,”Miguel Othón de Mendizábal”, ”Cuauhtémoc”, “Juan de Dios Bátiz Paredes” y “Ricardo Flores Magón”. El cuestionario fue aplicado por los docentes en sus escuelas y entregados los cuestionarios a la Dirección de Tecnología Educativa.

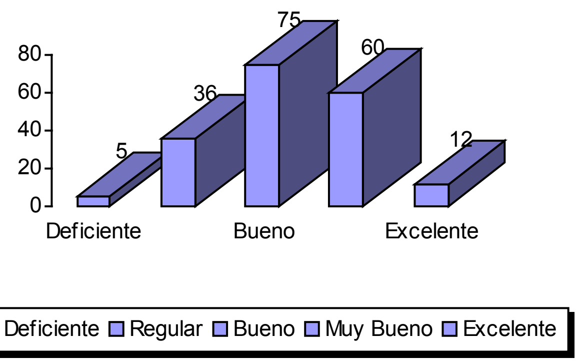
Este informe presenta los resultados del cuestionario de opinión (anexo) aplicado a los alumnos de los grupos piloto con el objetivo de conocer sus impresiones al utilizar este tipo de materiales, así como las mejoras que propongan, todo esto para lograr que el Paquete Didáctico responda realmente a las necesidades de los alumnos.

ANEXO

I. Sobre los contenidos

PREGUNTA 1.- La secuencia de las actividades de aprendizaje

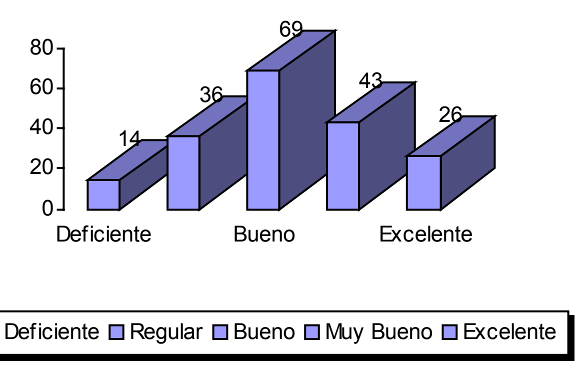
Deficiente	Regular	Bueno	Muy Bueno	Excelente	Total
5	36	75	60	12	188



1. La secuencia de las actividades se consideró buena, van de acuerdo al programa, permiten reafirmar los conocimientos, agiliza el desarrollo de los ejercicios, ayuda a utilizar los métodos de resolución de problemas, tienen un buen orden, de lo sencillo a lo complicado.

PREGUNTA 2.- Los Materiales Auxiliares Para la Organización del Aprendizaje (MAPOA).

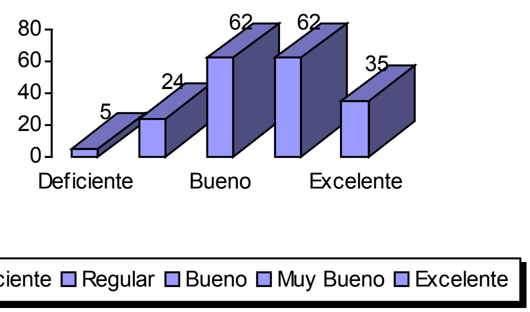
Deficiente	Regular	Bueno	Muy Bueno	Excelente	Total
14	36	69	43	26	188



2. Los *MAPOA* se percibieron como buenos; son una buena base para aprender y complementar los conocimientos sobre cada uno de los temas y poder desarrollarlos mejor; permiten el análisis para facilitar la comprensión, son una manera diferente de aprendizaje.

PREGUNTA 3.- Los problemas planteados.

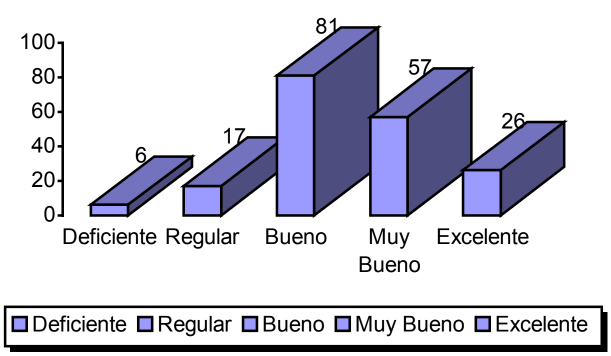
Deficiente	Regular	Bueno	Muy Bueno	Excelente	Total
5	24	62	62	35	188



3. Los *problemas planteados* están dentro de los rangos bueno y muy bueno, facilitan la agilidad mental y se pueden tomar en cuenta aspectos que pueden alterar el planteamiento, se utilizan varios métodos para resolverlos, son reales y lógicos; presentan situaciones diferentes que realmente hacen pensar.

PREGUNTA 4.- Los ejercicios propuestos.

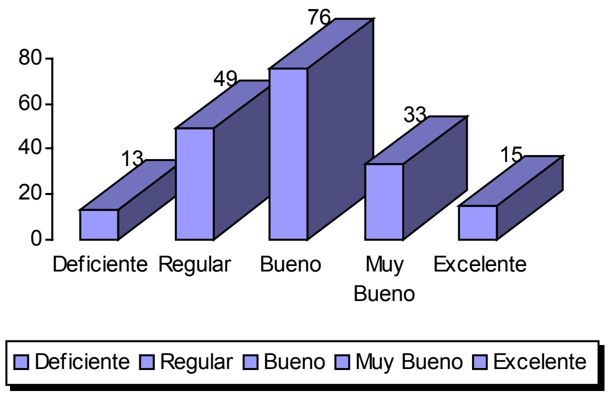
Deficiente	Regular	Bueno	Muy Bueno	Excelente	Total
6	17	81	57	26	187



4. Los *ejercicios* propuestos se consideran buenos, son entendibles y permiten el entendimiento de los temas que se van presentando de acuerdo al programa ya que están bien explicados y son entretenidos; reflejan situaciones reales con calidad y creatividad. En esta pregunta se careció de la opinión de un alumno.

PREGUNTA 5.- Las lecturas de apoyo.

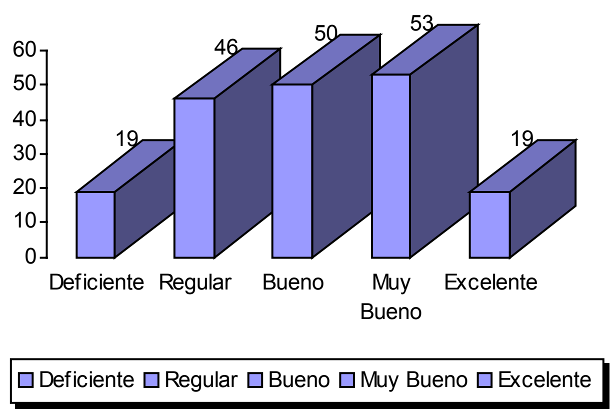
Deficiente	Regular	Bueno	Muy Bueno	Excelente	Total
13	49	76	33	15	186



5. Las *lecturas de apoyo* les parecen buenas porque dan alternativas que facilitan el desarrollo y el entendimiento de todas las actividades, razonando un poco más cada ejercicio; amplían los temas resolviendo dudas con información interesante, dan instrucción para la resolución de los problemas. En esta ocasión se omitieron dos opiniones.

PREGUNTA 6.- Las autoevaluaciones.

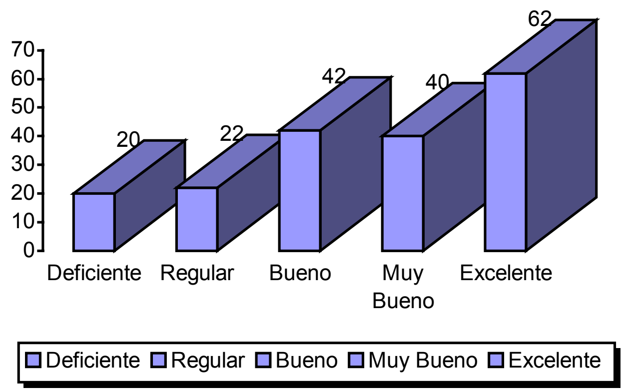
Deficiente	Regular	Bueno	Muy Bueno	Excelente	Total
19	46	50	53	19	187



6. Opinan que las *autoevaluaciones* permitieron poner en práctica los conocimientos, verificar los errores, están bien elaboradas para ayudar a que se mejore lo aprendido cada día y así contestar correctamente los exámenes; es como una crítica personal que orienta los avances y ayuda a ver los errores, es el reflejo de lo aprendido; en general estas se consideraron como muy buenas. Aquí se omitió la respuesta por parte de un alumno.

PREGUNTA 7.- El disco compacto.

Deficiente	Regular	Bueno	Muy Bueno	Excelente	Total
20	22	42	40	62	186



7. El *disco compacto* les parece un excelente apoyo, facilita el aprendizaje en forma dinámica, contiene información fácil de usar, es una buena base para poner en práctica los conocimientos; por sus gráficas y ecuaciones es un complemento entretenido. Faltó la opinión de dos alumnos.

Bibliografía

Alvarado, D. (1998). *Las Creencias y Concepciones en un Ambiente de Resolución de Problemas.* Tesis de Maestría del DME-CINVESTAV-IPN.

Artigue, M. (1995) Ingeniería Didáctica. En Gómez, P. (Ed.) *Ingeniería en Educación Matemática*. Grupo Editorial Iberoamérica.

Bogue, E. G. & Saunders, R. L. (1992). *The evidence for quality*. San Francisco: Jossey-Bass.

IPN, (1994). *Modelo Educativo "Pertinencia y Competitividad"*.

Molyneux-Hodgson, S., Rojano, T., Sutherland, R., Ursini, S. (1999). Mathematical modelling: the interaction of culture and practice. *Educational Studies in Mathematics, 39, 1*.

Suárez, L.; Ruiz, B.; Lezama, J.; Téllez, J. (1998) Una simulación con dispositivos de transducción y calculadoras con poder de graficación (CBL y TI-92). *Resúmenes de la III Escuela de Invierno y Seminario Nacional de Investigación en Didáctica de las Matemáticas*. ITESM.

Suárez, L. (2000). *El trabajo en equipo y la elaboración de reportes en un ambiente de resolución de problemas.* Tesis de Maestría del DME-CINVESTAV-IPN.

Torres, J. (1997). *La Metodología de Estudio en un Ambiente de Resolución de Problemas.* Tesis de Maestría del DME-CINVESTAV-IPN.

Torres, R.M. (2001). *La profesión docente en la era de la informática y la lucha contra la pobreza*. UNESCO.

Vergnaud, G. (1990). Epistemology and psychology of mathematics education. En Kilpatrick, J. y Nesher P. (Ed.) *Mathematics and Cognition: A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Cambridge University Press.

SITUACIÓN DIDÁCTICA DEL CONCEPTO DE DERIVADA

Bertha Ivonne Sánchez Luján y Alberto Camacho Ríos
I. Tecnológico de Cd. Jiménez e I. Tecnológico de Chihuahua
isanchez@teacher.com; camachoalberto@hotmail.com

Resumen
Proponemos introducir el concepto de derivada mediante una aplicación de la velocidad media, utilizando un simulador y el desarrollo en serie de funciones, a partir de lo cual los estudiantes proporcionen una definición de la derivada.

Antecedentes

Como docentes del área, hemos observado como el concepto de derivada es enseñado por medio de la recta tangente, algunas veces como una aplicación, y otras como una fórmula dada y reconocida por los profesores, nos esforzamos por que los estudiantes la apliquen, "comprendan" una gráfica para luego olvidarnos de ella y utilizar el formulario. El concepto de recta tangente muestra que si tenemos una curva cuya ecuación es $y=f(x)$ y queremos hallar la tangente a esta recta en un punto P entonces se considera un punto Q cercano y se calcula la pendiente de la recta secante PQ, enseguida nos acercamos a otro punto a lo largo de la curva, tratando de que el intervalo entre P y Q tienda a cero, entonces la tangente a la curva en el punto P es la posición límite de la recta secante PQ, cuando Q tiende a P. Esta es la forma en que normalmente se enseña el concepto de derivada, en este proyecto presentamos una alternativa para obtener el concepto.

Planteamiento del problema

La función llamada derivada de f, implica el uso del concepto de límite de una función

$$f^{1}(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\quad \text{para todo } x \text{ donde exista este límite.}$$

Esto requiere, en particular, que f esté definida en una vecindad para que $f^{l}(x)$ exista. En los cursos de Cálculo, se proporciona la definición anterior para luego resolver problemas de derivada de una función utilizando fórmulas, lo que hace que el estudiante no relacione lo aprendido anteriormente.

Justificación

Notamos que existe un alto porcentaje de reprobados en la materia de Cálculo Diferencial e Integral, y los profesores tenemos la responsabilidad de hacer más accesible lo enseñado, debemos tomar en cuenta que nuestros estudiantes serán usuarios de la matemática dado que es un instrumento que les permitirá abordar problemas de otras materias y en su desarrollo laboral, por lo que debemos ayudarlos a lograr una mejor asimilación de conceptos básicos y de esta forma puedan aplicarlos posteriormente. Los estudiantes de estos niveles de enseñanza presentan, concepciones poco confiables en la determinación algorítmica de expresiones que contienen límites, como lo es el concepto de recta tangente, lo que crea en los estudiantes dificultades - obstáculos epistemológicos, como las definidas por Brousseau (Brousseau G, 1983) - que los bloquean e impiden la aplicación real del concepto.

Utilidad metodológica
Después de diseñar, aplicar y analizar las situaciones didácticas, se propondrán para su implementación en el aula con el fin de crear una serie de situaciones didácticas o escenarios para enseñar la materia.

Objetivo
Introducir el concepto de derivada en el curso de Matemáticas I, Cálculo Diferencial e Integral, mediante situaciones didácticas donde se utilice la noción de velocidad media, con el fin de lograr una concepción real vía la construcción del concepto.

Metas concretas
Diseñar una situación didáctica sobre el concepto de derivada
Introducir el concepto de una manera elemental en los estudiantes por medio de situaciones didácticas. Siendo ellos mismos quienes con sus palabras establezcan la definición correcta.
Proponer las secuencias didácticas para su aplicación por parte de los profesores del área; o, en su caso, rediseñarlas para un mejor funcionamiento en el aula.

Supuestos. **Mediante la aplicación de la secuencia didáctica, el estudiante construirá el concepto de derivada.**
Marco teórico. **La base teórica es la Teoría de las Situaciones de Aprendizaje. Se realizó un análisis histórico del concepto de derivada y análisis de libros de texto.**
Marco metodológico. ***Conocimientos previos a la aplicación de la secuencia.*** **Antes de la introducir el concepto de derivada, es necesario que se realicen ejercicios sobre el Teorema del Binomio de Newton:**

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)a^{n-2}b^2}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)a^{n-3}b^3}{3!} + \ldots.$$

Se pide que realicen ejercicios como los siguientes:
1. Desarrollar $(3x-1)^4$
2. Si se tiene que $f(x)=x^2$, $f(x+\Delta x)$, obtener $(x+\Delta x)^2$
3. Si $f(x)=x^3$, $f(x+\Delta x)$ Obtener $(x+\Delta x)^3$
4. $f(x)=(x)^{1/2}$, $f(x+\Delta x)=(x+\Delta x)^{1/2}$

De estos ejercicios se pretende concluir que $f(x+\Delta x)=f(x)+B\Delta x+C\Delta^2 x+\ldots$ si analizamos esta fórmula el segundo término al que llamaremos primera variación, y lo comparamos con el valor obtenido en la velocidad media cuando Δt tiende a cero, nos damos cuenta que es el mismo valor, y además es aquel que cumple con la relación

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = velocidad$$

Justificación del diseño de la situación didáctica del concepto de derivada. La secuencia está diseñada para que mediante instrucciones sencillas, los estudiantes logren dar una definición propia del concepto de derivada. Se presenta un problema en el que se deja caer una pelota , se proporciona la ecuación de la distancia recorrida y la fórmula para la velocidad promedio y se pide se complete una tabla de velocidad para diversos intervalos de tiempo. Los valores fueron escogidos de modo que proporciones información clara y suficiente sobre lo que se desea obtener, recordemos además que ya vieron la noción intuitiva del concepto de límite y han realizado ejercicios sobre el Teorema del Binomio de Newton, que es lo que los ayudará a obtener una expresión algebraica del concepto. Es una fase importante dentro del proceso, pues las preguntas van en relación a los resultados obtenidos y es donde los estudiantes pueden darse cuenta de los errores y aciertos. Al completar la tabla las preguntas que se harán a los alumnos giran en torno al comportamiento de los valores obtenidos y persiguen que ellos posean un panorama.

Análisis de la población

Las secuencias fueron aplicadas a dos grupos de estudiantes, ambos de la materia de Matemáticas I (Cálculo Diferencial e Integral)de la carrera de Ingeniería Industrial en el Instituto Tecnológico de Chihuahua II., por el mismo Profesor. El primer grupo que llamaremos "A", tomaron la clase de 9:00 a 10:00 hrs., son alumnos de primer semestre. Las clases del curso son impartidas por la Profesora A, la secuencia fue aplicada por el Profesor B.

Grupo A	**Edades**	**Carrera**	**Equipo-Integrantes**
34	De 17 a 25 años	Ing. Industrial	5
estudiantes	6 estudiantes de 17 años	Nuevo ingreso	5
	15 estudiantes de 18 años		5
	8 estudiantes de 19 años		5
	3 estudiantes de 20 años		5
	1 estudiante de 23 años		4
	1 estudiante de 25 años		5

El segundo grupo, en el cual se aplicó la secuencia, lo llamaremos "B; toman la clase de 9:00 a 10:00 de la mañana, todos llevan la asignatura como repetidores y asiste un estudiante para examen especial. Las clases durante el semestre, así como la secuencia, fueron impartidas por el Profesor "B".

Grupo B	**Edades**	**Curso**	**Equipo-Integrantes**
16	De 18 a 22 años	Repetición 15	1B 4
estudiantes	1 estudiante de 18 años	Especial 1	2B 4
	10 estudiantes de 19 años		3B 4
	3 estudiantes de 21 años		4B 4
	2 estudiantes de 22 años		

La secuencia se llevó a cabo en 1 clase de 1 hora cada una, previa sesión de análisis de ejercicios utilizando el Binomio de Newton.

Se les entregó a cada uno el problema de la pelota con la tabla para completar la velocidad promedio.

El total de los estudiantes contaban con una calculadora para realizar las operaciones, además realizaron operaciones y anotaron resultados en la hoja del problema

Se utilizó proyector de acetatos para cada tabla y se fueron llenando en el aula con la participación de los estudiantes.

En general se mostraron atentos y dispuestos a trabajar

Se contó con observadores y se grabó video de la clase.

Análisis de la situación didáctica del concepto de derivada

Observaciones generales. En este punto se concentran las aportaciones de cada uno de los equipos, y las descripciones que dieron a cada uno de los resultados a cada fase y cada una de las secuencias.

FASE 1 PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA
SECUENCIA 1
Se presenta el siguiente problema: *Suponga que se deja caer una pelota desde la plataforma de observación de la torre CN de Toronto, 450m arriba del suelo. Encuentre la velocidad de la pelota después de 5 segundos.*
La distancia recorrida después de *t* segundos es:

$$s(t) = 4.9\, t^2$$

$$velocidad\_promedio = \frac{dis\tan cia\_recorrida}{tiempo\_transcurrido}$$

SECUENCIA 2
Se pide a los estudiantes que con ayuda de una calculadora completen la siguiente tabla:

Intervalo de tiempo	**Velocidad promedio (m/s)**
5≤ t ≤6	53.9
5≤ t ≤5.1	49.49 m/s
5≤ t ≤5.01	49.049
5≤ t ≤5.001	49.0049
5≤ t ≤5.0001	49.00049
5≤ t ≤5.00001	49.000049

El profesor escribe los datos que le proporcione el grupo para completar la tabla.
FASE 2 SECUENCIA 1
El profesor pide a los estudiantes que analicen los resultados obtenidos y los comparen con el binomio de Newton.
FASE 3 SECUENCIA 1
Se pide a los estudiantes que formen equipos de cinco integrantes para concluir con una expresión algebraica.
Se pregunta:
¿Qué semejanza se encuentra entre el desarrollo del binomio de Newton y los resultados obtenidos en la tabla?
¿Qué podemos concluir al respecto?
¿Es posible obtener una expresión algebraica de lo observado?
El profesor debe guiar la discusión y dar una conclusión final

GRUPO A.- Es lo mismo, sacamos el límite de una función y da lo mismo.
En equipos de cinco para concluir:
Que la variación es el límite de la función $\lim_{x\to a} s(t) = primera\_\mathrm{var}iación$
El límite de la función cuando tiende a "a" es igual que la primera variación.
La primera variación multiplicada por el límite nos da como resultado la función.

$\lim_{t\to 5} s(t) = \lim_{t\to 5} 1a.\text{var} = 49$

$\lim_{t\to 5} s(t) = \lim_{t\to 5} 1a.\text{var} = 49$ evaluada en 4.9t2

El límite de la función cuando t tiende a 5 es igual a la primera variación multiplicada por su tendencia.

GRUPO B.-

Pero en tiempo 5 la velocidad se va alejando, ¡alejando no!, acercando.
Es un proceso al límite
El límite por la izquierda es 5.
Profesor: el límite al cual se aproxima la velocidad es 49.
Profesor: es 49 por el alejamiento de los ceros. *t=5 , v(5)= 49*
El límite de la función cuando *t* tiende a 5 es igual a 49
Lo escribieron así: $\lim_{t\to 5} v(t) = 49$
Conclusión

GRUPO A.-

$1a.\text{var}(a) = \lim_{t\to a} s(t)$ *si llamamos a la 1ª. Variación = velocidad, de acuerdo a lo que vimos:*
$v(a) = \lim_{t\to a} s(t)$ *si generalizamos:* $v(t) = \lim_{t\to a} s(t)$

GRUPOB.-

El profesor pide a los alumnos que realicen el proceso anterior, esto es, en forma binomial
S(t) = 4.9 t²
Si hacemos $t \to \Delta t$ $\quad s(t+\Delta t) = 4.9(t+\Delta t)^2$
los alumnos dictan: $s(t+\Delta t) = 4.9t^2 + 9.8t\Delta t + 4.9(\Delta t)^2$
se identifica el segundo término como la primera variación y se concluye que ésta es igual a ***9.8t = 49***

Conclusiones
Cuando se desarrolla el binomio, en la primera variación cuando se sustituye se comprueba que es el mismo resultado
$\lim_{t\to 5} v(t) = PV$
Para llegar a un mismo resultado se hicieron dos operaciones distintas.
$s'(t) = \lim_{t\to a} s(t)$

Conclusiones

Consideramos que la inclusión del Binomio de Newton
$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)a^{n-2}b^2}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)a^{n-3}b^3}{3!} + ...,$ como una parte del proceso para la obtención del concepto de derivada, es una alternativa didáctica que se relaciona ampliamente con el concepto de velocidad promedio, es una forma fácil de “ver” la correspondencia entre los dos términos comparativos. Al aplicar la secuencia notamos

que los estudiantes presentan un proceso natural de aceptación del concepto, pues es de esa misma manera que se introdujo el concepto de límite y de límite infinito, en este proceso, los estudiantes participan activamente en todas las actividades encomendadas por el profesor. El concepto es presentado de manera numérica y al compararlo con lo visto anteriormente, se presenta en forma verbal para luego traducirlo a un lenguaje matemático, logrando así una transposición didáctica entre el objeto del saber y el objeto del conocimiento. Lo que demuestra, nuevamente, la dificultad de obtener el lenguaje matemático, de pasar de la forma verbal a la algoritmia, y más aún en estudiantes del primer semestre. Se considera que el objetivo se cumplió pues las conclusiones obtenidas así lo demuestran:

Cuando se desarrolla el binomio, en la primera variación cuando se sustituye se comprueba que es el mismo resultado

$$\lim_{t \to 5} v(t) = PV$$

Para llegar a un mismo resultado se hicieron dos operaciones distintas.

$$s'(t) = \lim_{t \to a} s(t)$$

Recomendaciones

Al analizar los resultados obtenidos, se observa que los estudiantes si construyeron el conocimiento por sí mismos, y en aplicaciones posteriores lo utilizaron acertadamente, por lo que se presenta esta alternativa para enseñar el concepto de derivada.

Bibliografía

Artigue, M.(1992): Didactic Engineering. En *Research in Didactique of Mathematics*, Selected Papers. Published with the participation of ADIREM: La Pensée Sauvage Éditions. France.

Artigue, M. (1998): *Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares?* Equipe DIDIREM, Université de Paris 7 et IUFM de Reims. RELIME, Revista Latinoamericana de Matemática Educativa. Publicación oficial del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Internacional. Thomson Editores. México, vol. 1, núm. 1.

Boyer, Carl (1968) *Historia de la matemática*. Versión española. Alianza Editoraial. Madrid.

Edwards,C. Jr.(1982). *The historical development of the calculus*. Springer -Verlag. Second printing. New York.

Edwards y Penney (1994). *Cálculo con Geometría Analítica*. Prentice Hall. 4ª. Ed. México.

Farfán, R. (1997): *Ingeniería Didáctica. Un estudio de la variación y el cambio*. Grupo Editorial Iberoamérica. México.

Leithold, L. (1998): *El Cálculo*. Oxford University Press. Séptima edición. México.

Piaget, J. (1975): *L´equilibration des structures cognitives, problème central du développment*. París URF.

Perrin-Glorian, M. J. (1994) *Théorie des situations didactiques: naissance, développement, perspecives. Vingt Ans de didactique des mathématiques* en France. Artigue, M, Gras, R, et al. La Pensée Sauvage éditions Paris.

Purcell E. y Varberg D. (1992): *Calculus with analitic geometry*. Prentice Hall. Sixth edition. New Jersey.

Steward, J. (2001): *Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas*. Thompson Learning.4ª. Edición.

Swokowski, E. W. (1989): *Cálculo con geometría analítica*. Grupo Editorial Iberoamérica. 2° edición. México.

UN LIBRO ELECTRÓNICO DE MATEMÁTICA: UNA EXPERIENCIA PARA COMPARTIR

Milagros Horta N., Juan Delgado R., Lourdes Hernández R. y José Montalván H.
Universidad de Matanzas, Instituto Superior "José Antonio Echeverría". Cuba.
milagros.horta@umcc.cu; milyh58@yahoo.es; rdelgado@ind.ispje.edu.cu

Resumen

En el último perfeccionamiento al programa de estudio (Resolución 41, 2000), realizado por el Ministerio de Educación Superior en Cuba a la asignatura que impartimos, Matemática I para Ingenieros Industriales, se produjeron cambios tan notables en ésta, que los libros de texto existentes hasta el momento, no respondían eficientemente a los requerimientos de este nuevo programa; por lo que profesores de esta asignatura en nuestro país, nos dimos a la tarea de confeccionar un texto electrónico con características inherentes a este tipo de formato, que pudiera resolver a corto plazo la carencia de libros en nuestras universidades y ser instalado en las intranet universitarias, de manera que todos los estudiantes que reciben esta asignatura tuvieran acceso a él y resolver en breve período de tiempo esta situación. Este texto (Horta. M, 2001), aborda el Cálculo Diferencial para funciones de varias variables; considerándose las funciones de una variable como un caso particular de éstas, con lo que se logra una mejor optimización de tiempo en el tratamiento de los diferentes aspectos de la asignatura, además de otras ventajas, que a nuestro juicio, superan a la forma tradicional de impartir este tema (Delgado, J.R., 1999). El presente trabajo aborda esta experiencia, pero sobre todo pretendemos mostrar las posibilidades que la informática puede brindar en el tratamiento geométrico de los diferentes conceptos de la matemática a partir de figuras animadas que hacen más asequibles a los estudiantes, conceptos tan abstractos como puede ser el de límite de funciones u otros, aún a pesar de las desventajas que diferentes autores atribuyen a los hipertextos o textos con formato electrónico (Landow, 1995).

Introducción

En nuestro país, Cuba, el ministerio de Educación superior, tiene concebido comisiones nacionales de carreras para cada una de las especialidades que se estudian en las diferentes universidades cubanas, la cual esta integrada por un conjunto de expertos con representación de cada una de las universidades del país, los cuales tienen dentro de sus tareas, revisar continuamente los planes de estudio de las diferentes carreras con vistas a su perfeccionamiento y lograr graduados universitarios con un alto nivel científico técnico. Durante el último plan de estudio instaurado (C` o C mejorado) se realizaron cambios sustanciales en la disciplina Matemática para Ingenieros Industriales, esta disciplina se imparte durante el 1er y 2do año de la carrera y la integran 5 asignaturas: Matemáticas I y II el primer año; Álgebra Lineal el 1er semestre del 1er año y Matemáticas III y IV el segundo año. Los cambios realizados para este nuevo plan de estudio (Resolución 41/98) -en el caso de matemática I y matemática II- cambiaron radicalmente con respecto al plan de estudio anterior. En la siguiente tabla se ilustra estas asignaturas con los contenidos que se contemplaban en el plan C (penúltimo plan de estudio aplicado) y los contenidos que deben impartirse ahora en el plan C` (plan de estudio actual).

Asignatura /*período de la carrera en que se imparte*	Plan C(Plan de estudio que se aplicaba antes del plan C mejorado)	Plan C´ o Plan C mejorado (último plan de estudio aplicado)
Matemática I /*1er semestre de 1er año.*	Cálculo diferencial de funciones de una variable y cálculo integral (integrales unidimensionales).	Cálculo Diferencial de funciones de varias variables (en general para funciones de una y varias variables).
Matemática II / *2do semestre de 1er año.*	Cálculo diferencial de funciones de varias variables	Cálculo Integral (integrales unidimensionales y múltiples)

La aplicación de este nuevo plan de estudio, que no son las razones del cambio ni las metas que se persiguen obtener con ellos el objetivo de este trabajo, hicieron que los textos que se utilizaban hasta el momento no se ajustaran a estos nuevos cambios y si bien nuestro Ministerio de Educación ubicó en los centros de Educación Superior, textos que se adecuaran, lo mejor posible, a estos cambios; a nuestro modo de ver no llenaban las expectativas, pues consideramos que éstos sirven, sobre todo, para consultas muy puntuales sobre determinados temas concretos, pero para el estudiante medio de ingeniería es conveniente disponer de un material donde se desarrollen con rigor, concisión, y con la necesaria claridad, los conocimientos básicos de la asignatura y por sobre todas las cosas, que se traten los contenidos en concordancia a como son abordados en clases, principal problema en los textos de matemática que están a nuestra disposición, pues no son muchos los que tratan el estudio de las matemáticas partiendo del concepto general de funciones, límites, etc y analizando estos conceptos para el caso de las funciones de una variable como casos particulares, siendo esta nuestra forma de abordar estos contenidos.
Atendiendo a esta seria dificultad de carencia de texto adecuado, lo cual repercute de manera negativa en la auto-preparación de los estudiantes, nos dimos a la tarea de confeccionar un material de “apuntes” que ayudara a palear esta dificultad. Dada las condiciones económicas de nuestro país, quisimos hacer este trabajo de manera que conllevara un empleo mínimo de recursos.
Para ello confeccionamos un libro de Cálculo Diferencial de varias variables, que tratará el caso de las funciones de una variable independiente como un caso particular de éstas, con formato electrónico, para ser utilizado por estudiantes de primer año de la carrera de Ingeniería Industrial, éste fue confeccionado sobre una página Web, para hacer más fácil su manipulación a través de redes informáticas.
En el presente trabajo pretendemos ilustrar este material, hecho que no resultará fácil para nosotros, pues mostrar en un artículo donde está limitada la cantidad de páginas en que debemos escribir y por demás que tiene la característica de ser un material en *“blanco y negro”* (impreso) hace bien difícil nuestra tarea de tratar que los lectores puedan llevarse una idea fiel de nuestra experiencia, es decir, utilizar un material docente con características inherentes a una técnica como es la de la computación, diferente por completo a la que se emplea en un material de imprenta que son las de este artículo que redactamos, pero si bien no se lograra el objetivo propuesto por los autores a partir de este trabajo, que es el de que conozcan nuestra experiencia de cómo utilizar las TIC en nuestras aulas, tanto más estaremos demostrando la importancia de éstas y el valor que el uso de ellas pueden tener en la enseñanza desde el punto de vista didáctico, para la comprensión de conceptos tan abstractos como los que abundan en la asignatura que enseñamos y que a veces las palabras no pueden ilustrar como quisiéramos.

Desarrollo

El organizar el proceso de enseñanza de la Matemática con el referencial teórico metodológico del enfoque histórico cultural y de la actividad, presupone partir de las características socioeconómicas, políticas y científico-técnicas de la época. Si se tiene en cuenta el notable y acelerado desarrollo que experimentan las TIC (Técnicas del la Información y las Comunicaciones) en nuestros días, se explica la necesidad de introducirlas en este proceso bajo este enfoque. Las TIC pueden ser incorporadas al proceso docente para fortalecer y hacer eficientes y efectivas las tendencias pedagógicas más actuales que centran su atención en la singularidad de cada alumno, estimulando su crecimiento individual y poniendo énfasis en *"aprender a aprender*", "*aprender a hacer*", con un sentido humanista de la educación (Hernández. L.M, 2000). Por lo que un escenario adecuado para trabajar en la dirección de integrar a los avances pedagógicos las nuevas tecnologías de la información y las comunicaciones, con la intención de dar respuesta a los cambios que reclama la actual sociedad llamada de la información y el conocimiento, en profesores y estudiantes, pueden ser la confección de materiales didácticos por parte de los profesores, que ayuden a la preparación individual de los estudiantes, aprovechando las posibilidades formativas, educativas y el ambiente motivacional de las TIC, así como las características de "masividad" que ofrece esta tecnología de poder ser utilizado un material ubicado en una máquina distante, por gran cantidad de usuarios desde diferentes computadoras, en ocasiones distantes una de otras.

Estos materiales tienen además la característica, que no poseen los libros impresos; de que pueden ser actualizados constantemente por parte del profesor, agregando problemas actuales del contexto en que se desarrollen las clases, donde se pueda aplicar la asignatura; añadir sistemas de tareas de acuerdo a las características del grupo de estudiantes con el que se esté trabajando, amén de la posibilidad de comunicación con el profesor que brinda para aclarar cualquier dificultad, sin tener que esperar al acto de la clase, a través del correo electrónico.

O sea que las TIC vistas desde el panorama educativo y en particular desde el plano de la Educación Superior, pueden enriquecer y hasta transformar radicalmente las prácticas pedagógicas y científicas en este nivel educacional, elevando significativamente el grado de competitividad y de desarrollo en la auto-preparación de los estudiantes.

Si bien la relevancia en lo "motivacional", por lo atractivo del entorno que crea, la facilidad de manejo que permite, la diversidad de contextos en los que pueden ser utilizados y dada la estructura no lineal que poseen estos materiales; hacen de ellos una valiosa herramienta para la auto-superación de los alumnos, no podemos decir que todas sean ventajas la de estos medios de estudio.

Refiriéndonos a las desventajas, que por sobre los materiales impresos pueden tener éstos, podemos señalar:

- supone demora en la lectura,
- por lo general menor resolución gráfica,
- mientras más rico en información, menor transportabilidad,
- es necesario cierto aprendizaje de manejo de computadoras,
- no existe aún un interfaz estándar,
- no existe un estándar de transferencia de datos, ni canales regulares de publicación,
- posibilidad de estructura en spaghetti,

Precisamente el reto de utilizar en el sistema enseñanza - aprendizaje de nuestras universidades (o elaborar como es nuestra propuestas) estos materiales a los que hacemos alusión en este trabajo y que tienen inherentemente desventajas con respecto a los que tradicionalmente se empleaban (materiales impresos), está en diseñar correctamente el material, de manera que cumpla con objetivos previamente trazados por el profesor y que sea coherente con los objetivos educativos-instructivos en la materia que se utilice, para de esta manera utilizarlo como un efectivo medio de investigación y enriquecimiento de los conocimientos adquiridos durante el acto de clase y no por el simple hecho de "*estar a la moda*".

En nuestro caso para la elaboración del texto con formato web cuya experiencia queremos compartir con otros colegas, después de la primera fase en el proyecto de elaboración que fue la de poner en manos de los estudiantes a corto plazo un material, con el cual no se contaba hasta el momento, y que les permitiera prepararse en los diferentes contenidos de la asignatura, nos dimos a la tarea de elaborar un libro de texto para ser presentado a la Comisión Nacional de Carrera para su valoración e implementación en todas las universidades del país, dada la carencia de un texto de calidad para las carreras de Ingenierías en Cuba, para ello nos propusimos cumplir los siguientes objetivos:
-Realizar este texto en formato electrónico, con vista a que dada las características económicas de nuestro país, en un breve plazo los estudiantes pudieran contar con él.
-Utilizar siempre que sea posible para hacer más asequible un concepto, el recurso de gráficos animados que ilustren las diferentes explicaciones verbales que aparece en el libro
-Montarlo sobre una página web de manera que permita facilidad de manejo, diversidad de contextos en los que pueda ser utilizado y la posibilidad de una estructura no lineal.
-Lograr la interdisciplinaridad en el año donde se imparte esta asignatura, es decir vinculación con el resto de las asignaturas del año.
-Elaborar sistemas de tareas con múltiples problemas de aplicación a la carrera en la que se utilice.
A este material le dimos el nombre de: "Apuntes de Cálculo Diferencial de Funciones de Varias Variables para Estudiantes de Ingeniería Industrial."
Para el uso de este texto, se debe utilizar el navegador Nestcape3.0+ o Internet Explorer 3.0+ y fueron diseñadas para verse con una resolución de 800x600 píxeles con la ventana maximizada. Se entra por el archivo index html, presenta una página principal con el título y nombre de autores. Para pasar a la página siguiente se debe ir al botón siguiente que aparece al final de esta página de portada. Posteriormente aparece la primera página del libro (figura 1), ésta esta confeccionada en una página de dos marcos (izquierdo y derecho) en el marco izquierdo aparecen los títulos de cada uno de los 4 capítulos del libro, en el derecho aparecen los nombres de los autores y colaboradores del material, dando "clic" sobre la palabra autor o colaborado, aparecerán en ese mismo marco los datos personales de éstos, al final posee 2 botones que le permitirá ir hacia delante en el libro, volver a la página anterior .

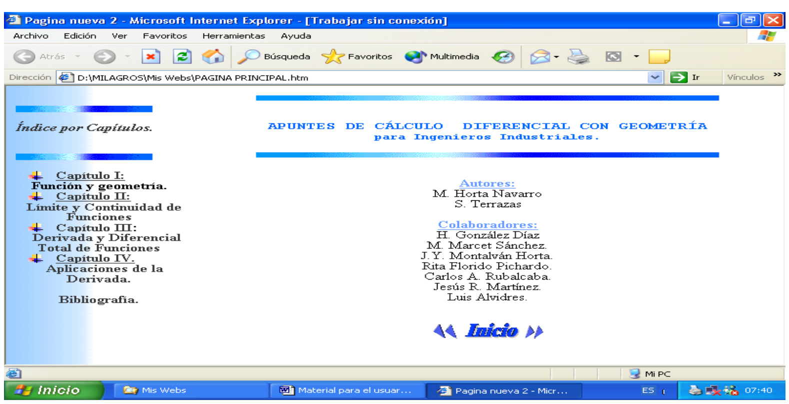


Figura 1

Ya en esta pagina principal, al accionar con el mouse en alguno de los títulos de los capítulos, aparecerá en este mismo marco el título de cada uno de los contenidos del capítulo pulsado que usted podrá consultar, acompañado de ilustraciones gráficas con movimientos, que hacen de este material un valioso recurso didáctico que en un texto impreso no se podría lograr, por razones obvias.

Este libro no solo posee el contenido de cálculo Diferencial de funciones de una y varias variables, sino que consta también, al finalizar cada capítulo, de una buena variedad de ejercicios, o sea , que si se quiere resolver ejercicios del tema de derivada de funciones (Capítulo III), lo podrá hacer yendo a la página principal y "cliqueando" el capítulo de derivada, en la lista de contenidos que aparecerá después de accionar el mouse sobre éste, va al final de ella y busca el título Ejercicios del Capítulo III, que es el que contiene los ejercicios del tema de derivada de funciones.
Resulta importante señalar, que dentro de los objetivos de la disciplina contemplados en el plan de estudio, aparece la enseñanza del uso de software profesionales de matemática, donde el estudiante aprenda a utilizar éstos en la solución de problemas de la asignatura. Por supuesto, que es sumamente difícil para el profesor de Matemática en las horas que dispone para impartir el contenido propio de la asignatura, realizar esta tarea de enseñar a trabajar con un paquete matemático de computación, por lo que este texto nos dio esta posibilidad sin que las horas de la asignatura se vieran afectadas, logrando esto de manera que el estudiante contara con materiales para ello y que en él aparecieran los intereses que en este sentido pretende el plan de estudio, aplicando lo planteado por Salinas (1997):

> *…La implantación de las nuevas tecnologías se desarrolla en paralelo a los cambios en los métodos de enseñanza e incluso en la forma de concebir el aprendizaje y la formación donde cada vez más es el propio alumno el que toma el control del proceso, mientras que los materiales y recursos se adaptan a sus necesidades.*

El estudiante tiene en este libro electrónico, una pequeña ayuda de cómo utilizar el DERIVE (software matemático) para resolver problemas relacionados con los aspectos abordados en cada uno de los capítulos, amen de poseer incorporado este software, lo que permite que el estudiante desde el mismo libro pueda acceder a él y verificar los resultados de los ejercicios realizados por ellos. Para ello, basta cuando se encuentre en la lista de contenido del Tema o Capítulo seleccionado (que siempre aparecerá en el marco izquierdo de la página), ir al final de esta lista y después de los ejercicios relacionados con el tema en cuestión aparecerá: Uso del DERIVE, si da "clic" en esta palabra caliente; en el marco de la derecha de la página aparecerá una pequeña ayuda de cómo utilizar este software profesional, en cálculos que aprendió a realizar en este capítulo, pero ahora lo podrá realizar con éste sistema matemático.
El tener incorporado el paquete también nos da la posibilidad de prescindir de páginas con las respuestas a los ejercicios propuestos, pues para verificar la eficacia o no en la solución obtenida de éstos, ellos lo podrán realizar utilizando el DERIVE y de esta manera lo obligamos a que estudien su manipulación.
Además este libro presenta conexiones con páginas de física y química (asignaturas del año) en momentos donde se aplican contenidos de matemática a estas asignaturas, de manera que con solo accionar una palabra, el estudiante puede desde un texto de matemática refrescar conocimientos, que pueden no tener claros de otra asignatura, en el momento en que lo necesite, también presenta materiales en Inglés que les permite aplicar lo aprendido en esta asignatura del año, de manera que este material no solo les sirve para el estudio y profundización de la Matemática que reciben en primer año, sino también para corroborar "in sito" la vinculación de esta asignaturas con el resto de las asignaturas del año.

Conclusiones. El material electrónico tiene una funcionalidad totalmente distinta a la del material impreso, se aconseja seguir un conjunto de normas sobre su elaboración. Según Carl Arglia en 1998, diferentes estudios resaltan que los usuarios de la Web son impacientes y no quieren perder el tiempo en esperar a que se carguen páginas sobrecargadas de imágenes innecesarias. Existen varios aspectos relacionados con esta afirmación: los usuarios no leen grandes cantidades de texto en la Web, avanzan rápidamente sobre él, no son tolerantes con las frases o párrafos inacabados, tampoco admiten fallos por incompatibilidad en las versiones de los productos utilizados, no están dispuestos a cargar software adicional para acceder a ciertos contenidos, no desean recorrer páginas extensas. Incluso se ha llegado a especificar un decálogo (Nielsen, 1999) de los principales errores que hay que evitar en lo que se refiere a *usabilidad* (*usability* es un término empleado para referirse al diseño efectivo y eficiente de un recurso web).
Otros análisis sobre la *usabilidad* de recursos concretos (destaca la calidad del estudio realizado por Carl Arglia en 1998 sobre el comercio electrónico) muestran las siguientes conclusiones: se produce en los usuarios bastante confusión cuando tienen que profundizar demasiados niveles en la estructura jerárquica de páginas dada; los usuarios están ávidos de recibir la información relevante sobre el dominio y no desean perder el tiempo en encontrar aquello que buscan ni están dispuestos a repetir complicados caminos de acceso para llegar a la información deseada.
Por lo que al elaborarse libros o hipertextos deben tenerse en cuenta estas consideraciones.
En nuestro caso teniendo éstas en cuenta, elaboramos el material, que resulta valioso y los estudiantes dan fe de ello en encuestas realizadas en grupos de clase antes y después de elaborado el texto. Los primeros, como mayor dificultad en los resultados docentes de matemática I, se referían a la no tenencia de un texto adecuado, que les permitiera hacer un correcto estudio independiente. Los segundos hoy hablan en las encuestas de cómo este material, les hace más fácil la asimilación de contenidos tan abstractos como el de límite a través de los gráficos animados que presenta el libro.

Bibliografía

Carl Arglia. (1998). E-Commerce tools: part II .storefronts. *Corporate Internet*, *4*(2), 1-16.

Delgado, J.R. (1999). “La Resolución de problemas matemáticos. Dos aspectos fundamentales para lograr su eficiencia: la estructuración sistémica de los contenidos de estudio y el desarrollo de habilidades generales matemáticas”. Tesis Doctoral. Universidad de La Habana.

Hernández, H. (1998) “Vigosky y la estructuración del conocimiento matemático en cuestiones de didáctica de la matemática.Homo Sapiens Ediciones.Rosario.

Hernández, L.M (2000). “Una vía transdisciplinar sobre las TIC para el desarrollo de habilidades profesionales generales, en cursos de postgrado semipresenciales”. Tesis doctoral. Universidad de La Habana.

HORTA. M. ET AL., (2001). “APUNTES DE CÁLCULO DIFERENCIAL PARA ESTUDIANTES DE INGENIERÍA INDUSTRIAL”, HTTP// INFONED.UMCC.CU.

Jakob Nielsen. (1999). "Top Ten Mistakes" Revisited Three Years Later. *Alterbox*. Disponible: http://www.useit.com/alertbox/990502.html [1999, Mayo 2].

LANDOW, G. (1995) *Hipertexto. La convergencia de la teoría crítica contemporánea y la tecnología*, Barcelona, Paidós.

(1998)Programa Analítico para la disciplina Matemática para Ingenieros industriales, La Habana.RESOLUCIÓN 41/98 DEL MINISTERIO DE EDUCACIÓN SUPERIOR, LA HABANA, 1998.

Salinas, J. (1.997): Enseñanza flexible, aprendizaje abierto. *Las redes como herramientas para la formación. Edutec, nº10, 02/99.*

UNA EXPERIENCIA DE AUTORREGULACIÓN EN EL APRENDIZAJE DEL CÁLCULO DIFERENCIAL

Margarita Veliz de Assaf
Universidad Nacional de Tucumán (UNT), Argentina
mveliz@herrera.unt.edu.ar

Resumen

Ante los resultados de múltiples investigaciones coincidentes en resaltar el carácter reproductivo que aún caracteriza el pensamiento de los estudiantes, y considerando que cada persona tiene un sistema personal de aprender, para esta investigación se parte con la idea de favorecer la autorregulación del aprendizaje, pretendiendo que los alumnos sean cada vez más autónomos, formándolos en sus propios procesos de pensamiento y de aprendizaje, es decir, enseñándoles a aprender a aprender.

Con ese fin se implementó en el curso de Cálculo Diferencial, el uso de Guías de Estudio con elementos de autorregulación y autoevaluación, y con propuestas de autorregulación diferenciadas según los objetivos logrados.

Se trabajó con una muestra seleccionada al azar, a la que se aplicó una encuesta en la que se tuvieron en cuenta los diferentes componentes de autorregulación, utilizándose la Escala Tipo Likert para las mediciones.

Los resultados indican que las actividades propuestas, con sus estrategias para solucionar ejercicios y problemas, posibilitan la función reguladora de la actividad del alumno por parte del profesor y a la vez la autorregulación por el propio alumno, dando lugar también a que éste reflexione sobre sus métodos de estudio y su forma de construir el conocimiento, actividad metacognitiva de un alto valor psicopedagógico.

Introducción

Tanto el uso de técnicas grupales como el trabajo independiente, la autorregulación y la autoevaluación son aspectos que por años estuvieron ausentes en las prácticas docentes de Cálculo Diferencial en la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional de Tucumán y que se considera importante revalorizar.

Teniendo en cuenta que los mecanismos de regulación y control se han vuelto el centro de atención de muchos investigadores, y que la necesidad de potenciar niveles altos de control del aprendizaje por parte de los alumnos se ha relacionado con conductas de tipo metacognitivo, es que se realizó este trabajo de investigación durante los dos últimos períodos lectivos.

Las investigaciones sobre las diferencias entre aprendices con distinto grado de competencia, muestran claramente la estrecha relación que existe entre el aprendizaje y la autorregulación deliberada y consciente. Entre otros, se pueden destacar los estudios de Zimmerman y Schunk (1989: 1-25), Zimmerman (1990: 173-201).

Para resolver la cuestión de qué constituye la autorregulación, en 1990 Zimmerman elaboró un marco conceptual, asegurando que un elemento que la distingue es que los estudiantes disponen de ciertas posibilidades de elección. La autorregulación varía del nivel bajo al elevado de acuerdo con las elecciones que puedan hacer los estudiantes, y que pueden referirse a su participación en la tarea, al método de aprendizaje, al tiempo que le dedicarán, al grado de competencia que buscan, en dónde y con quién aprenderán. Hay un grado total de autorregulación si los estudiantes pueden elegir en todas las áreas.

Schunk y Zimmerman (1994: 3-21) han proporcionado un marco teórico para el aprendizaje autorregulado. Según sus investigaciones, la autorregulación facilita metacognitivamente, motivacionalmente y conductualmente las distintas actividades de aprendizaje.

Las investigaciones realizadas por Jorba y Sanmartí entre 1988 y 1996 en Barcelona, sirvieron de base en la instrumentación del dispositivo pedagógico propuesto en este trabajo para tener en cuenta la autorregulación del aprendizaje. Centraron su atención en cómo enseñar a los estudiantes del nivel secundario a aprender de forma significativa y a autorregularse en las disciplinas Matemática y Ciencias Naturales. Desarrollaron las bases teóricas del proyecto al mismo tiempo que trabajaron en el diseño de actividades y en el análisis de lo que sucedía al aplicarlas en el aula.

El dispositivo elaborado en la presente investigación consiste en guías de estudio que orientan a los alumnos para estudiar de forma significativa y autorregulada, a la vez que autoevalúen sus propios resultados. Estas guías son líneas de conducción del autoaprendizaje; se componen de pequeños proyectos de trabajo a desarrollar con carácter metódico, cuyo propósito es el de generar y facilitar un aprendizaje teórico–práctico de naturaleza autónoma. Se trata así de organizar la enseñanza de modo que el alumno aprenda a aprender, que de sujeto pasivo se convierta en el centro del proceso de aprendizaje, propiciando el desarrollo de su capacidad de autoaprendizaje, a la vez que se autoevalúe.
Ante los resultados de múltiples investigaciones coincidentes en resaltar el carácter reproductivo que aún caracteriza el pensamiento de los estudiantes y considerando que cada persona tiene un sistema personal de aprender que ha ido construyendo progresivamente a lo largo de su vida, se pretende favorecer la autorregulación del aprendizaje, entendiéndola como el ajuste que el alumno aprende a hacer en las estrategias que utiliza para lograr un objetivo propuesto, y luego actuar en consecuencia. Se podría decir que la autorregulación es la actividad mental que permite crear un sistema personal de aprendizaje.

Al decir de Jorba y Casellas (1997: 28), "en la autorregulación se pretende que los alumnos sean cada vez más autónomos, formándolos en sus propios procesos de pensamiento y de aprendizaje, es decir, enseñándoles a aprender a aprender".
Relación entre la autorregulación y otros procesos de logros

Según las posibilidades de elección, diversos procesos entran en escena, procesos que tienen implicaciones para la enseñanza de habilidades autorreguladoras.

Aprendizaje y autorregulación
Estos dos procesos no son sinónimos, ya que el aprendizaje no necesita estar autorregulado. Una componente crucial de la autorregulación es que los estudiantes tienen algunas elecciones entre los componentes de las situaciones. Pero una situación muy controlada por el docente que permite pocas elecciones a los alumnos, puede producir mucho aprendizaje.

Motivación y autorregulación
La motivación es una fuerza que induce a los estudiantes a realizar y sostener acciones dirigidas a las metas. Esta definición difiere de la de autorregulación ya que carece de elementos de elección, pero están íntimamente vinculadas. Los estudiantes motivados para alcanzar metas, realizan las actividades autorreguladoras que creen que les ayudarán: organizar y repasar el material, supervisar sus progresos en el aprendizaje y modificar sus estrategias.

Metacognición y autorregulación

Flavell, J.H.(1971) fue el pionero en el estudio de la metacognición. La definió como “el conocimiento que uno posee acerca de sus propios procesos cognoscitivos y sus productos, o sobre algo relacionado con ellos”.

La metacognición consiste en que el alumno conozca su propio proceso de aprendizaje, la programación consciente de estrategias de aprendizaje, de elección y toma de decisiones, de estrategias de memoria, de solución de problemas y, en definitiva, de autorregulación.

Según Palou, M. (1998:125), “La toma de conciencia de su modo de aprender y de la complejidad del mismo son fundamentales para poder controlar su aprendizaje y, desde allí, planificar y organizar sus propias actividades de aprendizaje, tratando de gestar una disposición habitual que pueda ser intrínsecamente provechosa, donde se articulen armónicamente la reflexión, la interpelación y la imaginación”.

Autoevaluación y autorregulación

El proceso de autoevaluación de las capacidades y el progreso en la adquisición de habilidades es crucial para lograr un aprendizaje autorregulado. Comprende tanto los juicios sobre el desempeño personal en relación con las metas, como las reacciones propias a estos juicios cuando determinan que su desempeño es inaceptable.

Las autoevaluaciones positivas hacen que los estudiantes se sientan eficaces para aprender y motivados para seguir trabajando porque piensan que son capaces de adelantar.

Se tuvieron en cuenta también estrategias tanto cognitivas como metacognitivas en la confección de las guías de estudio para inducir a los alumnos a un aprendizaje autorregulado.

El proceso de toma de decisiones estratégicas implica el análisis y explicitación de un conjunto de variables entre las cuales los factores personales son los primordiales.

La práctica estratégica genera inferencia y transferencia de los contenidos a otros ámbitos semejantes, y por consiguiente, esta negociación intra – inter psicológica (metacognición) hace crecer lo que Vigotsky llamó Zona de Desarrollo Próximo (ZDP) del individuo.

El uso de estrategias en la autorregulación

Las estrategias también influyen en la autorregulación por medio del sistema de creencias de los estudiantes. En investigaciones sobre el tema, Zimmerman (1989, 1990) apunta que los alumnos autorregulados se sienten eficaces en el uso de estrategias y creen que su utilización les permitirá alcanzar metas a niveles superiores.

El conocimiento condicional, que consiste en entender cuándo y por qué emplear ciertos conceptos y procedimientos, forma parte del aprendizaje autorregulado, que requiere que los estudiantes decidan qué estrategias utilizar antes de entregarse a la tarea. Y mientras la realizan, evalúan sus progresos con procesos metacognitivos. Si detectan problemas, modifican su estrategia que podría ser más eficaz.

Los docentes pueden ayudar a sus alumnos a desarrollar el aprendizaje autorregulado si les proporcionan estrategias para enfrentar los materiales nuevos.

Desarrollo. En los períodos lectivos 2001 y 2002 se implementó en el curso de Cálculo Diferencial, el uso de las Guías de estudio elaboradas para facilitar el trabajo independiente

de los alumnos en las clases prácticas mediante elementos de autorregulación y autoevaluación.
Cada unidad de estudio en estas Guías cuenta con un esquema o cuadro sinóptico, o mapa conceptual donde se refleja todo el contenido a trabajar en las clases prácticas correspondientes, de modo que sea una referencia sobre el avance en el tratamiento de los temas de la unidad. Esto sirve de guía para que el alumno tenga la noción clara de lo que se vio, se está viendo y se verá, o sea para que cuente con una vista retrospectiva, una vista actual y una vista prospectiva de los contenidos en cada caso.
A su vez se los orienta para que aprendan a aprender de manera consciente, independiente y autorregulada, proporcionándoles estrategias de aprendizaje (reconocimiento de ideas previas, mapas conceptuales, cuadros sinópticos, esquemas).
En las actividades de aprendizaje aparecen las definiciones necesarias y básicas, como así también enunciados de propiedades y teoremas que son esenciales conocer y memorizar, a fin de que luego puedan aplicarlos. Además se ejemplifican situaciones y se propicia su análisis de modo que los alumnos cuenten con métodos de trabajo y una orientación para su trabajo independiente, a la vez que vayan autorregulando su aprendizaje. Se dan ejercicios y problemas teniendo en cuenta los diferentes niveles de asimilación.
Se propone ejercitación de la guía de trabajos prácticos de la cátedra, seleccionada en cantidad suficiente como para satisfacer las exigencias metodológicas en las cuales se apoya este trabajo. También se ofrece un cuestionario para que los alumnos respondan al finalizar cada tema, una guía de autoevaluación y se dan propuestas de autorregulación, diferenciadas según los objetivos logrados.
En la primera experiencia se trabajó con la totalidad de alumnos inscriptos en la asignatura, es decir 1230 (mil doscientos treinta) de los cuales se extrajo una muestra al azar de 257 (doscientos cincuenta y siete) alumnos a fin de inferir sobre los resultados encontrados. En el año 2002, se tomó una muestra de 250 (doscientos cincuenta) alumnos sobre un total de 1126 (mil ciento veintiséis).
Una vez que los alumnos trabajaron a lo largo de la asignatura con las guías, se aplicó una encuesta en la que se tuvieron en cuenta los diferentes factores o componentes de autorregulación:

1.- Recursos personales (disponibilidad para aprender, esfuerzo personal, dedicación al estudio, persistencia en el trabajo, conciencia de la tarea, motivación, elección de compañero de estudio).
2.- Aplicación de estrategias metacognitivas (reflexión sobre métodos de solución, reflexión sobre diferentes vías de solución, identificación de partes importantes de cada tema, utilización de estrategias (esquemas, gráficos, resúmenes, tablas, etc.) para comprender el contenido de lo que se estaba estudiando)
3.- Autocorrección (ejecución de acciones correctivas en el proceso de aprendizaje como manera de estudiar, dedicación y esfuerzo para la obtención de mayores logros, ayuda solicitada a fin de corregir errores o dificultades)
4.- Autocontrol (control de la comprensión y progresos para el logro de las metas propuestas, control sobre el uso de información, control del tiempo y el lugar físico dedicado al estudio).

Se trabajó con la Escala Tipo Likert, adjudicándose a cada respuesta desde 5 (cinco) puntos a las totalmente favorables en cuanto a la autorregulación, hasta 1 (un) punto a las totalmente desfavorables, ya que los alumnos contaron con 5 (cinco) opciones para responder cada pregunta.

Se hizo un análisis de las respuestas y se establecieron 5 (cinco) niveles de autorregulación: Muy bajo, Bajo, Medio, Alto y Muy alto.
Se analizaron los resultados sobre el conjunto de reactivos que definen cada componente y también la totalidad.
Tanto en el año 2001 como en el 2002, la mayor frecuencia se registró en el nivel medio de autorregulación, pero observando los niveles alto y muy alto, allí se ubica casi un 36% de los alumnos en el año 2001 y un 41% en el año 2002. Estos resultados alientan a seguir trabajando en el sentido de favorecer la autorregulación del aprendizaje de los estudiantes.
Los resultados indican que los alumnos, en general, son conscientes del esfuerzo que hicieron para realizar un trabajo independiente (el 82% en 2001 y el 80% en 2002 respondió a las opciones Muy bueno y Bueno).
También un porcentaje importante de alumnos (46% en 2001 y 42% en 2002) no persiste en el trabajo cuando se enfrenta con dificultades. Esto alerta sobre la importancia del acompañamiento del docente en las tareas.
El 61% en 2001 y el 65% de los alumnos en 2002 fue consciente de la tarea que realizaba, lo cual es muy necesario a fin de implementar estrategias tanto cognitivas como metacognitivas en el aprendizaje.
Es notoria la inclinación de un gran número de alumnos en cuanto a elegir con quién estudiar. Es de importancia el trabajo en grupo en las tareas de las asignaturas específicas de la Facultad, por ello se considera que en este primer curso tiene gran valor el hecho de que puedan estudiar de esa forma, ayudándose entre ellos ante dificultades y posibles errores.
Es de destacar que los alumnos en porcentajes importantes, no tienen el hábito de reflexionar sobre los métodos de solución empleados en sus tareas, ni sobre otras vías de solución, una vez que consideran alcanzada la misma. Es necesario incentivarlos a que lo realicen ya que es una ayuda a la reflexión metacognitiva y por tanto al aprendizaje autorregulado.
También se pudo constatar que la estrategia de identificación de lo importante de cada tema, es algo que los alumnos tienen presente. No utilizan en la misma medida estrategias para la comprensión como esquemas, gráficos, tablas, resúmenes, lo que se debe incentivar por la importancia que tienen en asignaturas específicas de las carreras que se dictan en la Facultad, especialmente en Economía.
En cuanto a un factor muy importante en el aprendizaje autorregulado, como es el de corregir sus propios errores y aplicar correctivos en el proceso de aprendizaje para obtener mayores logros, los resultados muestran que los alumnos en buen porcentaje buscaron ayuda para corregir errores (62% en 2001 y 67% en 2002) y en menor porcentaje (51% en 2001 y 49% en 2002) aplicaron acciones correctivas en el aprendizaje.
En cuanto al control necesario para autorregular el aprendizaje, el 52% de los alumnos en 2001 y el 54% en 2002, manifestó haber controlado la comprensión y los progresos; el 43% en 2001 y el 48% en 2002, el uso de la información proporcionada en un problema; el 67% en 2001 y el 64% en 2002, el tiempo dedicado al estudio y el 62% en 2001 y el 68% en 2002, el lugar físico para estudiar.

Conclusiones

Las actividades propuestas, con sus estrategias para solucionar ejercicios y problemas, posibilitan la función reguladora (de seguimiento y control) de la actividad del alumno por parte del profesor y a la vez la autorregulación por el propio alumno, dando lugar también a que éste reflexione sobre sus métodos de estudio y su forma de construir el conocimiento.

El factor motivacional es de gran importancia a la hora de aplicar estrategias. Es por tanto de gran interés poder incrementar el porcentaje de alumnos motivados para las tareas, es decir, se debe buscar alternativas a fin de lograrlo.

Los alumnos no tienen el hábito de reflexionar sobre los métodos de solución empleados en sus tareas, ni sobre otras vías de solución, una vez que consideran alcanzada la misma. Es necesario incentivarlos a que lo realicen ya que es una ayuda a la reflexión metacognitiva y por tanto al aprendizaje autorregulado.

La práctica de autoevaluación se dio predominantemente en los alumnos que pertenecen a los niveles alto y muy alto de autorregulación.

Bibliografía

Camilloni, A.; Celman, S.; Litwin, E. y Palou, M. (1998). *La evaluación de los aprendizajes en el debate didáctico contemporáneo,* PAIDOS, Buenos Aires.

Jorba, J. y Casellas, E. (eds.). (1997). *La regulación y la autorregulación de los aprendizajes,* Editorial Síntesis, España.

Jorba, J. y Sanmartí, N. (1996). Enseñar, aprender y evaluar: un proceso de regulación continua, *Servicio de Publicaciones del Ministerio de Educación y Cultura*, Madrid.

Schunk, D. H. y Zimmerman, B. J. (1994). Dimensions of academic self-regulation: A conceptual framework for education, en *Self- regulation of learning and performance: Issues andeducational applications*, pp. 3-21, Lawrence Erlbaum Associates, New Jersey.

Schunk, D. H. (1997). *Teorías del aprendizaje*, Prentice Hall Hispanoamericana, México.

Veliz, M. (2002). Sistema de autorregulación y autoevaluación del aprendizaje del Cálculo Diferencial para estimular el trabajo independiente de los alumnos en las clases prácticas Tesis de Magíster. Univ. Nacional de Tucumán. Argentina.

Zimmerman, B. J. (1990). Self regulating academic learning and achievement: The emergence of a social cognitive perspective, en *Educational Psychologhy Review*, Nº 2, p. 173 – 201, Lawrence Erlbaum, Hillsdale, New Jersey.

Zimmerman, B. J. (1995). “Self regulation involves more than metacognition: A social cognitiveperspective”, en *Educational Psycholohy Review*, Nº 30, pp. 217 – 221, Lawrence Erlbaum, Hillsdale, New Jersey.

Zimmerman, B.J. y Schunk, D.H. (eds.). 1989. Self-regulated learning and academic achievement: Theory, research, and practice, Springer – Verlag, New York.

UNA CLASE EN EL LABORATORIO DE MATEMÁTICA COMO OBJETO DE INVESTIGACIÓN

Mercedes Anido de López y Ana María Simoniello de Álvarez
Universidad Nacional de Rosario y Universidad Tecnológica Nacional - Argentina
amsimoni@fce.unl.edu.ar

Resumen

El trabajo refiere a experiencias realizadas en el aula con alumnos universitarios de primer año de estudios de una carrera de Ingeniería de la Facultad Regional Santa Fe de la Universidad Tecnológica Nacional durante el desarrollo de una Unidad didáctica de Matemática. Uno de los objetivos que nos planteamos consiste en analizar las respuestas de los alumnos cuando, a través de la estrategia pedagógica especialmente diseñada, se le proporciona la oportunidad de construir sus propias ideas para lograr la comprensión de ciertos conceptos. Un aspecto del diseño es la inclusión de la herramienta computacional DERIVE como herramienta cognitiva que permite colaborar con el alumno en la exploración, organización y representación del conocimiento matemático y como un valioso instrumento para el aprendizaje de Geometría. La experiencia consistió en la observación y descripción de las selecciones de los alumnos ante situaciones concretas planteadas en el proceso de construcción del conocimiento.

Introducción. Fases de la investigación.

Se busca transferir, con las limitaciones que Artigue (1995) señala, los "análisis preliminares" y la confrontación entre los análisis "a priori" y "a posteriori ", de una Ingeniería Didáctica diseñada para el "Taller de Prácticas" de Álgebra y Geometría Analítica en 1er. año de las carreras de Ingeniería-2do. Cuatrimestre - Facultad Regional Santa Fe-Universidad Tecnológica Nacional. Esta experiencia forma parte de un conjunto de Microingenierías Didácticas desarrolladas en el marco de los Proyectos de Investigación institucionalizados en la Universidad Nacional de Rosario: "La Enseñanza de la Matemática con Herramientas Computacionales " y "La Ingeniería Didáctica en el Diseño y Seguimiento de Unidades Curriculares". Uno de los objetivos es "integrar y complementar "los resultados de distintos análisis, según la concepción de Brousseau (1988) , sobre el rol de las llamadas herramientas CAS (SCILAB, MAPLE, MATEMÁTICA, DERIVE, SAS) como parte del "medio", en la generación de "situaciones didácticas".

Desarrollo de la experiencia

Modalidad de trabajo: se trata de un taller de prácticas de Matemática que complementa la actividad habitual de las clases de teoría y problemas. Para esta experiencia se acordó destinar 4 (cuatro) horas en el laboratorio de computación.

Tiempo: 1 (una) observación semanal de 2 hs. durante dos semanas.

Tamaño de la población a observar: 10(diez) alumnos, en registro narrativo, 2(dos) en interacción con el docente y el ordenador.

Modalidad: observación participante por parte de la profesora de Matemática a cargo.

Instrumento de recolección y registro de la información: notas de campo, registro anecdótico, grabación magnetofónica.

Criterios orientadores de la observación: se busca detectar situaciones adidácticas de acción, de formulación o de validación. Se espera registrar la exploración del conocimiento del alumno a través de sus acciones, conjeturas, anticipaciones, verificaciones, dudas.

Relaciones de los alumnos con los contenidos y con el medio: el trabajo del alumno con los datos e hipótesis; función de los obstáculos didácticos; forma de apropiación de los saberes;

interacciones frente al ordenador: docente, alumno, ordenador; alumno, alumno, ordenador; lugar asignado a la computadora en las situaciones de aprendizaje.

Los análisis previos

Ubicación curricular: para el alumno de primer año de Ingeniería resulta generalmente difícil la comprensión de las relaciones recíprocas entre una ecuación con dos variables y el conjunto de puntos del espacio de dos dimensiones que la representan geométricamente. En particular, la interpretación geométrica de los coeficientes y sus relaciones.

Conocimientos previos: la obtención de propiedades a partir de la ecuación de una curva implica un fluido manejo por el alumno de ciertos conceptos geométricos, del álgebra y de la geometría analítica que significan competencias previas o adquiridas en etapas anteriores al estudio del tema.

Análisis epistemológico: nos adherimos a Polya (1981) cuando afirma que: " La obra matemática se nos presenta, una vez terminada, como puramente demostrativa, consistente en pruebas solamente. No obstante, esta ciencia se asemeja en su desarrollo al de cualquier otro conocimiento humano. Hay que intuir un teorema matemático antes de probarlo, así como la idea de la prueba antes de llevar a cabo los detalles. Hay que combinar observaciones, seguir analogías y probar una y otra vez. El resultado de la labor demostrativa del matemático es el razonamiento demostrativo, la prueba; pero ésta a su vez, es construida mediante el razonamiento plausible, mediante la intuición. Si el aprendizaje de las matemáticas refleja en algún grado la invención de esta ciencia, debe hacer en él un lugar para la intuición, para la inferencia plausible".

Concepción didáctica: la metodología se basa en la postura epistemológica y el marco teórico que sustenta la Ingeniería Didáctica, en cuanto a no separar el conocimiento matemático de su propio proceso de estudio, y deriva en la participación activa del estudiante como hacedor de un aprendizaje que se trata de facilitar con el uso “adecuado“ de la herramienta informática..

Selecciones y conjeturas del profesor, “a priori”

Selecciones conceptuales: consideramos que la conceptualización de una cónica como lugar geométrico definido por una condición referida a elementos geométricos dados y la relación entre esos elementos y los coeficientes de la ecuación canónica que se obtiene, es enriquecedora desde el punto de vista geométrico ó analítico geométrico. Por esto las herramientas conceptuales en general están referidas a la relación entre una función de una variable, que esté explícita, o bien implícita en una ecuación, ó expresada en forma paramétrica, y el conjunto de puntos cuyas coordenadas satisfacen la ecuación en el correspondiente sistema de referencia. Así se ven involucrados: el concepto de función implícita en una ecuación, el de ecuaciones algebraicas equivalentes, la representación de puntos y rectas en un sistema de referencia.

Selección de la herramienta informática: *e*legimos para este trabajo el Programa DERIVE en su versión for Windows que posee amplias posibilidades operativas, utiliza un lenguaje simbólico “ natural ” (como el que se utiliza en el aula de Matemática), ofrece la visualización permanente del trabajo del usuario, opera con expresiones y relaciones aritméticas, algebraicas y trascendentes, con ecuaciones, sistemas de ecuaciones, aproximación de funciones; permite crear, programar funciones u operadores que interesen al usuario. Además ha sido incorporado a calculadoras programables a las que los alumnos tienen mayor acceso.

Selecciones metodológicas: Las actividades se derivan de las propuestas del docente a partir de un problema inicial disparador. Se sigue en forma natural un proceso de inducción, dejando lugar a la posibilidad de situaciones problemáticas y preguntas imprevistas de los alumnos.
Selecciones de problemas locales:

Presentación del Problema A

Dadas las ecuaciones de segundo grado en dos variables:

a) $x^2 + y^2 = 5x$	d) $15\,y = -x^2 + 8\,x + 44$
b) $(x - 15)^2 = 16\,(y - 3)$	e) $x^2 - 10\,x + y^2 + 60\,y + 825 = 0$
c) $y^2 - 40\,y = 10\,x + 30$	f) $(x - 13)^2 + (y + 5)^2 = 35$

A.1 Obtenga sus gráficas cartesianas en la pantalla 2D y exprese qué curva representa cada una de ellas.

A.2 A partir de la visualización de las gráficas exprese características principales que las distinguen y destacan, en cuanto a su posición y extensión en el plano.

Conjeturas del Profesor

En cuanto a la utilización de DERIVE: los alumnos no reciben preparación previa sobre el uso del computador ni del programa DERIVE para realizar los cálculos y resolver ecuaciones; se espera, dado la experiencia con otros grupos, que serán capaces de aplicar los comandos necesarios del Programa sobre la base de una tabla de consignas preparada por el Profesor para apoyar las consultas al respecto. El Profesor prestará apoyo ante situaciones que puedan surgir al respecto, y que espera desaparezcan a medida que se familiaricen con la lógica del programa. Se espera que el alumno reconozca las ecuaciones de circunferencias, dado su estudio previo; distinga las ecuaciones de parábolas, las relaciones con su forma geométrica y con otros conceptos adquiridos en Álgebra y en Análisis Matemático, y sea capaz de reconocer y estimar algunas características principales como los rangos de variación de sus variables, valores máximos ó mínimos, mayor o menor dilatación o abertura, eje de simetría, intersecciones con los ejes coordenados. Se supone que los alumnos propondrán como problema: cambiar las escalas en los ejes del sistema coordenado , para favorecer la visualización de las gráficas.

Presentación del Problema B

Considere la ecuación de la parábola d) del Problema A, y su gráfica.

B.1 A partir de la visualización de la gráfica estime las coordenadas de su vértice y de las intersecciones con los ejes coordenados, si existen; conjeture sobre la existencia de eje de simetría; estime los rangos de variación de las variables de la ecuación; estime las coordenadas de dos puntos que pertenezcan a la curva y de otros dos que no le pertenezcan.

B.2 Realice con DERIVE los cálculos necesarios para confirmar ó desechar sus conjeturas.

B.3 Reitere el problema con la ecuación b) del Problema A.

Conjeturas del Profesor

Con respecto a B.1:

- se espera que el alumno haga las estimaciones y conjeturas a través de los datos sobre coordenadas que le ofrece la pantalla gráfica 2D de DERIVE, según sitúen adecuadamente el cursor móvil, y que propongan el trazado del eje de simetría para favorecer su conjetura al respecto.

En cuanto a B.2 y B.3:

- se espera que el alumno utilice los conocimientos sobre polinomios, sus raíces reales ó complejas, establezca y resuelva en forma adecuada las ecuaciones correspondientes para calcular las coordenadas de los puntos de intersección con los ejes coordenados;
- que el alumno realice los cálculos necesarios para determinar coordenadas de puntos de la curva; seleccione adecuadas estrategias para controlar la simetría respecto del eje estimado y concluya que es un eje paralelo al eje de ordenadas. Con respecto a la determinación del vértice de la parábola es de esperar que algunos relacionen el cálculo de su ordenada con la determinación de máximo, ó mínimo de la función cuadrática, estudiado en Análisis Matemático; es posible que otros, una vez aceptado el eje de simetría, encuentren el vértice como solución del sistema mixto de ecuaciones de curva y recta, ó de abscisa igual a la semisuma de abscisas de puntos simétricos con respecto al eje.

Presentación del Problema C:

C.1 Dados la ecuación de la parábola $y = \frac{1}{4}x^2$, el punto (0, 1) y la recta d: y + 1=0, obtenga sus gráficas en el mismo sistema coordenado

C.2 Estime en la gráfica las coordenadas del vértice y la ecuación del eje de simetría de la parábola, y las coordenadas de otros tres puntos de la parábola.

C.3 Estime las distancias respectivas de cada uno de esos puntos al punto y recta dados. Elabore conclusiones y analice la posibilidad de validación de sus conjeturas.

C.4 Considere la parábola de ecuación $y = -4x^2$, el punto $(0, -\frac{1}{16})$ y la recta d: $y - \frac{1}{16} = 0$.

Reitere, con estos datos, lo consignado en C.1, C.2 y C.3.

C.5 Realice los cálculos necesarios para confirmar ó rechazar sus conjeturas, y dar conclusiones.

Conjeturas del Profesor

Con respecto a las consignas C.1 y C.2 se esperan situaciones similares a las planteadas en el Problema B.

En relación con C.3 se espera que el alumno utilice correctamente los conocimientos de cálculo de distancia entre puntos, y entre punto y recta.

Es posible que algunos alumnos expresen alguna observación sobre la relación entre el coeficiente del término cuadrático en la ecuación de la parábola y la concavidad de la gráfica, dado que se hace evidente en las ecuaciones del problema, y además pueden asociarlo a conocimientos previos sobre la función cuadrática. Asimismo pueden observar la relación entre la dilatación de la parábola y el valor absoluto de aquel coeficiente.

Se supone que pueden surgir cuestionamientos del alumno acerca de: si la relación entre las distancias calculadas se mantienen para todos los puntos de la parábola y/o, si eso ocurre con todas las parábolas. En tal caso se habrá logrado el propósito de revalorizar el concepto de lugar geométrico y quedará abierta la propuesta de definir la parábola como el lugar geométrico de los puntos del plano que cumplen las condiciones analizadas.

En definitiva, consideramos que subyacen problemas abiertos como:

- Obtener la ecuación de la parábola cuyo eje de simetría es el eje de ordenadas y vértice, el origen, como lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto y de una recta , fijos.
- Ecuación de la parábola cuyo eje de simetría es paralelo al eje de ordenadas. Traslación de ejes para relacionar con la ecuación canónica anterior.
- Relaciones entre la concavidad de la parábola y su dilatación o abertura, según el coeficiente a , de la ecuación $y = a x^2$.
- Establecer analogías con respecto a parábolas cuyos ejes de simetría son paralelos al eje de abscisas.
- Demostrar que dados tres puntos no alineados sólo existe una parábola que los contiene.

El análisis "a posteriori "

Con respecto al Problema A, la tarea de incorporar a la pantalla de Álgebra las ecuaciones dadas fue algo lenta en todos los grupos dado que siendo la primera experiencia en el uso de DERIVE, debían familiarizarse con la introducción de exponentes, en especial, pero en general con el uso del teclado; para algunos también era la primera vez en el uso de un teclado alfanumérico; cometieron errores como omisiones de paréntesis y exponentes; se observó complementación de las tareas entre los dos compañeros de cada grupo, uno de ellos dictaba las expresiones y controlaba, mientras el otro escribía; no se observaron dificultades en el uso de DERIVE para obtener las gráficas de las funciones y tal lo conjeturado todos solicitaron ayuda para modificar las escalas de modo que las gráficas estuvieran dentro del rango visible en la pantalla. No tuvieron dificultades en el reconocimiento de las ecuaciones de circunferencias y de la parábola cuya ecuación estaba casi explícitamente dada.; les causó sorpresa el hecho que las otras dos ecuaciones también representaran parábolas y algunos buscaron la forma de ver si se podía explicitar la función cuadrática, como una situación adidáctica.; en cuanto a las características de las parábolas, que debían observar por comparación y distinción con las gráficas de circunferencias, coincidieron en términos como curva abierta, extensión infinita a partir de un valor fijo, y un alumno expresó que la gráfica c) no correspondía a una función; esto dio lugar a la discusión y para corroborar sus dichos luego de la intervención de la profesora, mostró que, despejando la variable y obtenía dos funciones cuyas gráficas respectivas son las ramas superior e inferior de la parábola de eje de simetría horizontal.

En cuanto al Problema B se observó que aprovecharon el cursor móvil sobre la curva para estimar las coordenadas del vértice y de las intersecciones con los ejes coordenados, con la aproximación que ofrecen los datos de la pantalla; reconocieron la existencia del eje de simetría; dado que la gráfica intercepta al eje x en dos puntos, en tres de los grupos avanzaron obteniendo la ecuación utilizando la semisuma de abscisas de aquéllos; los otros dos grupos optaron por suponer que la abscisa del vértice les permitía dar esa ecuación; luego obtuvieron su gráfica y encontraron puntos equidistantes del mismo; discutieron sobre la validación de estas suposiciones; dos alumnos de distintos grupos opinaron que si todos llegaban a la misma conclusión parecía que no necesitaban validación. Fue este un momento muy oportuno para la reflexión sobre la validez o verificación de propiedades, en general, y no sólo por situaciones particulares. En el caso de calcular coordenadas de puntos de la parábola plantearon y resolvieron las ecuaciones correspondientes. Les produjo entusiasmo el hecho de no necesitar más que la aplicación del Comando Solve de DERIVE para obtener las soluciones correspondientes. Se turnaron en hacer los cálculos a través del computador, mientras el otro compañero trataba de avanzar con cálculos en el papel, usando la calculadora; se registró que uno de ellos manifestó no agradarle que algunas respuestas fueran números irracionales, "porque eso le complicaba todo". Resultó interesante que un alumno propusiera verificar las soluciones de las ecuaciones, en estos casos. Se observó en casi todos los grupos que los alumnos trataban de plasmar en el papel un bosquejo de lo que veían en la pantalla, pareciendo que, así como con rapidez obtenían la gráfica, asimismo podían perderla y temían no recuperarla. En el caso de considerar la ecuación b) observaron que las raíces del polinomio debían ser complejas no reales y sólo uno intentó calcularlas para usarlas en la conjetura sobre la ecuación del eje de simetría y en la abscisa del vértice. El mismo alumno obtuvo más puntos de iguales ordenadas para asegurar mejor su apreciación. A partir de la discusión, otros optaron por una estrategia similar. Ninguno abordó la búsqueda de la solución del sistema mixto para validar esta conjetura y tres alumnos optaron por encontrar el mínimo de la función con método del Análisis Matemático. Hasta aquí transcurrieron las dos primeras horas.

En el Problema C, resolvieron más rápidamente y con más seguridad lo consignado en C.1 y en C.2. En cuanto a la consigna C.3 fue cumplida por casi todos, dado que algunos no lograron estimar las distancias de los puntos que habían elegido, a la recta y punto fijo dados; resolvieron hacerlo con cálculos. En tres grupos trabajaron con lentitud debido a que cometieron errores en el uso de fórmulas para el cálculo de distancias. Con la intervención de la profesora detectaron sus errores y siguieron. Se observó error en el uso de signos, de valor absoluto, de inclusión de paréntesis, en general, errores similares a los que generalmente cometen al operar a lápiz y papel. Un aporte muy interesante fue el de un alumno que planteó si sería válido analizar si para todos los puntos de la parábola se cumplía la relación entre las distancias calculadas, proponiendo considerar un punto cualquiera (x, y) de la parábola; debido a esto, otro se preguntaba si lo mismo podía ocurrir con todas las parábolas; luego de la discusión quedó la propuesta de confirmar o desechar esa nueva conjetura; cinco alumnos tuvieron dificultad para comprender que su compañero proponía que el punto de la parábola que debían considerar, para asegurar la pertenencia, es $(x, 1/4\, x^2)$. Pero esta situación adidáctica permitió lo esperado, es decir, reconocer que la parábola es el lugar geométrico de los puntos que satisfacen la determinada condición.; se aprovechó para plantear la ecuación del lugar geométrico y finalizó el tiempo asignado; así quedó el problema abierto para completar el estudio, lo que se hizo en la clase habitual.

Confrontación de los análisis a priori y a posteriori: En los tres problemas planteados se confirmaron en gran medida las conjeturas del profesor.

Una evaluación del avance

- La propuesta de trabajo que implica experimentar, explorar, investigar, coloca al alumno en una situación favorable hacia la adquisición de conocimientos
- El rol del docente se muestra en estas instancias como el de orientador, acompañante, moderador, principalmente en las situaciones adidácticas ya que es el momento de mayor discusión y debe en tal caso colaborar con interrogatorio adecuado y adaptado al cuestionamiento del alumno para encaminar y guiar la nueva problemática hacia el desarrollo de nuevas estrategias y la reorganización de ideas y conocimientos.
- La formación de pequeños grupos frente al computador favorece la creación de un ambiente propicio para el aprendizaje significativo, que contempla los ritmos de cada

alumno favoreciendo la realización de las tareas propuestas y creando actitudes de compromiso por el logro de los objetivos.

Bibliografía

Anido, M; Có, P.; del Sastre, M.; Medina, L.; Panella, E.(2000).Una Ingeniería didáctica diseñada alrededor del concepto de cónicas y Superficies. *Publicación del IX EMCI, Encuentro de docentes de Matemática en carreras de Ingeniería*. Concepción del Uruguay. Argentina.

Anido, M.& Rubio Scola, H. (1999). Un Ejemplo de Aprendizaje en el Sentido de Polya. *Relime. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa ,3,* México.

Anido, M.& Simoniello, A.M. (1997). El Taller de docentes como estrategia de abordaje de un problema: la integración curricular del área Matemática de una Facultad de Ciencias Económicas. *Actas de la Undécima Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*, pp 332-336. México.

Artigue, M.; Douday, R.; Moreno, I.; Gómez, P. (1995). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática,* pp34-56. México. Grupo Editorial Iberoamérica.

Brousseau,G. (1988). *Los diferentes roles del maestro*. U.Q.A.M. Buenos Aires. Argentina.

Chevallard, Y.; Bosch M.; Gascón, J. (1997). Estudiar Matemática. ICE-Horsori, pp213-225; 277-290.

Jonassen, D.H. (1995). Computers as in Cognitive Tools: Learning with Tecnology. Not from Technology. *Journal of Computing in Hhiger Education, 6 (2),* pp 40-73.

Polya, G. (1981) Matemática y Razonamiento Plausible. Ed. Tecnos: Madrid.

UTILIZANDO ESTUDIOS CARDIOLÓGICOS PARA RESOLVER PROBLEMAS EN LA CLASE DE MATEMÁTICA

Liliana Homilka y María del Carmen Pérez
Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González"
homilkali@fhotmail.com; maria_del_carmen_perez@hotmail.com

Resumen

Este trabajo propone compartir y discutir detalles referidos a situaciones de enseñanza-aprendizaje de algunos conceptos matemáticos que se abordan en la escuela media. La experiencia fue puesta en práctica con alumnos de nivel medio y constituyó un medio eficaz para la motivación, ya que los alumnos optaron por un desarrollo activo, demostrando gran interés al realizar las actividades, dado que trabajaron con situaciones reales, buscando respuestas en la matemática a problemas concretos de otras ciencias.

Introducción

Este trabajo propone compartir y discutir detalles referidos a situaciones de enseñanza-aprendizaje de algunos conceptos matemáticos que se abordan en la escuela media. Considerando al aprendizaje como proceso de crecimiento, la matemática en la escuela debe proveer de los elementos necesarios para que los alumnos desarrollen sus potencialidades y su capacidad para pensar crítica e independientemente. El aula es el ambiente indicado para estudiar problemas del mundo real a través de la modelización matemática (Ministerio de Cultura y Educación, 1997), este trabajo parte de una situación problemática (Ausubel, 1972) cuyo objeto es otorgar significatividad al concepto abstracto.
Tiene como objetivo enriquecer y mejorar nuestra práctica como profesores de matemática frente a la necesidad de trabajar la interdisciplinariedad y la resolución de problemas como recursos metodológicos fundamentales para la formación de habilidades, destrezas y conocimientos.
Continuando con la investigación presentada en RELME 16 (Homilka y Pérez, 2002) éste trabajo acerca de la determinación de las afecciones cardíacas a partir del estudio de electrocardiogramas, angiografías y tomografías computadas permite presentar problemas socialmente significativos desde la geometría para la resignificación y construcción de los saberes que se propone la matemática escolar. Todo diseño de actividades se debe adaptar a las necesidades de docentes y alumnos con el fin de mejorar el conocimiento de los contenidos, la comprensión y el rendimiento en matemática de todos los estudiantes a largo plazo. Pero, como los currículos educativos son muy abarcativos, una forma de construir conocimientos socialmente significativos es trabajar la interdisciplinariedad lo que conlleva a fomentar el interés por esta ciencia, a proponer problemas interesantes para la resignificación y construcción de los conocimientos matemáticos escolares. Por lo tanto, la resolución de problemas concretos se plantea como un recurso metodológico fundamental para la formación de habilidades, destrezas y conocimientos.
En el proceso de enseñar a resolver problemas y analizar los procedimientos de resolución se debe tener en cuenta los aportes de Schoenfeld, *para la resolución es necesario disponer de recursos, los que incluyen conocimientos y habilidades sobre los objetos matemáticos que se relacionan con los problemas y los metacognitivos los que se relacionan con la resolución de problemas. (Schoenfeld, A.)*

Desarrollo

Con el objetivo de enriquecer y mejorar nuestra práctica como profesores de matemática y frente a la necesidad de trabajar la interdisciplinariedad entendiéndola por un lado como proceso significativo de enriquecimiento del currículum y de aprendizaje de sus actores que se alcanza como resultado de reconocer y desarrollar los nexos existentes entre la matemática y las diferentes disciplinas científicas, y por otro como vía que moviliza y motiva a trabajar tanto a profesores como a los alumnos y como proceso para fundamentar y responder de manera efectiva a los requerimientos de los problemas que se pretende resolver, en este caso ¿nuestro corazón está enfermo?

Durante RELME 16 se presentó el resultado de una investigación en la que se plantearon problemas del mundo real para que el alumno adquiera la habilidad de examinar, predecir, comprobar, generalizar y resolverlos por medio de la construcción de modelos lo que permitió relacionar las ideas geométricas con las ideas del álgebra y del análisis (Homilka y Pérez, 2002a y 2002b). Como el resultado fue satisfactorio, este año se continuó con la investigación sobre la determinación de las afecciones cardíacas a partir del estudio de electrocardiogramas, angiografías y tomografías computadas.

Lo antes mencionado fundamenta la propuesta didáctica diseñada para:

- Reflejar la utilidad de los contenidos y herramientas matemáticas
- Evaluar los conocimientos o habilidades del alumno
- Ayudar al alumno a mejorar sus ideas previas
- Desarrollar y usar ideas científicas
- Animar al alumno a que exprese, clarifique, justifique sus ideas y reflexione sobre lo que ha aprendido
- Evaluar el proceso de enseñanza aprendizaje
- Crear el ambiente propicio para utilizar la tecnología disponible y promover la curiosidad, la creatividad, etc.

Se comenzó en esta oportunidad presentando una situación problemática extraída de la vida real que tiene repercusión directa en el accionar diario de las personas, mostrando que para su análisis y solución se requiere de la matemática, valorando así el carácter que la misma tiene como herramienta de apoyo a otras ciencias. Dicha situación consistió en que cada alumno debía traer el electrocardiograma que presentó para poder realizar las distintas actividades físicas programadas en el Establecimiento Educativo.

Cómo se sabe el electrocardiograma (E.C.G.), basado en el análisis de las fuerzas eléctricas generadas por el corazón durante su actividad fisiológica, permite conocer algunas patologías cardíacas. Partiendo de él se propusieron las siguientes actividades:

<u>Actividad Nº 1</u>:

a) Observe la tira de papel que corresponde al resultado del estudio solicitado y describa lo que observa.
b) Construya el triángulo de Eintehoven.
c) El potencial cero o centro de gravedad eléctrico del corazón se halla en el ortocentro del triángulo, márquelo.

<u>Actividad Nº 2:</u> Cada uno de los lados del Triángulo de Eintehoven se denominan derivaciones y se corresponden con los tres primeros sectores del electrocardiograma. En

cada uno de ellos se observan las ondas PQRST. Nos proponemos analizar la onda T, para ello:

a) Determine la amplitud de la misma.
b) Dibuje sendos vectores cuyo punto de aplicación se encuentra en el punto medio de cada lado del triángulo y cuyo sentido es el indicado por la convención.
c) Halle el vector suma con origen en el punto O realizando previamente las traslaciones que considere convenientes
d) Determine su módulo y calcule el ángulo que forma con el semieje positivo de las x.
e) Compárelo con el de su compañero. Elabore sus conclusiones
f) Compárelo con el de algún conocido que presente alguna patología cardíaca Elabore sus conclusiones.
g) ¿La gráfica del ECG es la gráfica de una función periódica? Justifique.

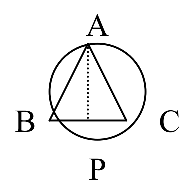
<u>Actividad 3:</u>
Construcción del sistema unipolar precordial:

a) Grafique la función $G(x) = |x|$ y su opuesta en un mismo sistema cartesiano.
b) Realice el procedimiento anterior para el análisis de la onda T pero con el sector del E.C.G. que se corresponde con las derivaciones precordiales
c) Comparar los gráficos normales utilizando los tres ejes espaciales (frontal, transversal y sagital)

Del mismo modo que el electrocardiograma (E.C.G.) permite conocer algunas patologías cardíacas se utilizan también las tomografías computadas. Partiendo de una de ellas se propusieron las siguientes actividades:

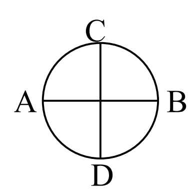
<u>Actividad Nº 1</u>:
Teniendo en cuenta que la órbita que describe el desplazamiento de la cámara que se utiliza para obtener las imágenes tomo gráficas es circular resuelve lo siguiente:

- El triángulo ABC está inscripto en la circunferencia, donde AB= 1m, AC= 80 cm y la altura AP es de 50 cm. ¿Cuál es el radio de la órbita?

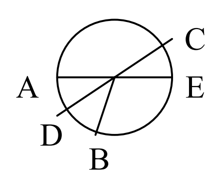


C

- Cuando la cámara se encuentra en el punto C, determina con los puntos E y F un ángulo de 30 grados. En la figura AB y CD son diámetros perpendiculares. Cuál es el valor de AE/FE?

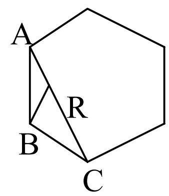


- En la circunferencia dada COE : EOB =1:4 AOB = 60º, CD es bisectriz del mismo. Determina el valor del ángulo EOB



Actividad Nº 2

Durante la realización de una Tomografía Computada se observó en el monitor de la computadora la siguiente figura.



AR = BR = 4
RC = 8

Con los datos de la misma se calcula el engrosamiento de la pared ventricular. Como el médico no sabe matemática te contrató para hallarlo. Qué le dirías? Justifica tu respuesta y compárala con la de tus compañeros.

En el desarrollo de la misma los alumnos, utilizando diferentes estrategias de resolución en la que aplicaron los conceptos de proporcionalidad, semejanza de figuras, trigonometría, números irracionales, Teorema de Pitágoras, cálculo de áreas y figuras inscriptas en una circunferencia, arriban a la misma solución, cosa que permitió la reflexión acerca de la diferencia entre un ejercicio y un problema, además de valorar la utilización de diferentes objetos matemáticos para la resolución de una misma situación problemática.

Conclusión

La secuencia de actividades presentada en este trabajo, permite estudiar un problema significativo con el objeto de construir y aplicar conceptos matemáticos curriculares en forma no tradicional, constituyéndose en un medio eficaz para la motivación ya que los alumnos optaron por un desarrollo activo.

Permitió en la investigación llevada a cabo, analizar la diferencia entre responder a una situación determinada desde la matemática y desde otra ciencia, reforzando el sentido crítico y realista y valorando la herramienta matemática como apoyo en este caso a la medicina.

Por otra parte, cabe destacar que fue posible abordar durante la experiencia múltiples conceptos matemáticos, permitiendo al alumno comprender la interrelación existente entre contenidos de los que por lo general posee una visión y tratamiento aislado. El abordaje de la situación presentada, al transformarse en un proyecto interdisciplinario, en el cual los docentes de las distintas áreas colaboraron, dio a los alumnos la posibilidad de comprobar cómo especialistas de formaciones diversas aúnan sus esfuerzos en la investigación para hallar soluciones a situaciones problemáticas reales.

Referencias bibliográficas:

Ausubel, D. (1972). *Psicología Evolutiva: un punto de vista cognitivo*. México: Trillas.

Alsina, C. y otros (1996). *Enseñar matemática*. Barcelona, España: Grao.

Homilka, Liliana. Pérez, María del Carmen (2002). *El proceso de modelización en el aula: buscando un modelo geométrico para el corazón.* RELME 16, La Habana, Cuba.

Homilka, Liliana. Pérez, María del Carmen (2002). *Geometrizando el corazón humano* (Nivel Superior) . XXV Reunión de Educación Metemática (U.M.A) Santa Fe. Argentina

Ministerio de Cultura y Educación. (1997). *Contenidos Básicos Comunes para la Educación Polimodal*. Buenos Aires.

Parisi, M. (1998). *Temas de Biofísica.* Buenos Aires, Dos Santos.

Pichel, H.; Patritti, J.; de la Fuente, L. (1988). *Análisis de patologías cardíacas.* Buenos Aires: Fundación

ENTORNO SOCIOCULTURAL Y CULTURA MATEMÁTICA EN PROFESORES DEL NIVEL SUPERIOR DE EDUCACIÓN. UN ESTUDIO DE CASO: EL INSTITUTO TECNOLÓGICO DE OAXACA

Luz María Minguer Allec.
Instituto Tecnológico de Oaxaca, México.
lminguer@ipn.mx; luzma16@hotmail.com

Resumen

A partir de la determinación de los elementos que conforman un bagaje único de conocimientos (matemáticos y didácticos) con los que cada profesor de cálculo del nivel superior, enfrenta su quehacer docente, identificamos que tanto los conocimientos matemáticos como los conocimientos didácticos de los profesores están influenciados por las creencias y conductas de un entorno socio-cultural que abarca a la familia, la escuela y el medio social en el que se desarrollaron estos. Estas creencias y conductas influyen profundamente en las formas de concebir a la enseñanza y el aprendizaje de los conocimientos matemáticos, y van ejerciendo su acción a través de la educación familiar, la educación escolar y el efecto educativo del medio social. Dichas influencias van conformando un sentido o significado de conjunto que prevalecerá y permanecerá a través del tiempo en el "ambiente social". Este es un fenómeno socio-cultural que afecta a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y que juega un papel importante en la definición de altos índices de reprobación y de deserción en esta materia

La presente investigación tiene como objetivo general: Identificar las influencias socioculturales en la conformación de la Cultura Matemática de los profesores de cálculo del Instituto Tecnológico de Oaxaca. Y como pregunta de Investigación: ¿Cómo afectan las influencias socio-culturales (creencias y actitudes con respecto a la matemática en general y a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en particular) en el desarrollo escolar (aprendizaje) y profesional (enseñanza) de los profesores de cálculo del ITO?. El Método a seguir: Elaboración de la historia de vida de profesores de cálculo del ITO.

Antecedentes

Como profesora de matemáticas del Instituto Tecnológico de Oaxaca, conocedora de una parte del numeroso grupo de instituciones de educación superior en el País (Sistema Nacional de Institutos Tecnológicos del País), me propongo realizar una investigación que aporte información para identificar un fenómeno sociocultural cuyas implicaciones en el terreno educativo, son importantes: a este fenómeno lo nombro "la cultura matemática".

Esta investigación parte de un interés central en la formación docente y profesional de profesores de matemáticas del nivel superior de educación. Se reconoce que en este nivel de educación los profesores son profesionales que dominan distintas áreas del conocimiento leyes, administración de empresas, administración pública, contadores, ingenieros arquitectos, médicos, biólogos, etc. pero que no poseen conocimientos sistematizados para abordar el fenómeno de la enseñanza y del aprendizaje de los conocimientos profesionales que les son propios. Surge entonces la inquietud por analizar un poco más de cerca el caso concreto de los profesores de matemáticas de este nivel, ya que a diferencia de lo que ocurre con otras materias de estudio, las matemáticas, su enseñanza y su aprendizaje constituyen temas que generan consenso en la sociedad. Estos profesores son profesionales cuya formación académica consta, entre el conjunto de materias que conforman su plan de estudio, de 4 o 5 cursos de matemáticas (cálculo diferencial e integral, álgebra lineal, métodos numéricos, etc) Por otro lado su experiencia docente se compone de los diversos estilos "de enseñar matemáticas" de sus propios profesores y de las enseñanzas aportadas por los diferentes cursos o programas de formación docente en el que el profesor haya incursionado, es importante señalar que dichos cursos generalmente se encuentran enmarcados en la didáctica tradicional.

En este panorama surge el deseo de cuantificar el bagaje matemático y el bagaje didáctico de los profesores de cálculo del nivel superior, con el objeto de identificar los elementos que conforman un bagaje único con el que cada profesor enfrenta su quehacer docente, al cual le llama "la cultura matemática de un profesor". Estudiando con más detenimiento las características de los elementos que constituyen este bagaje, identificamos que tanto los conocimientos matemáticos como los conocimientos didácticos de los profesores están influenciados por las creencias y conductas de un entorno socio-cultural que abarca a la familia, la escuela y el medio social en el que se desarrollaron estos docentes. Se puede decir entonces que por un lado existen influencias socio-culturales que definen las políticas educativas del país (currículas, planes y programas de estudio, métodos y estrategias didácticas para su enseñanza) que se expresan en documentos oficiales que se hacen llegar a las instituciones escolares para su ejecución; y por otro lado se identifican influencias socio-culturales que actúan en el medio escolar modificando el discurso escolar y las actitudes esperadas (en los contenidos, en los profesores, en los alumnos) a través de la influencia de creencias y actitudes arraigadas en la cultura de nuestro País.
Entiendo pues, por "cultura matemática" aquella que está compuesta por un conjunto de conceptos que definen percepciones, adquiridos a lo largo del tiempo (conocimientos, creencias y conductas), que se han mantenido vigentes, dando origen a la conformación de un consenso entre los miembros de una comunidad social que está compuesta por todos aquellos individuos que han tenido contacto de manera directa o indirecta con ambientes escolares. Este mismo grupo se ha encargado de propagar estas creencias y conductas con respecto a las matemáticas en general y a la enseñanza y el aprendizaje de esta materia en particular. Las creencias y conductas influyen profundamente en las formas de concebir a la enseñanza y el aprendizaje de los conocimientos matemáticos, y van ejerciendo su acción a través de la educación familiar, la educación escolar y el efecto educativo del medio social. Dichas influencias van conformando un sentido o significado de conjunto que prevalecerá y permanecerá a través del tiempo en el "ambiente social".

Problema

Existe un fenómeno socio-cultural que afecta a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y que juega un papel importante en la definición de altos índices de reprobación y de deserción en esta materia. Tanto los conocimientos matemáticos como los conocimientos didácticos de los profesores están influenciados por las creencias y conductas de un entorno socio-cultural que abarca a la familia, la escuela y el medio social en el que se desarrollaron estos docentes.

Objetivo

Identificar las influencias socioculturales en la conformación de la cultura matemática de los profesores de cálculo del Instituto Tecnológico de Oaxaca.

Pregunta de investigación

¿Cómo afectan las influencias socio-culturales (creencias y actitudes con respecto a la matemática en general y a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en particular) en el desarrollo escolar (aprendizaje) y profesional (enseñanza) de los profesores de cálculo del ITO?

Marco conceptual de referencia

a) La antropología cultural. Nos interesa abordar este estudio en el marco de la antropología cultural porque esta disciplina busca describir pero también comprender los fenómenos culturales en sus relaciones con los comportamientos colectivos e individuales (J. Stoetzel); ella plantea que la cultura es el fundamento de las estructuras sociales y que toda institución se traduce en último análisis por un sistema de comportamientos impuestos a los individuos y que es necesario compartir, aprender y transmitir. Esta disciplina tiene la ambición de abarcar la cultura en su totalidad por lo que su enfoque es esencialmente multidisciplinario y su relación con la educación es muy estrecha, ya que por un lado la educación misma constituye un aspecto que es fundamental en la cultura de los grupos sociales y por otro es el medio a través del cual esta cultura se transmite.

El campo de la Antropología Cultural se aboca al estudio de la conducta humana que es aprendida, en contraposición con la conducta que es transmitida genéticamente, a esta variedad de formas aprendidas y compartidas de la conducta humana se le llama Cultura. A través de la cultura los seres humanos se adaptan a sus ambientes; la antropología cultural pretende estudiar los orígenes de la cultura, su desarrollo, la diversidad y sus cambios a través del tiempo en las sociedades, Se puede decir que la meta de la Antropología Cultural es entender como funciona el cambio cultural para poder predecir y tal vez dirigir o controlar el cambio de manera productiva. La cultura es un concepto multívoco que reúne una gran variedad de características y de usos, de ella se han inventariado múltiples definiciones, pero de manera tradicional siempre se ha considerado a la cultura como todo lo que en el hombre es distinto de la "naturaleza"; se entiende entonces que es todo aquello que el hombre crea y construye, Herskovitz la define como: "la cultura es la parte del medio ambiente fabricado por el hombre". La antropología cultural concibe a la cultura como "el conjunto más o menos ligado de significaciones adquiridas, las más persistentes y las más compartidas, que los miembros de un grupo, por su afiliación a este grupo deben propagar de manera preponderante sobre los estímulos provenientes de su medio ambiente y de ellos mismos, induciendo con respecto a estos estímulos actitudes, representaciones y comportamientos comunes valorizados, para poder asegurar su reproducción por medios no genéticos". (Camilleri, C. 1980)

La cultura posee un significado más antiguo que el significado antropológico y este es el de la cultura como atributo del hombre "cultivado". Muy frecuentemente se confunde el significado de la "cultura antropológica" y el de la cultura como atributo del hombre cultivado, este último significado es muy antiguo y se refiere al dominio, por el hombre, de los saberes que le abren la posibilidad de avanzar en el conocimiento de todos los aspectos de lo real, así como del dominio de los métodos y herramientas del pensamiento que le permiten profundizar una ciencia. El individuo accede a un conjunto de conocimientos y valores privilegiados por los miembros del grupo a través de un sistema de aprendizaje particular (institución escolar u otros) que le otorga el poder de enriquecerlo a su vez. A este tipo de cultura desde el punto de vista antropológico se le conoce como una especialización de la cultura cuya característica especial radica en que ésta es percibida como elemento de promoción social.

La cultura matemática. La cultura matemática puede ser vista como una especialización cultural ya que se está hablando de patrones culturales que son compartidos solamente por personas que pertenecen a cierta posición o estatus social. Los patrones culturales son

formas aprendidas y compartidas de conducta típica de un grupo humano en particular. Si recordamos la definición de cultura que dice que ésta es"el conjunto más o menos ligado de significaciones adquiridas, las más persistentes y las más compartidas, que los miembros de un grupo, por su afiliación a este grupo, deben propagar de manera prevalente sobre los estímulos provenientes de su medio ambiente y de ellos mismos, induciendo con respecto a estos estímulos, actitudes, representaciones y comportamientos comunes valorizados para poder asegurar su reproducción por medios no genéticos. (Camilleri, C. 1985).
Podemos pensar que en la sociedad existe una especialización de la cultura que podemos denominar "cultura matemática" la que está compuesta por un conjunto de significaciones adquiridas a lo largo del tiempo (creencias y conductas), que han prevalecido por sobre otras y se han mantenido, generando al paso del tiempo, consenso entre los miembros de una comunidad social que está compuesta por todos aquellos individuos que han tenido contacto de manera indirecta o directa con ambientes escolares. Este mismo grupo se ha encargado de propagar estas creencias y conductas con respecto a las matemáticas en general y a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en particular. Lo mismo se puede decir con respecto a los contenidos matemáticos escolares, ya que estos conocimientos son "cultura" que ha sido pasada de generación en generación a través de un grupo social que lo traspasa de manera organizada (sistema educativo) o de manera informal (herramienta). El conjunto de influencias que intervienen (o dan forma) en la cultura matemática está compuesto de: creencias, conductas y conocimientos matemáticos, que se van formando a través de la educación familiar, la educación escolar y el efecto educativo del medio social. Estas influencias van conformando un sentido o significado de conjunto que prevalecerá y permanecerá a través de tiempo en el "ambiente social".

b) Estudio analítico de la "aproximación socio – epistemológica". A través del análisis de las investigaciones que se realizan en el marco de este concepto, para llegar a construir una definición que englobe todos los acercamientos posibles y de esta manera llegar a constituir un marco que de explicación al tema de la cultura matemática de los profesores de cálculo.

c) Sociología de la educación. Las creencias cumplen una función importante en la vida del hombre, motivo por el cual él no puede dejar de tenerlas. Las creencias son personales y sociales. Son personales ya que cada uno de nosotros tiene creencias que se han ido formando y van variando a lo largo de la vida; y son sociales porque los grupos pequeños o grandes al compartir esas creencias individuales generan consenso entre los miembros del mismo y ambos, individuo y grupo social se retroalimentan. Los medios de comunicación influyen en la difusión de las creencias de un grupo social. Las creencias de un grupo tienen historia y dinámica y constituyen un elemento importante de la cultura. Los individuos de un grupo social desarrollan una variedad de creencias, algunas de ellas se desprenden de las experiencias personales, otras de la educación, y otras del adoctrinamiento. Un gran número de creencias son innatas (nacemos con ellas como resultado de factores de la evolución). "Creencia es la actitud de quien reconoce algo por verdadero, pudiéndose constatar o no la evidencia de ello" (Quintana Cabañas, 2001). "Pueden llamarse creencias las convicciones científicas y la fe religiosa, el reconocimiento de un principio evidente o de una demostración, como también la aceptación de un prejuicio o de una superstición" (N. Abbagnano, 1963: 260) Según Kant existen tres grados de creencias: la opinión, la fe y

la ciencia.
Diferencia entre creencias, actitudes, valores, y convicciones.
Las creencias se tienen y se viven; no se demuestran
Las alienaciones y los peligros de las creencias.
Conformación de la cultura a través de acciones: la práctica se institucionaliza: el contexto de la acción educativa

Método
Elaboración de la historia de vida de 10 profesores, con el objeto de identificar en ellas, las influencias socio-culturales a lo largo de la vida familiar, escolar y profesional de estos profesores.
Diseño del guión para las entrevistas.
Audio - grabación de las entrevistas.
Transcripción de las entrevistas.
Análisis de las entrevistas.

La investigación se encuentra en curso por lo que no se cuenta con conclusiones.

Bibliografía
Cantoral, R. (2001) *Un estudio de la formación social de la analiticidad.* Grupo Editorial Iberoamérica. México.
Farfán, R. & Ferrari, M. (2001) *Una visión Socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo*. Serie Antologías. N° 1, 249-291. Programa Editorial. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Red de CIMATES.
Cantoral, R. (2001). *La Socioepistemología: Una mirada contemporánea del quehacer en Matemática Educativa*. Serie Antologías. N° 1, 331-333 Programa Editorial. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Red de CIMATES.
Cantoral, R (1998). *La aproximación Socioepistemológica a la investigación en Matemática Educativa: El caso del pensamiento y lenguaje variacional*. En Acta Latinoamericana de Matemática Educativa RELME-12, 12(1)Santafé de Bogotá, Colombia México: Grupo Editorial Iberoamérica.
Francisco Cordero Osorio (2001) *Incidencia de la Socioepistemología en la Red de Investigadores en Matemática Educativa. Una experiencia*. Serie Antologías. N° 1, 99-124. Programa Editorial. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Red de CIMATES.
Nanda, S.(1987) *Antropología Cultural*. Grupo Editorial Iberoamérica. México.
Camilleri, C. (1985) *Antropología cultural y educación*. UNESCO. Presses Centrales, Lausana. Suiza.
Sacristán, G. (1998. *Poderes inestables en educación*. Ediciones Morata S.L. Madrid. España.
Enguita, M. (1999). *Sociología de la educación*. Editorial Ariel, S. A. Barcelona.
Bonal X. (1998) *Sociología de la educación*. Una aproximación crítica a las corrientes Contemporáneas. Ediciones Paidos Ibérica, S.A. Barcelona.
Liston, D.&Zeichner, K (1997). *Formación del profesorado y condiciones sociales de la escolarización*. Ediciones Morata S.L. Madrid.

GEOMETRIA ARTE Y TECNOLOGIA

Lilian Vargas
Liceo B-67 Huépil Octava Región Chile
lilivv@starmedia.com

Resumen

¿Aprender a aprender? ¿Trabajo en equipo? ¿Ritmos distintos de aprendizajes? ¿Aprendizajes significativos? ¿Uso de tecnología? Estas y tantas otras interrogantes comenzaron a inquietar nuestra labor docente, comenzamos a preguntarnos como enfrentar el futuro con alumnos distintos a los que ya no motivan nuestra forma de enseñanza donde ellos tienen un rol pasivo y los primeros actores somos los profesores. Aparece en los docentes la **incertidumbre** ¿Cómo la manejamos? ¿Qué hacemos? ¿Cómo enfrentamos los cambios tecnológicos? La Reforma nos entregó algunas herramientas como los PPF (Programas de Perfeccionamiento fundamental[2]), los GPT(Grupos Profesionales de Trabajo) al interior de las Unidades Educativas. Reflexionamos sobre nuestras prácticas pedagógicas, nos familiarizamos con el uso de la tecnología, la llevamos a la sala de clases, asumimos un rol distinto, damos mayor importancia al trabajo en equipo, relacionamos los aprendizajes con el medio natural y cultural. Cambia la infraestructura de nuestros Liceos y Colegios, se implementan laboratorios de computación, profesores asisten a pasantías en extranjero conociendo nuevas alternativas de enseñanza aplicando tecnologías, se establecen redes de profesores y el grado de incertidumbre disminuye, comienza para nosotros una nueva era como formadores preocupados de desarrollar en nuestros alumnos aspectos cognitivos, habilidades y valores. En la búsqueda de estrategias metodológicas he implementado a mis prácticas pedagógicas el uso de material didáctico construido en clases, el uso de la calculadora y programas como CABRI II para la enseñanza de la Geometría. Las fotos muestran el material construido en cartulinas para el posterior estudio de ellas.

Los resultados de este cambio se apreciaron a través de la respuesta y la motivación que muestran los alumnos por aprender.

Experiencias de Aula en las que confluyen geometría, arte y tecnología

La Reforma Educacional que se está llevando a cabo en mi país ha llevado al docente a reflexionar y buscar nuevas formas de enfrentar las prácticas Pedagógicas utilizando nuevos recursos como el uso de la tecnología, el uso de material didáctico, la aplicación de programas de Álgebra y Geometría. En este marco presento experiencias realizadas en el aula que han logrado reencantar a los alumnos en el estudio de las matemáticas motivándolos en la investigación y en la comprensión del medio natural. El uso de la calculadora y del programa de geometría CABRI II han sido apoyos fundamentales en esta

[2] Programa Ministerial de Actualización y apropiación por parte de los docentes de los nuevos planes y programas en el marco de la reforma educativa Chilena.

experiencia. Con la aplicación de ellas en clases hay un cambio radical, los alumnos observan en la sala figuras geométricas que pueden manipular y analizar como ellos estimen conveniente. La construcción de material de apoyo como cuerpos geométricos diseñados utilizando CABRI los lleva a internalizar las propiedades de los polígonos que forman estos cuerpos, observando de manera más crítica y desarrollando su creatividad. Presentare tres experiencias: Abejas geométricas; Confección de maquetas geométricas y Representación de cuerpos con superficies curvas. Con la aplicación de ellas en clases hay un cambio radical, los alumnos cuentan en la sala con figuras geométricas que se pueden manipular y analizar como ellos estimen conveniente. La construcción de material de apoyo como cuerpos geométricos diseñados utilizando CABRI los lleva a internalizar las propiedades de los polígonos que forman estos cuerpos y los invita a observar de manera más crítica, permite también desarrollar la creatividad. Las desarrollé en un Liceo cuya población es rural y donde las metas de los alumnos son prepararse para el mundo del trabajo o continuar estudios en Institutos de Formación Técnica además de visualizar algunos continuar estudios en la Universidad.

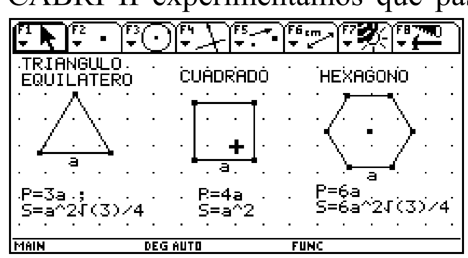
Experiencia 1

La zona donde se ubica el Liceo en el cual trabajo es en parte productora de miel, la gran mayoría de los alumnos conoce la forma y disposición de las celdas que las abejas utilizan en la construcción de sus panales. Teniendo en cuenta esto como uno de los conocimientos previos comenzamos a construir sobre esta base Aprendizajes sobre Transformaciones Isométricas.

La fabricación del pastel de cera. Un trabajo en cadena

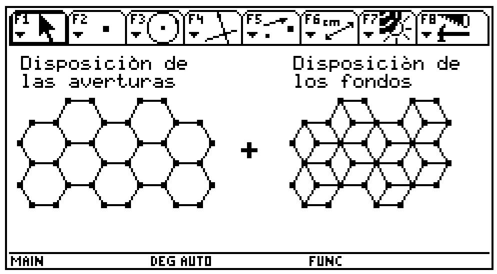
Las "pequeñas albañiles" se unen las unas a las otras de manera de formar varias cadenas colgantes, pues ellas se pasan de pata en pata las pequeñas bolitas de cera, amasada y traslúcida, que sirven para construir las paredes de cada sección del panal. Las abejas depositan su miel en las alvéolas de forma geométrica regular, sus secciones representan una teselación del plano superficial del pastel de cera con polígonos regulares. Estos polígonos son siempre hexágonos. Desde mucho tiempo los hombres han buscado el por qué de ésta forma tan particular. He aquí la respuesta más comúnmente aceptada.

- Verificar (por ejemplo realizando ensayo de construcción) que estos insectos no tienen más elección que tres tipos de polígonos regulares para completar el plano: El triángulo equilátero, el cuadrado y el hexágono regular.
  Nuestras queridas amigas hyménopteras tienen mucho interés por un volumen que les lleve a reducir sus esfuerzos de construcción al mínimo.
- Primero con ayuda de la calculadora TI 92 o CABRI II experimentamos que pasa cuando tratamos de cubrir el plano con polígonos distintos de los nombrados anteriormente, para luego concluir que el triángulo equilátero, el cuadrado y el hexágono son los polígonos que al trasladarlos o rotarlos cubren completamente el plano sin dejar superficies libres.



- Luego nos encontramos con un problema de optimización, nuestras abejas tienen mucho interés por un volumen que les lleve a reducir sus esfuerzos de construcción al mínimo. El problema es entonces el siguiente: Teniendo una sección de área S, cual forma elegir entre las tres posibilidades encontradas para obtener el más pequeño perímetro. Con apoyo de la TI podemos demostrar rápidamente que el Hexágono es el indicado.

Forma y disposición.
Al examinar un panal de cera construido por las abejas para depositar la miel, constatamos que está constituida por dos alvéolas yuxtapuesta por el eje horizontal y la abertura con la forma de un hexágono regular. Existen dos series de celdas de cera que se juntan por los fondos.

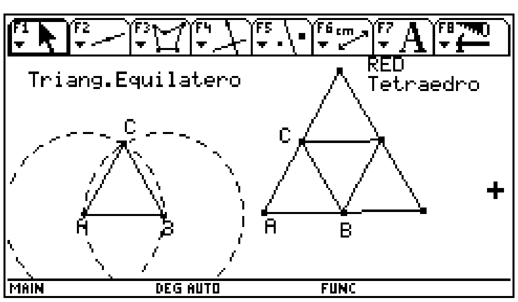


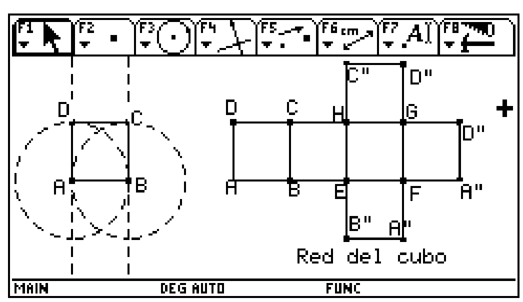
Experiencia 2
Para estudiar las propiedades de las figuras plana y de los cuerpos geométricos la practica de las construcciones geométricas y la manipulación de cuerpos geométricos por parte de los alumnos adquiere especial relevancia y les permite desarrollar otras habilidades como la observación más crítica despertando la curiosidad de investigar más allá de lo que hacemos en la clase. Con ayuda de CABRI II y la TI 92 diseñamos redes para construir los sólidos Platónicos y luego analizamos que ocurren con estos cuando realizamos intersecciónes con algunos planos. Diseñamos también otros cuerpos como intersección de un cubo con un octaedro, cuerpos estrellados, celdas de las abejas etc.

Para construir las redes de los sólidos Platónicos necesitamos saber construir un triángulo equilátero, un cuadrado y un pentágono.

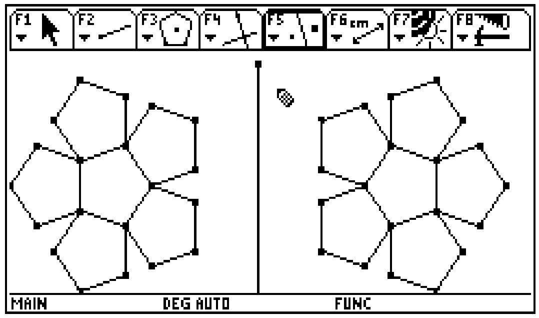
Construcción del Triángulo equilátero
Y red del tetraedro regular

Construcción del cuadrado
y red del cubo



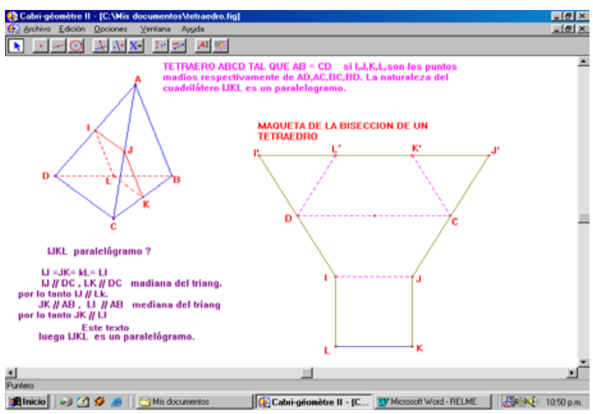


* Para construir un Pentágono lo podemos hacer a partir de la división de un segmento aúreo y luego obtenemos la red del dodecaedro regular

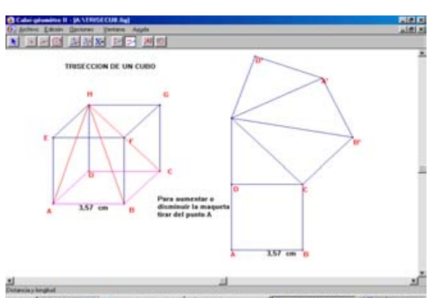


Experiencia 3

Una vez construido el tetraedro podemos estudiar que ocurre cuando lo intersectamos con un plano que pase pos sus medianas. Para estudiar esto podemos dibujar en perspectiva, CABRI nos permite manipular lo que hemos dibujado y observar que tipo de polígono que se forma. Podemos además dibujar la red de los nuevos cuerpos de modo que con la manipulación de ellos el alumno logre aprendizajes que sean más significativos. Esta división nos apoya en el estudio de volúmenes, en éste caso podemos demostrar que se forman dos nuevos cuerpos de igual volumen.

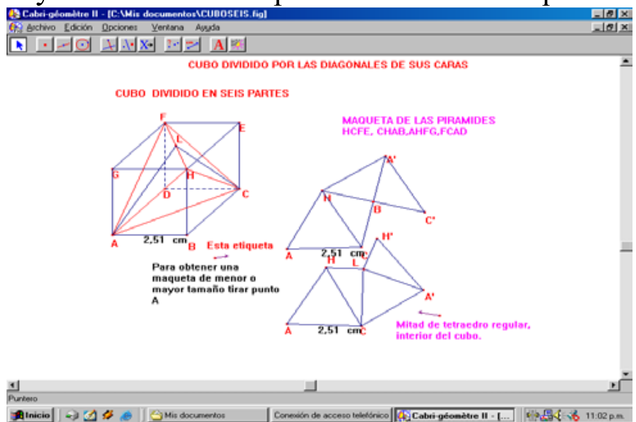


De la manera anterior podemos tomar un cubo y buscar la forma de trisectarlo



Podemos también trazar en cada cara una diagonal y descubrir que cuerpos se obtienen al interceptar según los planos determinados por las diagonales.

En este caso para un cubo cuya arista mide “a” podemos demostrar que :

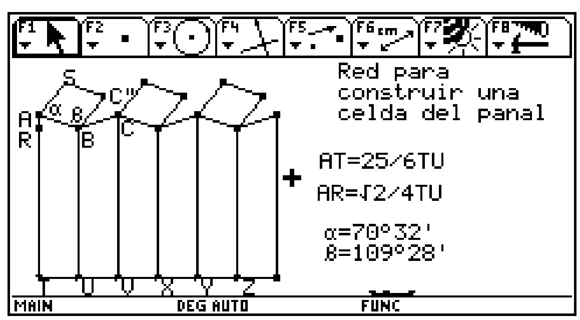


a) el volumen del tetraedro ACFH es 1/3 a ^{3}
b) El cuerpo ABCH es una pirámide recta.
c) El volumen del tetraedro ABCH es la sexta parte del volumen del cubo
d) La altura del tetraedro ACFH es 2/3 a $\sqrt{3}$

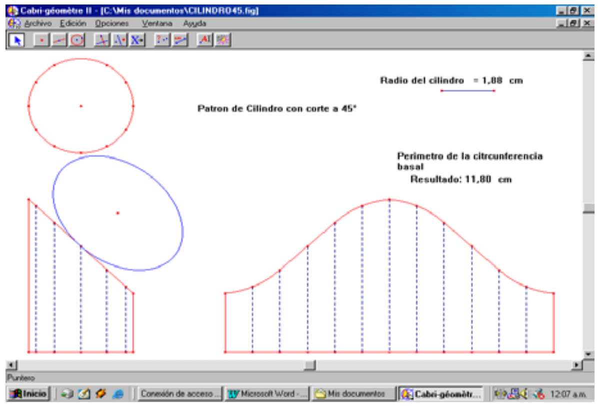
Este tipo de problema lo podemos resolver trabajando primero con medidas concretas como las obtenidas al medir las maquetas y luego podemos llegar a la generalización.

Construcción de la red para reproducir a escala las celdas que forman el panal.

Primero un poco de Historia respecto de las medidas de los ángulos que forman los rombos del fondo de las celdas. Cassini, Miraldi, Astrónomo del observatorio de París determina experimentalmente con presición los ángulos del rombo (1712). Koenig trata el problema con cálculo diferencial y prueba que los ángulos de las celdas mínimo miden entre 109°26’ y 70°34’ (1739). Mac Laurin prueba en (1743) que Koenig había cometido un error y sus cálculos resuelven el problema de forma idéntica a Miraldi, es decir 109°28’ y 70°32’. Basados en estos datos y con ayuda de CABRI esta construida la red que se presenta a continuación además utilizando trigonometría podemos llevar a los alumnos a demostrar la veracidad de estas medidas.

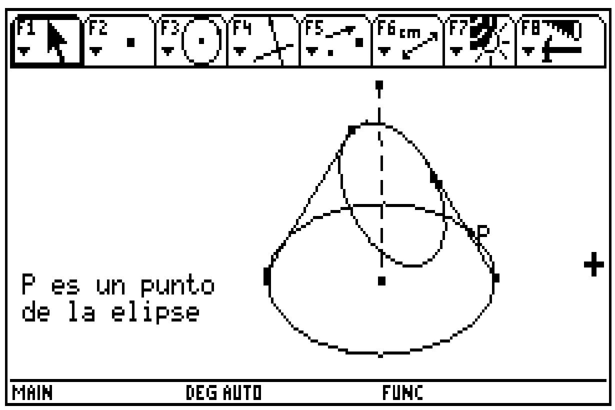


También utilizando CABRI podemos estudiar las cónicas y diseñar redes para construir cilindros, conos, conos truncados y cilindros con cortes que nos ayuden a visualizar el origen de una elipse, de una parábola etc. Para estudiar este tipo de cuerpos es muy importante que los dibujos que presentemos a nuestros alumnos sean muy bien hechos para que ellos puedan comprender lo que queremos que ellos vean, un dibujo mal hecho lleva a conclusiones erróneas. Para dibujar con CABRI un cuerpo de éste tipo lo hacemos en perspectiva.



Red para construir un cilindro con corte a 45°

Representación de un cono truncado



Bibliografía

Arriero, C. (2000) *Descubrir la Geometría del entorno*. Narcea,S.A.ediciones, Madrid.
Audebert, G. (1990). *La Perspective Cavaliére*, Publicación de I'A.P.M.E.P., Lyon.
Carral, M. (1995). *Géométrie.* Ed. Ellipses. Paris.

LA COMUNICACIÓN DE LOS SABERES MATEMÁTICOS

Alicia Gil, Amalia Kaczuriwsky
Universidad Tecnológica Nacional Facultad Regional Mendoza. U. N. de Cuyo
lauma@nysnet.com.ar; alivagil@hotmail.com

Resumen
El aprendizaje de la Matemática constituye un campo de estudio importante para el análisis de las actividades cognitivas que son puestas en juego con este fin. La necesidad de poder comunicar correctamente los saberes matemáticos requiere el uso de un lenguaje específico el que se adquiere a través de un proceso de comprensión posible justificar desde dos relaciones distintas: la diádica (significado/significante) y la triádica (objeto – representante – interpretante). La primera de ellas tiene su soporte en la noción de representación semiótica y cambios de registro; en tanto la segunda se apoya en la noción de signo. La relación diádica considera al lenguaje lógico formal como un registro, en tanto que la triádica postula la creación por parte de los alumnos de lenguajes formales cada vez más avanzados, hasta lograr la expresión más abstracta.
Es una problemática que le concierne a la Didáctica de la Matemática el buscar una solución que permita articular los distintos registros de representación para superar esos obstáculos y uniformizar criterios que permitan realizar con éxito la comunicación de los saberes de esta ciencia. El desafío está planteado.

El lenguaje matemático

Uno de los conflictos que surgen en la enseñanza de la Matemática tiene que ver con el lenguaje que la misma utiliza. Cada uno de nosotros usa para comunicarse con los demás, el lenguaje propio de su país; sin embargo, cuando nos iniciamos en la etapa escolar, nos vamos introduciendo en un lenguaje nuevo, caracterizado por sus connotaciones de exactitud y de rigor: el de la Matemática. Seguramente en nuestra labor como docentes nos ha pasado, al escribir:

$$\{a; e; i; o; u\} = \{x / x \text{ es vocal}\}$$

que nuestros alumnos no reconocieran la igualdad, ya sea porque en el primer conjunto hay cinco elementos y sólo reconocen uno en el segundo, o porque la **x** no es vocal y no la identifican como variable, la toman como un elemento que se cuenta, es decir, hay uno. Otro hecho bastante frecuente es, al preguntar a los alumnos, ¿cuántas **x** tengo en 3**x** más 5**x**?, que nos contesten: dos; o ¿qué nos da si a 6**x** le quitamos **x**? y nos respondan: seis...; o ¿cuál es la diferencia entre 5 y 2?, nos podrán responder que uno es par y el otro impar, que cinco es mayor que dos, y no siempre darán la respuesta que nosotros, como docentes, esperamos. Estos ejemplos simples, frecuentes, muestran el poco éxito de la comunicación en Matemática, muchas veces se trata de dos interlocutores hablando del mismo objeto, pero con ópticas distintas. No obstante, el lenguaje matemático se ha ido simplificando a través de los tiempos, tratando también de unificarse y poniendo de manifiesto la evolución que tuvo. No se trata, por lo tanto, de eliminar el lenguaje formal, sino de encontrar caminos didácticos que permitan poder pasar con fluidez del lenguaje natural al formal y viceversa. En la búsqueda de estos caminos, encontramos dos visiones: una diádica y otra triádica.

El lenguaje formal

El vocablo "abstraer" suele ser temido por quienes no saben reconocer las palabras que designan las formas. En este sentido, la enseñanza no contempla el aprendizaje de las formas. La única abstracción que llega a realizarse es en el álgebra y se suele enseñar de tal manera, que más de un alumno puede resolver y aprobar un examen que contenga complicadas técnicas algebraicas sin saber que el álgebra es, en algún sentido, la forma abstracta del cálculo aritmético.
Es el estudio de la lógica que, como ciencia formal, se interesa por la forma de ciertos conjuntos de signos, lo que permite hacer explícitas estas abstracciones, a pesar de que es justamente el uso de esos signos lo que constituye un verdadero problema. La Matemática es una creación de la mente humana, en consecuencia, para cada individuo existen sólo aquellos conceptos que pueden ser construidos por procedimientos finitos a partir de objetos primitivos que, además, deben poder explicitarse a través de un discurso. La práctica de un discurso es inseparable de cierto funcionamiento cognitivo.
El papel del lenguaje en el funcionamiento cognitivo es fundamental pues está relacionado con la comunicación, el tratamiento y la objetivación. Es la comunicación quien le permite a un individuo interactuar con otro; el tratamiento es fundamentalmente la actividad de razonar y la objetivación está relacionada con la capacidad de análisis.
Estas funciones del discurso, que son irreductibles, evidencian la importancia del conocimiento de la lengua. La función de designar objetos es de manera analítica, sin recurrir a la intuición ni a ningún tipo de representación temporal o espacial, los alumnos deben realizar un aprendizaje por adaptación de estas designaciones y esto puede ser origen de obstáculos, tal como lo plantea el Dr. Brousseau[1].

Los signos

Cualquier sistema de comunicación está formado por unidades constituyentes que se denominan signos, el empleo de signos que tienen sus propias limitaciones de significado y de funcionamiento, constituyen un sistema semiótico y la disciplina que los estudia es la Semiótica, de la que se considera fundador a Fernando de Saussure2,

La visión semiológica de Saussure se explica con las nociones de "lo significante" y de "lo significado", siendo "signo" sólo la relación entre uno y otro. Así por ejemplo, lo significante puede ser la imagen sonora de la palabra casa y lo significado es el concepto de casa que se tiene, no la casa misma. La descripción que Saussure hace del signo es de contenido psicológico porque localiza el signo en la mente del emisor. Un concepto (significado) se asocia de modo arbitrario con una imagen acústica (significante). Este tipo de significante responde al carácter vocal - auditivo de las lenguas, la relación que plantea en consecuencia es diádica: lo significante/ lo significado. De cualquier modo la postura de Saussure, como se centra en el lenguaje verbal, ha sido vista como prototipo de perspectiva lingüística, por el contrario a la semiótica norteamericana se la ha visto como pragmática o dirigida al estudio del uso del signo. Charles Sanders Peirce3 inició en Estados Unidos el

[1] Brousseau, Guy: "Los obstáculos epistemológicos y los problemas en Matemática".
[2] Lingüista sueco. 1857- 1913
[3] Nacido en Massachussets, USA, 1839- 1914

estudio del signo: "Un signo es un objeto que está en el lugar de otro en alguna mente"4, define, y establece que sus características son tres:

- Existe una relación triádica entre significado – significante – interpretante, entendiendo como este último, a la cognición producida en una mente.
- Esta relación no es estática pues está abierta a otra cognición, que a su vez es un signo, y así sucesivamente.
- Tampoco es arbitraria porque el signo fuerza al interpretante a referirse al mismo signo al que él se refiere.

[4] "A sign is an objet which stands for another to some mind", Hoopes, ed. 1991, pág.141.

La propuesta triádica Para Peirce, la Semiótica es una relación subjetiva pues depende de "alguien" concreto y triádica, esto lo explica a partir de la trilogía Objeto – Representante (Signo) – Interpretante. De acuerdo con su teoría, el objeto es el objeto en sí, el que existe en el mundo real, no la palabra que lo significa. El signo está en lugar del objeto y cada uno puede interpretarlo de manera distinta, se crea así la noción de interpretante. El signo es un coproducto entre el objeto y el sistema de interpretación. El interpretante de un signo se transforma en un nuevo signo; se genera así una cadena de signos que converge hasta crear un hábito. En su trabajo sobre "Signos, textos y sistemas matemáticos", Luis Puig estudia los procesos de significación y comunicación en el sentido de Peirce para quien el énfasis está puesto en la idea de signo. Peirce distinguió tres tipos de signos: los íconos, que guardan una relación de semejanza con el objeto designado (foto, mapa...), es una relación racional entre el signo y la cosa; los indicios, que remiten al intérprete hacia algo que ellos mismos no son por su inmediata relación física (humo, fuego); si el objeto no existiera, el índice dejaría de significar, no se parecen a los objetos correspondientes y los símbolos que serían casi en su totalidad convencionales, dejan por lo tanto, de tener significado. El ícono y el objeto no poseen una conexión dinámica, el ícono recuerda a alguna mente un objeto por sus semejanzas con él, es decir, existe una asociación mental por semejanza. El índice, en cambio, se conecta físicamente con el objeto, la mente no interviene en esa conexión, sólo la reconoce una vez establecida. El símbolo está conectado con el objeto por una idea que existe en la mente, sin esa idea no existiría conexión. En la terminología de Peirce las expresiones algebraicas, que generalmente conocemos como lenguaje simbólico (por ejemplo, una ecuación), no son símbolos sino íconos pues, a partir de su observación directa es posible deducir propiedades que tienen los objetos. Siguiendo con el ejemplo, las letras de una ecuación tomadas en forma aislada son índices porque indican una cantidad y los signos =, + son los símbolos. En la conceptualización de Peirce, el interpretante toma un papel tan relevante que las representaciones pasan a ser casi exclusivamente mentales, esta visión nos llevaría a tomar un modelo cognitivo puramente mental para analizar la adquisición del conocimiento matemático. Lo que propone este modelo de comunicación es generar sistemas matemáticos de signos para la escritura formal, que se utilizan efectivamente en situaciones de enseñanza. El concepto de texto es radicalmente distinto al que conocemos; en este sentido, un texto es una consecuencia de un acto de elaboración realizado por una persona. Estos textos son de abstracción progresiva a medida que se avanza en la escolaridad, es una forma de reproducir los avances que se realizaron en la propia Historia de la Matemática. Cada sistema matemático de signos define un estrato, cada estrato es un momento distinto de este proceso de construcción de espacios textuales.
El uso de estratos distintos o de combinaciones distintas de estratos puede hacerse pero estableciendo la correspondencia entre los elementos utilizados.
Cuando esta correspondencia no es posible, surge un nuevo estrato más abstracto que el anterior, es decir, un sistema matemático de signos de nivel superior.

La propuesta diádica
Por el contrario, si consideramos la teoría del Dr. Raymond Duval[5] para quien las representaciones subjetivas se plantean como origen de conflictos para el aprendizaje, las

[5] Duval, Raymond."Representation et représentations". Seminaires de Recherche. Conversión et articulation des representations analogiques. Janvier 1999. Pág: 7 a 24.

representaciones semióticas son por naturaleza, representaciones externas, y para un mismo objeto es posible tener representaciones diferentes; cada nuevo sistema semiótico aporta nuevos significados de representación y nuevos procesos para el pensamiento matemático; por lo tanto, la conceptualización a tener en cuenta desde este punto de vista, es la relación diádica “significante – significado”.

El progreso en Matemática implica el desarrollo de numerosos sistemas de representación, de tal forma que cada nuevo sistema semiótico aporta nuevos significados. Desde esta perspectiva, aparecen las causas de los errores pues cuando se cambia de sistema semiótico, se modifica la representación mientras el objeto permanece constante.

Es lo que el Dr. Duval llama el carácter paradójico del conocimiento matemático: no se puede acceder a los objetos sin los signos que los representan pero al mismo tiempo, no deben confundirse con sus representaciones.

En Aristóteles (*De interpretatione*) y Platón (*Cratilo*) ya se ve la preocupación por estudiar las relaciones que podían establecerse entre la configuración de los términos y la configuración de las cosas: el **semainon** (significado) y el **semainomenon** (significante).

Desde esta relación diádica planteamos ahora el problema de la comunicación.

La función semiótica se realiza cuando expresión y contenido entran en correlación mutua, en tanto que el concepto de representación mental es una imagen interna que tiene un individuo sobre un objeto en correspondencia con su pensamiento; las representaciones semióticas corresponden a un conjunto de signos que se manifiestan mediante el lenguaje como medio de expresión de esas representaciones mentales para hacerlas visibles a otro individuo.

En el marco de esta teoría, un **objeto** (por ejemplo, las funciones) tiene distintas **representaciones**, que se denominan registros, y que pueden ser: gráfico, tablas, algebraico, informático, etc.; surgen los sistemas semióticos.

El progreso de los conocimientos siempre es acompañado por la creación de sistemas semióticos nuevos. La formación del pensamiento científico es inseparable de los simbolismos para representar los objetos y sus relaciones.

La pluralidad de las representaciones semióticas permite que un mismo objeto sea representado por sistemas distintos, cuando esto ocurre, es posible desarrollar mejor las capacidades cognitivas del individuo.

El Dr. Duval sostiene que muchas veces las dificultades en la comprensión de la Matemática no dependen de su complejidad, ni de sus conceptos, sino a la no congruencia entre significante y significado y/o entre un registro de representación y otro.

En su obra, el Dr. Duval demuestra, mediante tareas que implican cambios de registros, que existen obstáculos y dificultades específicos, relativos a la comprensión de la Matemática, que no son debidos a la complejidad de la misma sino a la interferencia, inadecuación y restricciones que provocan el uso de determinado registro de representación.

De acuerdo con esta teoría, el análisis del desarrollo de un conocimiento y los obstáculos de aprendizaje relativos al razonamiento, a la comprensión de textos y a la adquisición de tratamientos lógicos, se deben a tres fenómenos ligados entre sí: el primero es la diversificación de registros de una representación semiótica, otro es la diferenciación entre representante y representado y el tercero es la coordinación entre los diferentes registros de representación semiótica disponibles.

La importancia que adquiere el tratamiento de la conversión de representaciones y las actividades a plantear para facilitarlo, por todo lo dicho, es fundamental.
La conversión de una representación producida dentro de un registro en una representación del mismo objeto en otro registro, deja explicitada una actividad de reconocimiento. Así por ejemplo, un texto y una imagen, presentados en conjunto, deben identificarse como dos representaciones del mismo paisaje; la escritura algebraica de una ecuación de primer grado y su gráfica cartesiana son dos representaciones de la misma función afín.
Esta conversión de representaciones es una etapa necesaria en la resolución de un problema o en la comprensión de un enunciado.
El Dr. Duval establece que todas las representaciones funcionan como una oposición "mental/ material". Las representaciones materiales corresponderían a todo lo que sea visible: expresiones lingüísticas, fórmulas, esquemas, gráficas, tablas; por el contrario, las representaciones mentales corresponden a lo que está dentro "de la cabeza" del sujeto y que no se pueden exteriorizar materialmente; son las imágenes, los conceptos y tienen el carácter de subjetivas.
Serían estas representaciones mentales las que permiten la comprensión de las materiales, las que cumplen, esencialmente, una función de comunicación; esta especie de subordinación hace que los sistemas semióticos dentro de toda actividad intelectual cobren suma importancia.
Una de las mayores dificultades que manifiestan los alumnos concierne precisamente al pasaje entre los distintos registros de representación semiótica. La comprensión conceptual implica, en sentido estricto, el dominio de un registro de representación y la capacidad para articular un concepto en otro registro de representación; ningún conocimiento puede ser adquirido mediante un único registro, son necesarios al menos dos diferentes para poder comprenderlo.
Por otra parte, una representación semiótica admite la posibilidad de un tratamiento, es decir, sin cambiar de registro, desarrollar procedimientos que permitan una mejor comprensión.
El tratamiento es la función que transforma una representación en otra, dentro del mismo registro, es decir, son las transformaciones discursivas estrictamente ligadas a una misma representación; así por ejemplo, un cálculo o una demostración de alguna propiedad. No debemos confundir con la actividad de conversión, puesto que ésta consiste, como vimos, en pasar de un sistema de representación a otro, el mismo objeto representado.
La importancia de la diferencia entre la actividad de tratamiento y la de conversión para comprender el funcionamiento cognitivo está inmersa dentro del contexto de dos fenómenos mayores. Mientras que el tratamiento hace referencia a la posibilidad de demostrar, de desarrollar; la conversión está relacionada con la capacidad de comprensión y la madurez intelectual del alumno.
Es importante destacar que no todos los sistemas semióticos permiten actividades de tratamiento, tal como la lengua formal, la escritura algebraica, representaciones gráficas.
Las dificultades que aparecen cuando se efectúan cambios de registros se deben fundamentalmente a que no se respeta el concepto de congruencia, es decir, no existe congruencia entre un registro y otro.
Para poder determinar si dos representaciones son congruentes o no, es necesario comenzar por segmentar a cada uno de ellas en unidades significantes y luego analizar si pueden o no ponerse en correspondencia.

Esta congruencia se apoya en tres conceptos fundamentales:

- debe existir una correspondencia semántica de elementos significantes del registro de partida y el de llegada,
- esa correspondencia entre unidades significantes debe ser unívoca,
- debe respetar el orden de conversión de las representaciones.

Es posible postular, por lo tanto, que de acuerdo con esta visión diádica, las causas profundas de errores hay que buscarlas en la no congruencia entre sistemas semióticos, lo cual revela ausencia de coordinación (o sea, la capacidad para reconocer representaciones distintas de un mismo objeto) entre dichos sistemas.

Un ejemplo

El análisis de la definición de elemento inverso de cada elemento en un grupo finito G, ya sea en su forma coloquial o formal, conduce a las siguientes consideraciones según cada una de las visiones.

a) Para la visión triádica:

A partir del soporte teórico de la relación triádica de Peirce existe otra propuesta, que plantea la generación progresiva de sistemas matemáticos de signos, no de sistemas de signos matemáticos (la caracterización matemática la tiene el sistema, no el signo). Como vimos, consiste en que los alumnos generen en sus espacios textuales sistemas de matemáticos de signos que acompañen su crecimiento intelectual.

En este sistema, los textos intermedios que generan los alumnos hasta alcanzar la escritura correcta se interpretan como distintos estratos que al superarlos se va alcanzando mayor nivel de abstracción.

b) Para la visión diádica:

Así como ya se ha planteado la necesidad de tender un puente entre la aritmética y el álgebra, observamos la necesidad de plantear, desde la Didáctica de la Matemática, la creación de una representación intermedia entre ambos registros que funcione como vínculo entre ambos lenguajes pero que no pertenezca a ninguno de los dos.

Es de destacar que las expresiones mixtas, que resultan de uso frecuente, no constituyen una representación intermedia pues mezclan características de un registro con otras propias del otro; carecen de reglas de formación y tratamiento.

El Dr. Duval propone como vínculo, un sistema sagital, a partir del hecho que el alumno está familiarizado con este sistema, muy utilizado para graficar relaciones.

El sistema sagital se realiza con representaciones no discursivas; permite objetivar, controlar o corregir la comprensión de los enunciados.

Constituye el encadenamiento de dos expresiones independientes entre sí y excluye el análisis del enunciado con criterio semántico o sintáctico, es una representación esquemática que se construye para apropiarse de un funcionamiento discursivo.

Bibliografía

Duval, R. (1999) *Semiosis y pensamiento humano*. Registros semióticos de aprendizajes intelectuales. Santiago de Cali, Colombia. Universidad del Valle. Traducción de Myriam Vega de Sémiosis et Pensée Humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels (1995).Berne: Peter Lang. ISBN 958- 8030- 23- 4.

Duval, R. (1999) *The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics* Univesité du Littoral, Laboratorie Mutations de Systèmes educatifs and IUFM Nord Pas-de-Calais.

Rey Pastor, J. y Babini, J. (1951) *Historia de la Matemática*. Buenos Aires. Editorial Espasa – Calpe.

Kilpatrick, J. y otros (1995). *Educación matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia*. Bogotá. Grupo Editorial Iberoamericana. ISBN 970-625-107-3.

Rico, L. (1995). *Errores en el aprendizaje de las matemáticas en Educación Matemática.* México. Grupo Editorial Iberoamérica.

Álvarez, J. *et al* (1997) *Breve historia de la lógica*. Monterrey. Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey.

Font, V. (2000). *Procedimientos para obtener expresiones simbólicas a partir de gráficas*. Tesis doctoral, Universidad de Barcelona.

Malisani, E. (1999) *Los obstáculos epistemológicos en el desarrollo del pensamiento algebraico.* Rosario. Instituto Rosario en Ciencias de la Educación. ISSN 0327- 392X.

Puig, L. (1994). *Signos, textos y sistemas matemáticos de signos.* Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Valencia.

LA GEOMETRÍA DINÁMICA CON CABRI II

Marco Barrales, Michel Carral
Institut Universitaire de Formation des Maitres. IUFM Midi-Pyrénées, FRANCIA
michel_carral@toulouse.iufm.fr

Resumen

La utilización de una herramienta nueva, de cualquier tipo que sea, necesita de una reflexión sobre lo que hacemos, muchas veces cambia nuestro modo de trabajar (actitud) y hace surgir problemas sobre las verdades que teníamos. En matemática los conocimientos utilizados pueden ser diferentes: comparar una construcción geométrica con regla y compás o con regla y escuadra (mecánica) o solamente con compás.

En este curso se explora de manera activa el software Cabri II. En una primera etapa se realiza la construcción de triángulos -sus elementos secundarios- y circunsferencias incsritas y circunscritas así como exploraciones de simetría. En una segunda etapa se elaboran macro construcciones o construcciones que podemos grabar, para luego reutilizar en figuras más complejas, sin necesidad de rehacerlas.

A través de la exploración ya descrita se reflexiona sobre el aporte de esta herramienta al quehacer pedagógico y/o científico. El uso del software es muy cercano a la forma de pensar en la geometría clásica, lo que permite a los estudiantes acercarse a esta disciplina y hacer conjeturas. Corresponde advertir que, como Cabri II no es un software de dibujo ni de demostración sino que está basado en un ambiente numérico, hay errores de aproximación. aunque leves. Se inicia el curso explicando brevemente el funcionamiento del software Cabri II para pasar a realizar actividades de construcción y comprobación de relaciones geométricas.

Introducción

Hasta ahora se ha enseñado la geometría con regla y compás, favoreciendo la motricidad fina en los educandos. Sin embargo hoy necesitamos destacar el análisis y el pensamiento reflexivo que nos provee la geometría. Las relaciones entre los elementos de la figura y los teoremas se dictan y suelen ser aceptados sin cuestionamiento por la mayoría de los estudiantes, perdiéndose así el misterio y la curiosidad. Debemos permitir una exploración mayor que la clásica con regla y compás. Gracias a los softwares geométricos que vienen desarrollándose, una situación matemática puede ser estudiada desde varios ángulos y de una forma dinámica, amigable para el estudiante y que le lleva a crear sus propias soluciones. En particular, la experiencia de algunos años viene mostrando jóvenes más motivados con el uso del software Cabri. Con éste tienen la ventaja de crear representaciones del problema a considerar y poner a prueba conjeturas, en trabajo tanto individual como grupal. Es interactivo y al ser un programa que crea ambientes "geométricos", promueve el desarrollo de este tipo de pensamiento en los estudiantes. Así, lo que antes imaginaban ahora lo manipulan, convirtiendo los teoremas en "realidades".

Caracterización del software

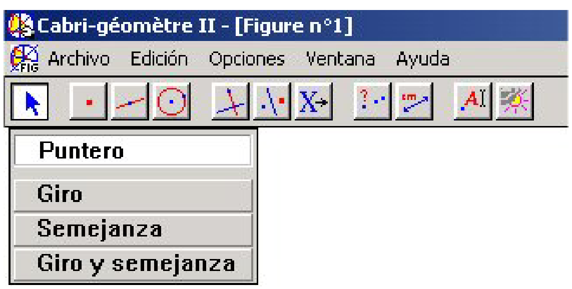
i) Cabri no es un software de dibujo (aunque podemos utilizarlo como) y tampoco de demostración. Está basado sobre un ambiente numérico por lo que comete errores de aproximación, aunque la aproximación es muy buena. Eso permite una manipulación interactiva de las configuraciones. Su modo de utilización, que es muy cercano a la forma de pensar en la geometría clásica nos permite acercarnos a los conceptos de esta disciplina y de hacer conjeturas.

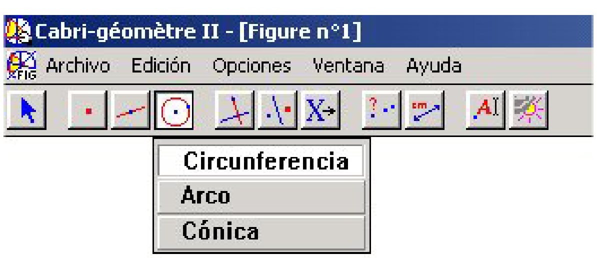
ii) Hay varios tipos de objetos: objetos libres (o de base) creados con unas funciones del menú, objetos semi-libres o sin grado de libertad (ligados a unos objetos por otras funciones del menú – ejemplos: *punto medio, punto sobre un objeto* -, o dependiendo de una construcción que hicimos).
Ver la forma del cursor cuando utilizamos una función del menú o cuando nos acercamos de un objeto. ¿Cuándo podemos mover un objeto?

iii) Al inicio hacer uso de la tecla F1 para obtener la ayuda abajo de la pantalla.

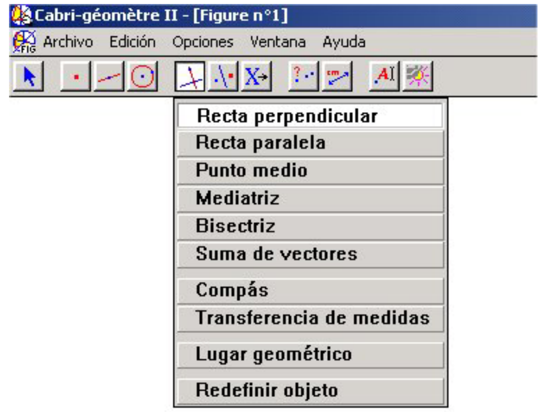
Una visión de los menús

Los menús están agrupados por características similares: creación de objetos comparables (Puntero, Puntos, Líneas, Curvas, Construir, Transformar, Macro, Comprobar propiedades, Medir, Ver, Dibujo). De especial importancia para las construcciones geométricas son los menús Macro y su importancia.

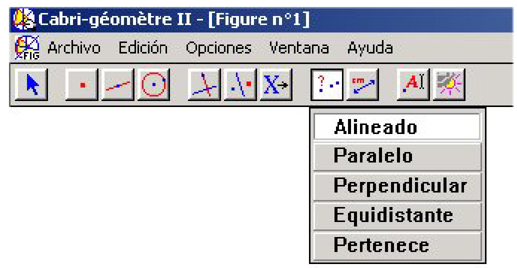


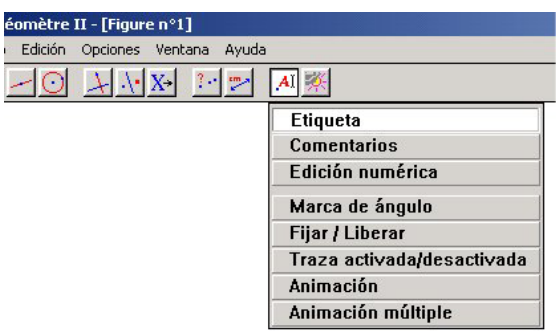


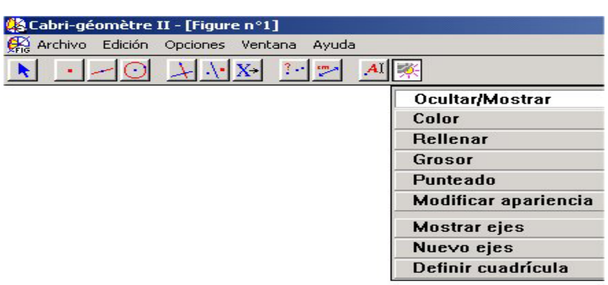

Cabri-géomètre II - [Figure n°1]
Archivo Edición Opciones Ventana Ayuda
Simetría axial
Simetría
Traslación
Rotación
Homotecia
Inversión

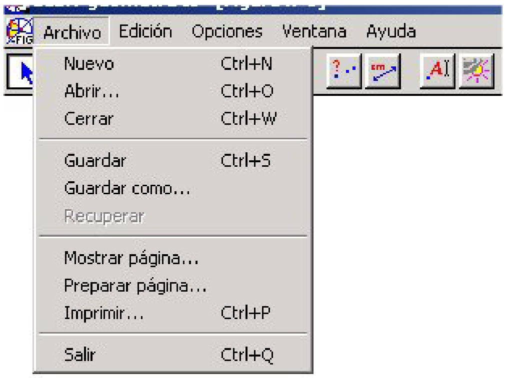

Cabri-géomètre II - [Figure n°1]
Archivo Edición Opciones Ventana Ayuda
Recta perpendicular
Recta paralela
Punto medio
Mediatriz
Bisectriz
Suma de vectores
Compás
Transferencia de medidas
Lugar geométrico
Redefinir objeto

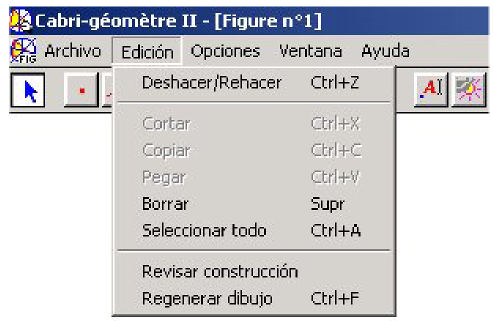

éomètre II - [Figure n°1]
Edición Opciones Ventana Ayuda
Distancia y longitud
Área
Pendiente
Ángulo
Ecuación y coordenadas
Calcular
Tabular

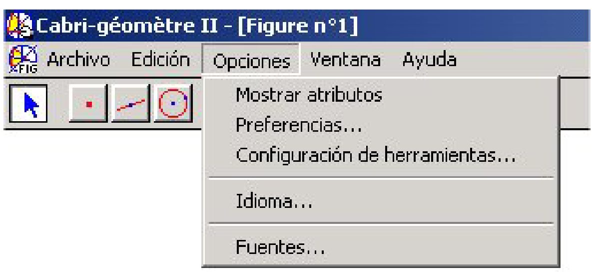

Cabri-géomètre II - [Figure n°1]
Archivo Edición Opciones Ventana Ayuda
Alineado
Paralelo
Perpendicular
Equidistante
Pertenece


éomètre II - [Figure n°1]
Edición Opciones Ventana Ayuda
Etiqueta
Comentarios
Edición numérica
Marca de ángulo
Fijar / Liberar
Traza activada/desactivada
Animación
Animación múltiple


Cabri-géomètre II - [Figure n°1]
Archivo Edición Opciones Ventana Ayuda
Ocultar/Mostrar
Color
Rellenar
Grosor
Punteado
Modificar apariencia
Mostrar ejes
Nuevo ejes
Definir cuadrícula







Las construcciones

C1 : Trazar (o crear) un punto, una recta, un segmento, un triángulo, un círculo. Borrar la pantalla.

C2 : Trazar un triángulo ABC (nombrar los vértices), un círculo C de centro O (etiquetear el centro y la circunferencia).

Borrar la pantalla.

C3 : Trazar un segmento; trazar un cuadrado de lado el segmento. Validación : modificar el segmento.

Borrar la pantalla.

C4 : Trazar una recta d, y un punto A situada afuera de d. Para todo punto M de la recta d tomamos el punto medio M’ del segmento AM. Hacer el lugar geométrico de M’ cuando el punto M recorre la recta. ¿Qué opinan?, ¿Por qué?

Borrar la pantalla.

C5 : Trazar una recta d, y un punto A situada afuera de d. Para todo punto M de la recta d hacemos corresponder el punto M’ intersección de la perpendicular a la recta d pasando por el punto M y de la mediatriz del segmento AM. Hacer el lugar geométrico de M’ cuando el punto M recorre la recta. ¿Qué opinan?, ¿Por qué?

Borrar la pantalla.

C6. Trazar un triángulo ABC y su ortocentro H. Redefinir los vértices como puntos sobre una circunferencia, y pedir el lugar geométrico del punto H cuando el punto A recorre la circunferencia. ¿Qué opinan?, ¿Por qué?.

Redefinir los puntos B y C como puntos libres. Y moverlos en el plano. ¿Qué sucede?

Borrar la pantalla.

Trazar el centro de la circunferencia inscrita, circunscrita, ex - inscritas, el centro de gravedad. Hacer las Macro-construcciones.

C7. Sea un triángulo ABC; construir el círculo de Feuerbach, (o de los nueve puntos) es decir el círculo que pasa por los puntos medios de los lados, por los pies de las alturas y los puntos medios de los segmentos que unen el ortocentro con los vértices. Construir los círculos inscrito y ex-inscritos. ¿Qué vemos?

C8. Simetría oblicua : Sean una recta (d) y una dirección δ. A todo punto M del plano asociamos el punto M’ tal que la recta MM’ sea de dirección δ y que el punto medio de MM’ sea sobre la recta (d). Hacer la macro de esta transformación. Aplicarla a una recta, a un círculo. ¿Qué observamos?

C9. Elaboración de una Macro-construcción :

Tomar la construcción **C3**, definir los dos puntos de los extremos del segmento como objetos iniciales, el cuadrado como objeto final, validar la Macro. Definirla, escribir el texto de la ayuda y grabarla. Utilizarla en varias situaciones (mover el segmento de referencia).

Borrar la pantalla.

C10. Hacer la macro de un cuadrado cuya los dos puntos iniciales definen una diagonal. Utilizarla en varias situaciones (mover el segmento de referencia).

Borrar la pantalla.

C11. Hacer la macro de un cuadrado utilizando el círculo circunscrito como objeto inicial y el mínimo de objetos iniciales. Utilizarla en varias situaciones (mover el segmento de referencia).

Borrar la pantalla.

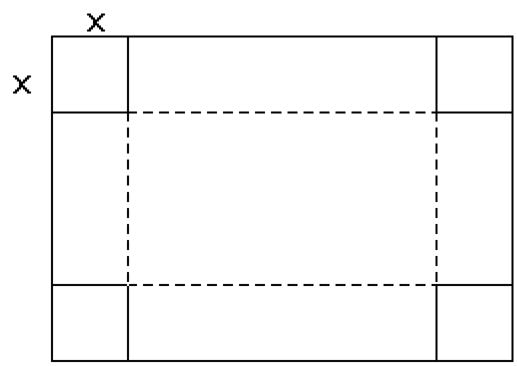
C12. Comparar esas tres ultimas construcciones. ¿ Qué opinan ?

C13. Utilizando las funciones "rotación" e "edición numérica" hacer la macro de un triángulo cuyo dos ángulos son iguales a 25° y 32° respectivamente. Utilizarla en varias situaciones. ¿Se puede utilizar la Macro para otros valores? Hacer el mismo trabajo con otros tipos de polígonos.

Borrar la pantalla.

C14 . En una lámina rectangular se recortan en cada esquina un cuadrado de lado x (ver el dibujo). Plegando según los segmentos punteados tenemos una caja sin la tapa.

Queremos estudiar las variaciones del volumen en función de x. Fabricar con Cabri una configuración que nos ayude, a determinar y ver el valor del volumen cuando x varía (también cuando modificamos los lados del rectángulo).



C15. Sean dos puntos O y I; sobre una recta consideramos dos puntos E y F tal que si el segmento OI es el segmento unidad las coordenadas de E y F son x, y. Construir los puntos sobre la recta OI de coordenadas, x+y, 1/x, xy, sin utilizar la calculadora. ¿ Si la utilizamos, qué pasa? ¿Las construcciones son válidas si orientamos el segmento?.

A modo de cierre

Los actuales enfoques de la enseñanza de la geometría se orientan al proceso de construcción y adquisición de habilidades intelectuales, en especial las relativas a procesos de abstracción y generalización, formulación de conjeturas, proposición de encadenamientos argumentativos y la utilización y análisis de modelos que permitan describir y predecir el comportamiento de algunos fenómenos en diversos contextos. Con el tipo de ambiente de trabajo que provee un software como Cabri II, durante el proceso, los estudiantes hacen conjeturas que pueden verificar en cada paso. Se dan cuenta que algunas de ellas son correctas y que otras no lo son, es decir, establecen « hechos geométricos » a través de errores y aciertos, en función de los cuales van cimentando su aprendizaje. De este modo aprenden que "van al colegio a equivocarse" con la opción de no quedarse en el error, que en la discusión con sus compañeros encontrarán la(s) solucione(s), en definitiva, irán "aprendiendo a aprender", aprendiendo a construir sus saberes geométricos, sobre la base de los ambientes especiales de trabajo que proveen softwares como Cabri II.

Bibliografía

Carral, M. (1995). *Géométrie.* Paris. Ellipses.

España,T (1998). Cabri-géomètre en la calculadora TI-92. Madrid: Texas Instruments.

Dahan, J. (1998). *Introduction à la géométrie avec la TI-92*. Paris. Ellipses / édition marketing, S.A.

Barrales, M. (2002). Geometría y Análisis con la TI-92. Memoria II Encuentro de Matemática. Colegio Alemán de Concepción. Talleres Diario El Sur S.A.

Carral, M. (2002). Construcción de funciones con Cabri Géomètre. Memorias Segundo Encuentro de Matemática. Colegio Alemán de Concepción. Chile.

LAS FUNCIONES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

M. Bonacina; A. Haidar; M. Quiroga; E. Sorribas; C. Teti; Graciela Paván
Universidad Nacional de Rosario (U.N.R) - Argentina.
mbacuario@yahoo.com.ar

Resumen

En este trabajo presentamos algunas reflexiones y una propuesta acerca de la enseñanza por resolución de problemas, siendo el eje de esta última la aplicación y discusión del concepto de FUNCIÓN. En las carreras ´no matemáticas´ sin relegar el papel fundamental de la formación en lo teórico-conceptual los esfuerzos se desplazan hacia la aplicación de los métodos matemáticos en la resolución de problemas de las ciencias en general. Dado que el desarrollo mismo de la ciencia puede entenderse como resultado de la *búsqueda de solución* a los distintos problemas que aquejan al hombre, creemos que la ´enseñanza por resolución de problemas´ coadyuva a promover el cambio conceptual y metodológico que requiere actualmente el sistema educativo en general. La propuesta consiste esencialmente en el planteo de una situación problemática familiar al estudiante para, a partir de allí y siempre bajo la guía y supervisión del docente, proceder a su discusión, al planteo de conjeturas e hipótesis, resolución, verificación, etc. En este caso el problema requiere del concepto de función, concepto básico y esencial en toda disciplina que acuda a los modelos matemáticos. Creemos que este presenta características que lo signan como *concepto fuerza* en la implementación del cambio pretendido; que su uso en el marco de la resolución de problemas coadyuva a tal propósito pues, entre otras bondades, las funciones se caracterizan por tener cuatro representaciones o codificaciones distintas - *gráfica, numérica, analítica, verbal* - cada una de las cuales expresa aspectos o propiedades didácticas no equivalentes ni equiparables entre sí, lo cual, además de ampliar el espectro de posibilidades para trabajar con el estudiante, proporciona elementos para una mejor evaluación del mismo (asimilando la comprensión del concepto a la capacidad de recodificar la información desde una representación a otra).

La ciencia y su enseñanza

La ineficacia en la enseñanza de las ciencias es un hecho con el que se tropieza habitualmente y que se evidencia tanto en los errores conceptuales y actitudinales que a diario se detectan en los alumnos, como en la incapacidad manifiesta de los mismos para "resolver problemas". De allí la necesidad de proponer una revisión crítica de aquellos supuestos sobre los que descansa el paradigma de enseñanza-aprendizaje más utilizado actualmente para, a partir de allí, reorientar la enseñanza hacia un nuevo paradigma. Esto último podría concretarse a partir de una metodología de clase sustentada en las pautas más recientes ofrecidas desde la didáctica de las ciencias, particularmente en aquellas relativas al aprendizaje significativo y al cambio conceptual y metodológico (Ausubel, Novak y Hanesian 1983; Posner et al, 1982); es decir en un modelo que concebiría el aprendizaje como el cambio ´conceptual y metodológico´ producido en el estudiante a partir de sus ´concepciones previas´. Creemos que el logro de metas superiores está supeditado a la posibilidad de promover tal cambio en las ideas o representaciones previas (ingenuas, no formales, erróneas, precientíficas o rutinizadas) del sujeto que aprende. Dentro de este modelo pedagógico estimamos la "resolución de problemas" (particularmente, la modelización matemática) como el medio más conveniente a los fines propuestos.
La idea de aprendizaje como "cambio conceptual y metodológico" se basa en la similitud detectada entre el aprendizaje significativo de las ciencias y el proceso de elaboración de las teorías científicas. Esta similitud lleva a considerar conveniente a los fines propuestos el programar y orientar el trabajo de los estudiantes de manera tal que por momentos resulte

comparable a la actividad de la comunidad científica. Al respecto, y en lo particular, Schoenfeld (1994) se refiere al trabajo matemático como *" un proceso de descubrimiento, vital y continuo, de comprender la naturaleza de objetos o sistemas matemáticos concretos".* Entendemos que de esta manera lo acercaríamos al entramado conceptual y metodológico del conocimiento científico a la vez que promoveríamos el cambio pretendido a los efectos de optimizar el proceso de enseñanza-aprendizaje. Sin dudas la actividad científica no es una actividad *natural;* es más, podría decirse que conlleva una ruptura con formas tradicionales del pensamiento; luego, el cambio conceptual propuesto presenta dificultades de magnitud muy importante y su implementación no es posible si no se lo acompaña de un cambio metodológico profundo que afecte hábitos muy enraizados tanto en los estudiantes como (y quizás fundamentalmente), en los docentes. De allí que enfocamos el aprendizaje como *cambio conceptual y metodológico* .

La experiencia indica que en la actualidad y en el mejor de los casos se obtiene un alumno que *sabe* matemática pero que difícilmente puede *hacer* matemática. Asumimos que esta realidad sería una de las consecuencias del hecho de no haberlo puesto nunca en contacto con el *verdadero quehacer científico*. Las dificultades que presentan los alumnos a la hora de *resolver problemas* avalan la hipótesis que no es suficiente que conozcan y manejen con solvencia fundamentos explicativos de conceptos y propiedades ya que ello, por sí solo, no les permite alcanzar la *movilidad* de los mismos.

Creemos así que el modelo de cambio conceptual y metodológico propone una instancia superadora y que entre los medios para llevar adelante esta propuesta, la *resolución de problemas* (en particular la confección de modelos matemáticos) aparece como un poderoso instrumento de cambio metodológico. Cabe aclarar aquí que si bien esta metodología es hoy ampliamente reconocida como potenciadora del aprendizaje esto no significa que esté total y satisfactoriamente resuelta, que no existan cuestiones relativas a su implementación aún no lo suficientemente ponderadas como, por ejemplo, la incidencia sobre ella de los distintos modos de proceder inducidos por cada área del conocimiento; de la *´visión del profesor´* tanto respecto de disciplina como de su rol o función dentro del aula, Según Gómez (1995) esta *visión* influye en los procesos que el estudiante aprehende, los *sobredetermina*, puede o no actuar a modo de *catalizador de sus intereses y esfuerzos*. A este respecto creemos que muchos docentes no han captado aún la diferencia entre ´problema´ y ´ejercicio de aplicación´ y que esto interfiere con el objetivo de cambio pretendido ya que, en el marco de la enseñanza por resolución de problemas cada una de estas actividades tiene un objetivo didáctico distinto e importante en sí mismo.

Así; por ejercicio se entiende cualquier actividad dirigida a *fijar y/o consolidar* conceptos o técnicas ya conocidas, mientras que por problema se entiende toda actividad que origine un desequilibrio con los saberes previos, que exija al alumno *algo de sí*, un esfuerzo que lo lleve al límite de sus posibilidades intelectuales y lo obligue a optimizar sus estrategias de razonamiento (en este caso el docente, y según la analogía propuesta, actuaría a modo de director de investigación).

- Para *resolver un ejercicio* se requieren las siguientes capacidades y destrezas:
  - a) el conocimiento de conceptos, técnicas o propiedades relativos a la actividad propuesta.
  - b) la habilidad para procesar y trasformar los datos necesarios para las operaciones concretas que requiera la solución. (por ej: reducir fórmulas).

▫ Para resolver un problema, además de (a) y (b), se deben poner en juego las siguientes destrezas y capacidades :

c) habilidad para separar información relevante de la irrelevante.

d) habilidad para procesar *simultánea y mentalmente* un gran número de pasos o etapas en la ejecución de la tarea propuesta., destreza que Pascual Leone (cit. en Pómez Ruiz, 1991) denomina <M-Capacity> (*) esta capacidad hace a la posibilidad de proponer un plan de trabajo y una estrategia acorde al mismo; o sea, a la posibilidad de *dimensionar* el trabajo intelectual requerido por el problema (según Niaz (cit. en Pómez Ruiz, 1991) la <M-Demand> del problema).

e) habilidad para procesar y trasformar datos en *varias direcciones*, (*) esta habilidad requiere el conocimiento del efecto y oportunidad de uso de cada operación e implica el ejercicio de razonamientos hipotético-deductivo ya que requiere del análisis comparativo de varias combinaciones y posibilidades y resulta, por ende, una manifestación del razonamiento formal.

f) habilidad para extraer información crítica desde un contexto distinto al contexto de aplicación o sea, movilidad o trasportabilidad de los conceptos de un área a otra.

Es importante señalar que muchas veces es la forma de presentación de una actividad la que finalmente determina su carácter. Así, al planificar nuestras actividades debemos tener en claro los objetivos pretendidos en cada instancia y, fundamentalmente, el objetivo *final*: desarrollar en los alumnos la capacidad de resolver problemas sin caer en la manipulación rutinaria de datos, fórmulas y/o procesos, en la actitud de *reconocer o abandonar*; lograr que pase del ´razonamiento basado en evidencias´ al razonamiento en ´término de hipótesis´; es decir, lograr *´la formación integral del estudiante, como profesional y como persona consciente del papel que puede y debe jugar tanto para sí como para su entorno´.*

Sabemos que la concreción de este objetivo no es fácil ni simple, que ello requiere de una profunda *transformación* del sistema educativo en general. Así, y aunque esto parezca una cuestión de ´vocabulario´, creemos que es importante cambiar la forma de expresarnos; que si lo que nos preocupa es *´formar´* y no *´informar´*, una manera de imbuirnos de esta idea es, por ejemplo, hablar de *proceso de transformación* en vez de *proceso de enseñanza.* Es decir, creemos que para *formar*, debemos *transformar,* y que la resolución de problemas al permitir trabajar con el *proceso* del cual deriva un resultado (antes que con el resultado), ofrece importantes oportunidades para accionar en este sentido ya que permite poner en juego cuestiones que hacen a la formación integral pretendida. Entre las más importantes: *la búsqueda de ´ método´, la capacidad de abstraer, el ´sentido de la estética´,*

(*) Resulta interesante señalar aquí cómo, para dar fuerza a la idea que se pretende difundir, nuevamente e inconscientemente se produce una modificación del vocabulario. Así, hoy día, en vez de hablar de ´capacidad de abstraer´ se habla de ´capacidad de modelar´, cambio este que no es ocioso ni casual ya que esta última expresión traduce con efectividad la esencia de la concepción emergente.

Efectivamente, si por *MODELO* entendemos, "la expresión ***formal*** de las relaciones existentes entre entidades ***reales o abstractas*** definidas en términos matemáticos" ; vemos que el proceso de *modelizacion* utiliza la lógica y los procesos matemáticos incluso en el contexto de lo *real o concreto.* De allí que la construcción y resolución de modelos deja de ser un ejercicio puramente teórico, permite *'bajar a lo concreto'* y rescata para la Matemática un importante rol en el modelo de educación emergente.

La modelización es un modo de resolución de problemas que creció en los últimos 30 años. Como no es una rama de la matemática pura, referida *solamente* a la lógica deductiva aplicada a establecer relaciones entre entidades abstractas, entendemos que el desarrollo de la capacidad de modelar hace tanto al aprendizaje significativo como al cambio pretendido. El esquema siguiente resume las capacidades potenciadas a partir de la búsqueda de modelos matemático.

BÚSQUEDA DEL MODELO		
Requiere		detectar
Capacidad de abstraer	para	Factores o hechos relevantes Interrelaciones relevantes
Confección de un plan de trabajp		Desarrollar en forma óptima y organizada las actividades con el uso del método
Sentido de la estética		La elección de un método claro y simple; potente; efectivo

Desarrollo de una experiencia

Presentamos un ejemplo a través del cual analizamos la puesta en práctica de la metodología propuesta. Comenzamos *planificando* la enseñanza del tema (en este caso: *función*); reconociendo para ello la necesidad de tratar en forma *integral* las tres instancias que abarca el acto educativo en el área matemática:

1- formación del concepto: el concepto se presenta teniendo en cuenta su ´origen´." el verdadero origen del concepto función es el de plantear, pedir, producir o reproducir dependencias o conexiones entre variables acontecidas en el mundo físico, social o mental; esto es, en y entre estos mundos" (Freudhental, 1983) Esto permite motivar la presentación a través de la resolución de problemas, mostrar la función como un instrumento natural para modelizar relación entre magnitudes.

2 - ejercitación y aplicación

2.1 - ejercitacion: etapa de fijación y consolidación de los conceptos aprendidos.

2.2- aplicación: etapa destinada a alcanzar la movilidad del concepto.

Estimamos que esta última instancia debería ser, en lo posible, la de mayor peso; que la misma posibilita el trabajo interdisciplinario, la presentación de situaciones problemáticas.

3- evaluación, entendida como un instrumento esencial para las decisiones pedagógicas.

En lo que sigue mostramos como trabajamos en la instancia de aplicación.

Modelos matemáticos. Ajuste de curvas

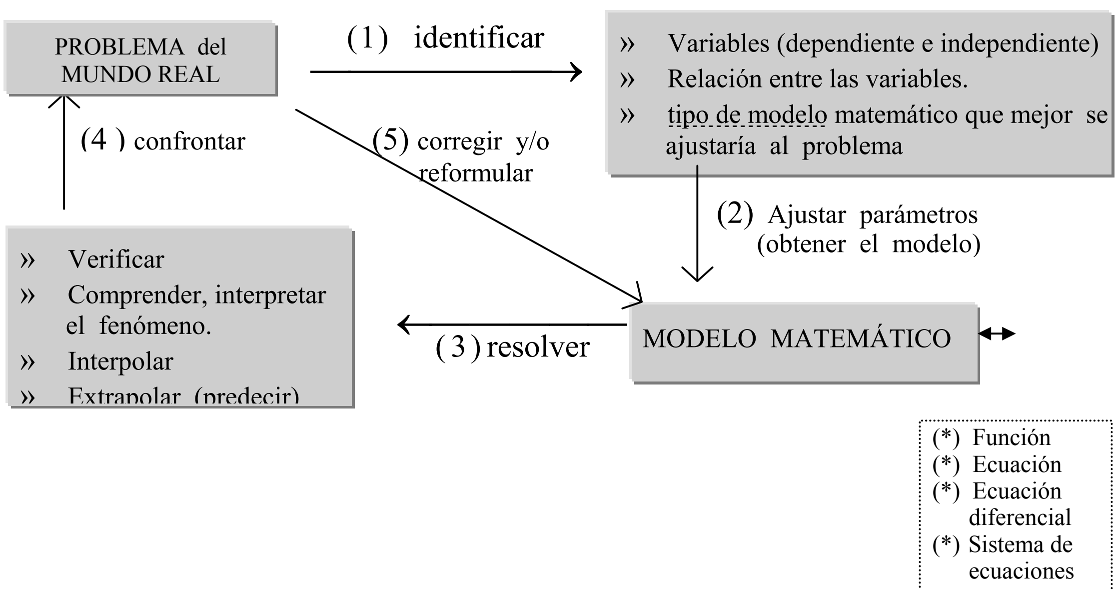
Recordamos que un modelo matemático es una descripción matemática de un fenómeno del mundo real, que la obtención de tales modelos requiere de cierta rutina ó método. Así normalmente primero se procede a identificar las variables que intervienen, el carácter de las mismas (dependiente o independiente), las relaciones entre ellas, para, a partir de allí, organizar el trabajo a los efectos de hallar una función (ó ecuación) que las vincule.

A veces sucede que ya se conoce alguna *ley* que ligue a las variables; en tal caso, una manipulación algebraica de la fórmula correspondiente permite obtener el modelo buscado. Pero no siempre habrá una ley a mano que facilite el trabajo.

Se acude entonces al *modelo empírico*, modelo esencialmente sustentado en *datos* reunidos a través de una o más observaciones o repeticiones experimentales del hecho en estudio.

En este caso, una vez realizada la experiencia se analizan los resultados en busca de un *patrón de comportamiento*. Para facilitar esto conviene presentar los datos de manera tal que las propiedades más sobresalientes queden al descubierto, sean apreciables. Así:

- se procede a la *tabulación* de los datos (***representación numérica de la función***).
- si de la representación numérica podemos pasar a la ***representación gráfica de la función***, crecen las probabilidades de hallar patrones de comportamiento ya que muchas propiedades pueden ser leídas directamente de un gráfico así como muchas veces la gráfica ´*sugiere*´ la ecuación adecuada. Existen métodos perfectamente probados que, para cierto tipo de curvas, permiten obtener la ecuación que mejor la ´ajusta´ ; o sea la que mejor captura la tendencia básica de los puntos datos.
- Si de la representación gráfica podemos obtener la ***representación analítica de la función*** estaremos sin dudas en condiciones óptimas de estudiar el fenómeno, incluso estaremos también en condiciones de hacer interpolaciones y/o extrapolaciones .
- En la siguiente figura se ilustra el proceso del modelado matemático.



UN PROBLEMA TIPO: ***comportamiento de un gas ideal***

Observación de un fenómeno natural:

" un gas que se encuentra en un recipiente deformable, a presión constante, sometido a cambios de temperatura presenta cambios de volumen".

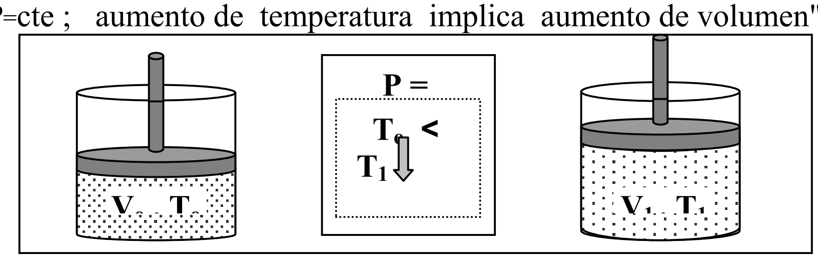
Problema: ¿ Puede ser *cuantificada* la dependencia temperatura-volumen ? .

Resolución:

(I) Proponemos un debate a partir de la palabra *cambio* (el volumen: ¿*aumenta ó disminuye*?); de las *variables* del problema, rol y relevancia de cada una de ellas, etc.

Concluimos que: "para P=cte ; aumento de temperatura implica aumento de volumen"

(II) Insistimos en lo útil de acudir a un esquema o representación gráfica de la cuestión a resolver, aun cuando este sea muy simple o elemental.



- Resulta muy probable que en la obtención de la macroestructura, se pierda de vista el problema en sí, resulta conveniente entonces realizar un *control de proceso*: ¿ dónde estamos dentro de la estructura propuesta? ; ¿ qué paso sigue? :
  - encontramos el modelo *físico* (aumento de temperatura ⇒ aumento de volumen)
  - debemos buscar el modelo *matemático* (función que ligue temperatura y volumen)

(III) Buscamos el modelo matemático.

En este momento es cuando empiezan a surgir las cuestiones más significativas en cuanto a la matemática; por ejemplo, aparece aquí un error muy común en relación a dos variables en las que el aumento de una determina el aumento de la otra: el alumno asocia automáticamente la relación hallada con una relación de directa proporcionalidad.

Vemos así como esta metodología permite detectar errores, trabajar en su eliminación.

Otra cuestión importante es la relativa a los datos: experimentales vs. teóricos. Al alumno le cuesta entender la relación entre el modelo matemático y la realidad; que el modelo propone una situación idealizada, que interpreta los hechos bajo ciertas simplificaciones.

(En este punto, fue necesario realizar un control del proceso de enseñanza; decidir respecto del tratamiento del error en los datos experimentales; se optó por simplificar esta cuestión informando de esto al alumno)

Así, y de acuerdo a este análisis, pusimos al alcance de los alumnos una serie de valores de temperatura y volumen, resultado de mediciones realizadas en forma experimental.

T (ºC)	0	50	100	150	200	250	300
V (cm^3)	20.0	23.7	27.4	31.1	34.8	38.5	42.2

Una vez puesto en marcha el proceso intentamos que el alumno trabaje en forma independiente, orientando las actividades a través de preguntas. Por ejemplo:

- ¿ qué concepto matemático ´*comprende*´ este problema?, ¿ cuál es el rol de cada magnitud variable?, ¿cómo pasamos de la representación numérica a la representación analítica de la función?, ¿ siempre podemos pasar de una representación a otra?, etc...

La primer pregunta permite evaluar si el alumno logró asimilar el concepto de *función*. Si el alumno es capaz de reconocer que esta ante una función, el problema es un problema *motivador*. Si no puede hacerlo el problema está muy lejos de él y se generan otras situaciones distintas de las que se deseaba trabajar (las cuales deben ser atendidas).

Si el alumno reconoce que está ante una función, su atención puede centrarse en el nudo del problema: hallar la *ley de la función* (ó *modelo matemático para un gas ideal*)

(*) Se insiste en la importancia de que el alumno *registre* estas preguntas, que entienda que lo que en realidad estamos haciendo es pensar en voz alta. "Estas *órdenes secretas* que los docentes nos damos al tratar de resolver un problema, facilitan patrones de conducta para el lenguaje interior, patrones que el alumno debe imitar; este proceso será gradual y el alumno debe desplegar un lenguaje interior que irá modelando hasta desarrollar un patrón silencioso; sin embargo, para que esto de resultado en el desempeño matemático, el alumno debe tener habilidades básicas" (Meichenbaum cit. en Elosúa y García, 1993).

Los alumnos responden las preguntas y desarrollan las actividades que van surgiendo:

- grafican los puntos de la TABLA en un sistema coordenado.
- del gráfico *leen* que: *los puntos se disponen sobre una recta*
- reconocen el *tipo* de función que este hecho caracteriza*: función lineal.*
- recuerdan la ecuación general de la función lineal , $\mathbf{y = m\,x + h}$;

Este punto es crucial en cuanto a verificar si el *concepto de función*, de *variable independiente* y *dependiente*, ha sido realmente *internalizado, asimilado* por el alumno. Es decir, si puede relacionar las variables abstractas (x e y) de la formulación *ideal* de la función lineal, con las variables concretas de su problema (T y V). Este paso (*elemental* si el concepto ha sido comprendido) no resulta, en general, fácil ni obvio para el alumno promedio. Existe un *obstáculo* que evidentemente les dificulta *bajar* del mundo de lo

abstracto e ideal al mundo de lo concreto y real. Así, detectamos que el alumno no sólo tendría el tradicional problema de *abstraer,* de *quitar sustancia a los objetos reales*, sino que también tendría el problema inverso, el de *dar sustancia a los contenidos abstractos* . Y si bien es entendible la dificultad para formalizar o abstraer, la reversa no aparece como algo *´difícil´* de manejar. Creemos que si detectamos dificultades, estas no son otra cosa que la *señal* de que el nuevo conocimiento no ha sido incorporado *con efectividad* a la estructura cognitiva; en definitiva, la señal de que el aprendizaje no se ha producido.
Finalmente el alumno procede a *traducir* el fenómeno al lenguaje matemático, cuidando de *dotar de sentido* a las variables.

	TEORÍA	EXPERIENCIAA	RESULTADO
Variable Independient. IndeIndependiente	**x**	**T**	
Variable Dependiente	**y**	**V**	
FUNCIÓN	**y = m x + h**	**V = m T + h**	
M = pendiente	$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$	$m = \frac{\Delta V}{\Delta T}$	→ $m = \frac{V_f - V_i}{T_f - T_i} = \frac{22.2}{300} = 0.074$
h=ordenada al origen	**x =0 → y = h**	**T =0→V = 20**	→ **h = 20**
CONCLUSIÓN			→ **V = 0. 074 T + 20**

MODELO MATEMÁTICO

Este es también el momento de evaluar si los objetivos propuestos en la etapa de *fijación y consolidación* del concepto *función lineal*, se han logrado. O sea, si se ha alcanzado el dominio de las técnicas algebraicas, si se ha comprendido cabalmente el significado (geométrico y físico) de los coeficientes; particularmente el de ***m*** como *razón de cambio*:
Teoría → *m* → variación de ***´y´*** por cada cambio unitario de ***´x´***
Experiencia → 0.074 → variación de ***volumen*** por cada grado de ***temperatura***.
Procedemos luego a la *validación y generalización del modelo*.
Por último planteamos los siguiente interrogantes, el resultado obtenido:
¿será válido para cualquier gas ?; ¿ para cualquier condición inicial en que el mismo se encuentre ? ; o sea, ¿ siempre que se caliente un gas a presión constante este se expandirá a razón de 0.074 cm^3/ºC ?. ¿Coincide esto con lo visto en Química?.
Sin dudas nos encontramos ante ¡¡ otro *problema !!* ; que dejamos para otra ocasión, particularmente para cuando el alumno haya visto la ecuación para un gas real en Química (materia paralela a la nuestra) y nosotros visto derivadas y estudio de funciones.

Hacia la autonomía en el aprendizaje

Una vez resuelto un problema, si la intervención del docente ha sido muy importante, lo óptimo es proponer una serie de problemas de naturaleza similar a los efectos de que el alumno los resuelva *solo*, tratando de aplicar las reglas *descubiertas*.
Se insiste que un punto crucial de todo este trabajo es la *estructura de la evaluación final*, que de ella depende muchas veces el éxito o fracaso de toda la propuesta. Que la misma debe ser presentada de tal forma que resulte otra instancia de entrenamiento de aquellas habilidades que impliquen el manejo y el control de los propios recursos cognitivos.

Conclusiones

En particular, y en relación al tema desarrollado, se validaron en forma importante muchas de las hipótesis concluidas a partir nuestro diario accionar, entre ellas:

"Que el desmedido automatismo termina por anular la capacidad de abordar adecuadamente la resolución de problemas " .

"Que la aplicación a situaciones concretas además de facilitar la correcta interpretación y resolución de problemas, coadyuva al aprendizaje significativo"

Bibliografía

Ausubel, D.; Novak, J.D. y Hanesian, H. (1983) *Psicología educativa: un punto de vista cognoscitivo.* México: Trillas.

Posner, G.J.y otros (1982) Accomodation of a scientific conception: toward a theory of conceptual change. *Science Education,* 66 (2) , 211-227.

Schoenfeld, A. (1994). *Ideas Y Tendencias , En La Resolución De Problemas.* Bs. As, Argentina: Olimpíada Matemática Argentina. Edipubli S.A.

Gomez P. (1995). *Profesor: no entiendo*. México: Grupo Editorial Iberoamericano.

Pomés Ruiz, J. (1991) La metodología de resolución de problemas y el desarrollo cognitivo. *Enseñanza De Las Ciencias* , Volumen 9, Nº 3, 78-82

Freudhental, H. (1983) . *Didactical Phenomelogy ol Mathematical Structure* .

LOS NÚMEROS REALES Y PROCESOS INFINITOS EN EL BACHILLERATO

José Arredondo, Benjamín Zúñiga y Roberto Torres
Universidad Autónoma de Querétaro, México.
carlosarremx@yahoo.com.mx, benja@sunserver.uaq.mx, robert@sunserver.uaq.mx

Resumen
El presente trabajo expone ciertos aspectos de los números racionales e irracionales que generalmente son poco trabajados en las clases sobre los números reales en el bachillerato. La célebre paradoja de Aquiles y la tortuga sirve de pretexto para analizar a los números racionales y su periodicidad vía la noción de serie. Por lo que respecta a los números irracionales, la comparación del lado de un cuadrado y su diagonal nos sirven para introducir el concepto de inconmensurabilidad. Se presenta también un pequeño software, a manera de demo para apoyo de los temas tratados.

Introducción: La manera usual de impartir el tema de los números reales en el bachillerato, consiste generalmente en la presentación de los diversos subconjuntos importantes tales como los números naturales, enteros, racionales e irracionales, para después ilustrar algunas de sus características mas importantes. La idea del presente trabajo es la profundizar un poco mas, particularmente con lo que respecta a los números racionales e irracionales.

Dos de las principales cualidades del presente texto pretenden ser:

- Introducir al lector, con lo que respecta a los números racionales, a los procesos infinitos, vía la expresión decimal y la noción de serie. Esta aproximación es valiosa como recurso para iniciar las ideas del Cálculo Infinitesimal, sobre todo a nivel preuniversitario. Con los irracionales, la idea de inconmensurabilidad de segmentos también involucra procesos y argumentos con la idea del infinito.
- Eslabonar diversos aspectos geométricos y algebraicos, condensándolos sobre un problema común, unificando con este material que se encuentra diseminado a lo largo de los semestres previos al inicio del Cálculo.

Los números racionales: Un número es *racional* si puede expresarse como el cociente de dos números enteros, con el denominador distinto de cero. Generalmente, se conoce también la definición equivalente sobre periodicidad, esto es, un número es *racional* si su expresión decimal es periódica. Que el Profesor promedio de secundaria y bachillerato conozca la demostración de esta equivalencia es ya mas dudoso.
De hecho, la demostración de que un número racional tiene expresión decimal periódica, involucra el algoritmo de la división y es muy interesante desde el punto de vista didáctico, pues ilustra el uso de una propiedad de los números enteros en la construcción y conocimiento del conjunto numérico que "le sigue" en complejidad, que son los números racionales.
Sin embargo, aquí nos referiremos principalmente a la otra implicación, esto es, que un número cuya expresión decimal es periódica debe ser necesariamente el cociente de dos enteros, es decir, un número racional.
La prueba de esto es la siguiente:

Supongamos que el decimal periódico es de la forma

$$q = D.d_1d_2d_3\ldots d_m\overline{d_{m+1}d_{m+2}\ldots d_n}$$

Se puede observar que el periodo de este número es

$$\overline{d_{m+1}d_{m+2}\ldots d_n}$$

Si multiplicamos q por 10^m entonces el punto decimal se recorre m dígitos hacia la derecha, esto nos permitirá localizarlo al inicio del periodo

$$q \cdot 10^m \quad = \quad Dd_1d_2d_3\ldots d_m \quad .\overline{d_{m+1}d_{m+2}\ldots d_n}$$

Parte entera Parte no entera

Si multiplicamos ahora el número q por 10^n, el punto se recorrerá n dígitos hacia la derecha, quedando al final del periodo

$$q \cdot 10^n \quad = \quad Dd_1d_2d_3\ldots d_md_{m+1}d_{m+2}\ldots d_n \quad .\overline{d_{m+1}d_{m+2}\ldots d_n}$$

Parte entera Parte no entera

Obtengamos la diferencia de ambos números

$$\begin{array}{rcrl} q \cdot 10^n & = & Dd_1d_2d_3\ldots d_md_{m+1}d_{m+2}\ldots d_n & .\overline{d_{m+1}d_{m+2}\ldots d_n} \\ q \cdot 10^m & = & Dd_1d_2d_3\ldots d_m & .\overline{d_{m+1}d_{m+2}\ldots d_n} \\ \hline q(10^n - 10^m) & = & E & .000000000 \end{array}$$

En la resta se puede observar que la parte no entera por ser la misma en ambos números da como resultado cero, si llamamos E a la diferencia de las partes enteras de los decimales

$$E = Dd_1d_2d_3\ldots d_md_{m+1}d_{m+2}\ldots d_n - Dd_1d_2d_3\ldots d_m$$

Entonces se tendría que el valor de q es

$$q = \frac{E}{(10^n - 10^m)}$$

Como

$$E, (10^n - 10^m) \in Z \text{ y } (10^n - 10^m) \neq 0$$

Entonces

$$q \in Q$$

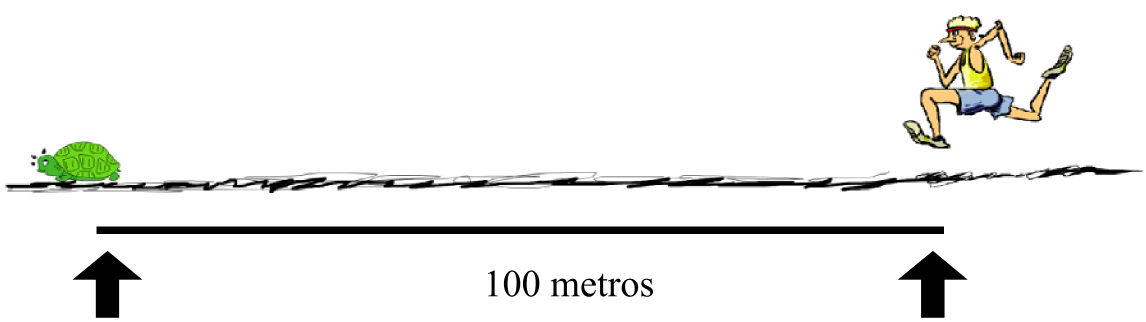
Que era lo que se quería probar.

La Paradoja de Aquiles y la tortuga: Conectemos esta idea con la siguiente historia.

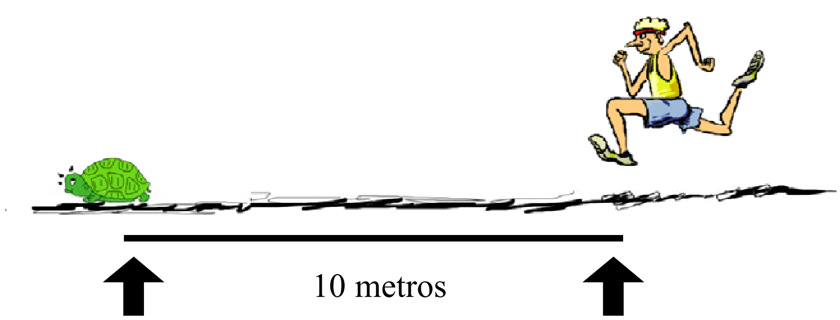
Aquiles, famoso guerrero griego, es considerado el más veloz de los mortales. Una intrépida tortuga reta a Aquiles a una carrera, aún sabiendo que Aquiles es 10 veces más rápido que ella. Por tal circunstancia Aquiles concede a la tortuga una ventaja de 1 km. (1000 mts.), con esta ventaja podríamos preguntar *¿Cuándo Aquiles alcanzará a la tortuga?*

Para dar respuesta a esta pregunta pensemos en lo siguiente:

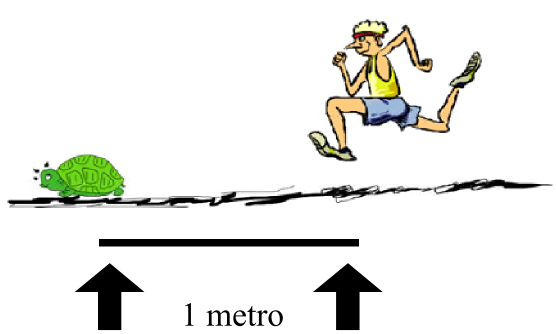
Si Aquiles recorre el kilómetro de ventaja, la tortuga habrá recorrido 100 metros más, en ese momento los 100 metros serán su nueva ventaja.



Mientras Aquiles recorre los 100 metros que los separan, la tortuga tomará una nueva ventaja de 10 metros.



Es claro entonces, que si Aquiles recorre los 10 metros de nueva ventaja, la tortuga tomará otra ventaja de 1 metro.



Puede entenderse con base en el anterior razonamiento, que si la tortuga tiene cualquier ventaja, entonces el tiempo que tarda Aquiles en recorrer esta ventaja permitirá a la tortuga tomar una décima parte de la ventaja anterior como su nueva ventaja.

Aquí podríamos afirmar "Aquiles nunca alcanzará a la tortuga"
Ya que en la realidad intuitivamente se percibe que Aquiles debe, no sólo alcanzar a la tortuga, sino ganarle y por mucho aplicaremos nuestros conocimientos sobre los números racionales y expresiones decimales para aclarar el problema.
La confusión en el razonamiento radica justamente en la solución de una suma infinita de potencias de base 10.
Para poder explicar esto comparemos las distancias que recorren ambos en los diferentes tiempos señalados:

En el mismo tiempo:

La tortuga recorre (en Km.):	**Aquiles recorre (en Km.):**
$\frac{1}{10}$	1
$\frac{1}{10}+\frac{1}{100}$	$1+\frac{1}{10}$
$\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}$	$1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}$
.	.
.	.
.	.
$\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\ldots$	$1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\ldots$

Entonces Aquiles alcanzará a la tortuga después de recorrer:

$$1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\ldots \text{ Kilómetros}$$

Pero esta suma infinita, en notación decimal es:

$$1.111\ldots = 1.\overline{1}$$

cambiando este decimal periódico a cociente se tiene que

$$1.\overline{1} = \frac{10}{9} = 1+\frac{1}{9}$$

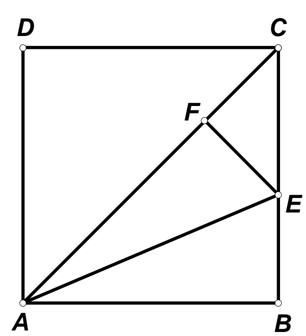
De lo anterior concluimos que Aquiles debe recorrer $1+\frac{1}{9}$ de kilómetros para alcanzar a la tortuga (que en su caso habrá recorrido hasta el momento $\frac{1}{9}$ de kilómetro).
Finalmente podemos concluir que: "Aquiles sí alcanza a la tortuga"

Los irracionales y segmentos inconmensurables: Ahora, relacionaremos el aspecto algebraico de los números irracionales (que se definen como aquellos números que no son racionales) con la idea geométrica de la inconmensurabilidad. Para ello, necesitamos la siguiente

Definición: Dos segmentos de recta son conmensurables si existe una unidad (tercer segmento) que quepa un número entero ***n*** de veces en el primer segmento y un número entero ***m*** de veces en el segundo.

Dados los dos segmento en la parte izquierda de la figura anterior, podemos ver que el segmento mas pequeño en la parte derecha cabe tres veces en el primero y cinco veces en el segundo. De esta forma decimos que dichos segmentos son conmensurables.
Notemos en este momento que para afirmar que dos segmentos no son conmensurables (y que a partir de aquí les llamaremos inconmensurables) debemos estar seguros que ninguna unidad mide un número entero de veces a dichos segmentos.
Un ejemplo de la situación anterior se da al considerar el lado de un cuadrado y la diagonal:

El argumento para observar que es imposible la existencia de un segmento unidad que pueda caber un número entero de veces en el lado y la diagonal involucra un proceso que se repite indefinidamente.
Supongamos que existe una unidad que cabe un número entero de veces en el lado del cuadrado y otro número entero de veces en la diagonal. A partir de aquí, diremos simplemente que la unidad ***mide*** al lado y ***mide*** a la diagonal. De ser así, consideremos el siguiente esquema:



Dado el lado AB y la diagonal AC, constrúyase el punto F sobre AC tal que $AF = AB$. Sea E el punto en CB tal que EF es perpendicular a AC. Observemos ahora que los triángulos

EFA y *EBA* son congruentes, por ser ambos triángulos rectángulos con la misma hipotenusa (*AE*) y un cateto igual (*AF* = *AB*). Esto nos dice que *EF* = *EB*.
Claramente, $\angle ECF = 45^o$ por ser *AC* la diagonal de un cuadrado y como el ángulo en *F* es recto y la suma de los ángulos interiores del triángulo *CFE* debe de ser 180°, se tiene que $\angle FEC = 45^o$. Todo esto dice que el triángulo *CFE* es isósceles y por lo tanto *CF* = *EF*.
En conclusión, *CF* = *EB*.
Ahora, como la unidad (que está fija) mide a *AC* y a *AF* = *AB*, debe de suceder que mide también a la resta de estos segmentos, es decir, mide a *AC* – *AF* = *CF*.
Análogamente, como la unidad mide a *BC* (lado del cuadrado) y a *CF* = *EB*, mide también a la resta *BC* – *EB* = *EC*.
Resumiendo, tenemos que la unidad mide a *CF* y a *EC*.

Pero si observamos nuestra situación, tenemos que *EC* es la diagonal del cuadrado con lados *EF* y *CF*, que es un cuadrado más pequeño que el original y al que también mide la unidad con la que empezamos.
Repitiendo todo el argumento anterior sobre este nuevo cuadrado llegaremos a un tercer cuadrado (mucho más chico) y al que nuestra unidad deberá medir su lado y su diagonal.

Finalmente notemos que si se repite este argumento indefinidamente, encontramos segmentos (lados y diagonales de cuadrado) cada vez mas chicos y a los que nuestra unidad deberá medir, lo cual no es posible por que eventualmente dichos segmentos serán mas pequeños que la misma unidad.
De esta manera, nuestra suposición inicial acerca de la existencia de una unidad con las características descritas no puede sostenerse, demostrándose así la inconmensurabilidad de el lado de un cuadrado y su diagonal.

Pero, ¿qué tiene que ver esto con los irracionales?
Para responder a esta pregunta, primero notemos que por el Teorema de Pitágoras, si llamamos a a la longitud del lado l del cuadrado, la longitud de la diagonal d será $\sqrt{2}a$. El hecho de que estos dos segmentos sean inconmensurables nos dice que no existe una unidad u ni enteros n y m tales que

$$l = nu$$
$$d = mu$$

Esto en longitudes, se escribe

$$a = n$$
$$\sqrt{2}a = m$$

Al dividir la segunda ecuación entre la primera se tiene

$$\frac{\sqrt{2}a}{a} = \sqrt{2} = \frac{m}{n}$$

lo que afirma que $\sqrt{2}$ es irracional.

Bibliografía

Anaya, S. (1990). *Carrusel Matemático.* México, D.F. Limusa-Noriega Editores.
Fregoso, A. (1980) *Los elementos del lenguaje de las matemáticas.* Vol. III y IV. México, D. F. Trillas.
Rodemacher y Toeplitz. (1970). *Números y figuras.* Madrid, España. Alianza Universidad.

PARADOJAS DE FUNDAMENTACIÓN EN LA MATEMÁTICA

María Rosa Rodríguez y Jesús Zeballos
Universidad Nacional de Tucumán, Argentina
mrestofan@tucbbs.com.ar, jesuszeballos@tucbbs.com.ar

Resumen
El interés por la fundamentación racional de la matemática estuvo presente en toda su historia, pero se acrecienta especialmente a partir de mediados del siglo XIX. Sin embargo, los sistemas formales elaborados durante este largo período, para hacer más explícita esta fundamentación han derivado en paradojas, a pesar de sus formulaciones aparentemente consistentes y lógicamente correctas. Para superar estas dificultades, se han formulado respuestas lógico-matemáticas que se clasificaron en tres grandes líneas: el logicismo, el formalismo y el intucionismo. Kurt Gödel demostró que las respuestas de estas escuelas fueron insatisfactorias, ya que las paradojas internas eran insalvables. Sólo podían ser superadas con la formulación de sistemas más amplios y potentes, expresados en un lenguaje metamatemático. Tanto formalistas como logicistas hicieron un tratamiento puramente sintáctico, pero la presencia de las paradojas mostraba que la sintaxis formal es necesaria pero insuficiente. A ella se debe agregar una semántica, que tiene que ver con el contenido significativo de las reglas operativas y una pragmática que esclarece lo apropiado de su interpretación. También señalamos en este trabajo lo inadecuado de la acusación de esterilidad al tratamiento lógico-formal de la fundamentación matemática. Nosotros sostenemos que los sistemas formales no son estériles, puesto que engendran paradojas. En esta constitución paradojal o antinómica de los sistemas formales, se oculta el dinamismo y el espíritu creador de la matemática. Esto nos permite afirmar que el quehacer matemático es al mismo tiempo descubrimiento e invención. Quizá una futura fundamentación de la matemática deba recurrir a la lógica dialéctica y a las lógicas paraconsistentes

Introducción

El saber matemático puede ser considerado desde dos perspectivas metodológicas. La primera consiste en la determinación de su campo objetivo a través de la precisión de sus conceptos; y la segunda, en el establecimiento de reglas rigurosas que precisen las relaciones de deductibilidad entre sus proposiciones. La primera de estas tareas se refiere a la definición de los términos y la segunda a la construcción de pruebas lógicas de demostración. Aquí confluyen la matemática, la lógica y la filosofía de la matemática, cuya conjunción constituye parte sustancial de lo que en la actualidad se denomina "epistemología de la matemática". Desde este punto de vista, se observan al menos tres ámbitos interrelacionados y fácilmente discernibles: el plano ontológico o de la existencia de los objetos matemáticos, el plano lingüístico o simbólico y el plano lógico-formal de la deducción de teoremas, a partir de las fórmulas primitivas, axiomas.
En relación a este último aspecto, la fundamentación racional de las teorías matemáticas, se han señalado múltiples paradojas surgidas de la construcción de sistemas, a pesar de sus formulaciones aparentemente consistentes y lógicamente correctas. Para superar las dificultades que supone la presencia de paradojas o inconsistencias, se han formulado respuestas lógico-matemáticas que se clasificaron en tres grandes líneas: *el logicismo, el formalismo y el intuicionismo.* Kurt Gödel demostró que las respuestas de estas escuelas fueron insatisfactorias, ya que las paradojas internas eran insalvables. Sólo podían ser superadas con la formulación de sistemas más amplios y potentes, expresados en un lenguaje metamatemático. Este trabajo pretende mostrar que estas soluciones al problema

de la fundamentación matemática son también lógicamente insatisfactorias. Una alternativa de solución podría ser la lógica dialéctica, que asume la significación de las paradojas como un motor que dinamiza el progreso del saber matemático.

El ideal de la formalización

En toda la historia de la matemática, filósofos, lógicos y matemáticos se interesaron en precisar los conceptos matemáticos, con definiciones "claras y distintas", y a construir pruebas rigurosas de demostración. En los siglos XIX y XX se acentúa significativamente este interés, recurriendo a la abstracción y formalización del lenguaje matemático. De ello se obtienen dos efectos inmediatos: el afinamiento riguroso de los razonamientos matemáticos y el desarrollo de la lógica-matemática, que en algunos casos se confunde con la metamatemática. A partir de entonces, tanto la lógica como la matemática se estructuraron en sistemas axiomáticos deductivos, consistentes, completos e independientes. Lo que significa en primer término la eliminación de paradojas y/o contradicciones; en segundo lugar, la demostración completa de todos los teoremas en base a los propios axiomas del sistema; y por último, que ninguno de los axiomas o supuestos pueda derivarse como teorema a partir de los restantes.

Formalización Geométrica

Desde la antiguedad se consideró como un modelo de sistema axiomático-deductivo a la geometría euclidiana (siglo III). Efectivamente, en base a unos pocos principios, que Euclides denomina Postulados y Nociones Comunes, se deducen todos los teoremas de la geometría. Durante siglos se consideró que esta geometría era la descripción del espacio físico-real, *"en el cual nos movemos, vivimos y somos".* Esta convicción llegó a tal punto que Kant consideró al espacio euclídeo como una de las formas puras, *a priori* de la intuición. Nunca se cuestionó la verdad de sus proposiciones euclideanas, esto es, el espacio se comportaba tal y cual lo decía su geometría. Sumada a esa adecuación ontológica, se daba el rigor lógico de las demostraciones deductivas. Aunque los geómetras posteriores descubrieron algunos errores de derivación, como por ejemplo la utilización de algunos supuestos no explícitos, en general se aceptó el rigor de las pruebas lógicas de demostración de los teoremas. Ni el rigor sintáctico ni la verdad semántica del sistema euclidiano estaban cuestionados.

Sin embargo, siempre se sospechó de la independencia de sus axiomas. Concretamente el postulado 5º de las paralelas[3] parecía no gozar de las características propias de los restantes como para ser considerado una proposición axiomática. En 1733 el matemático italiano Girolamo Saccheri publica el libro *Euclides ab omni naevo vindicatus,* donde demostraba por reducción al absurdo que el postulado de las paralelas era un axioma independiente. Negando la validez del 5º postulado de las paralelas, creyó haber reivindicado el valor absoluto de la geometría de Euclides. No se percató que con ello había descubierto un nuevo sistema axiomático para la geometría. Efectivamente, logró demostrar todos los teoremas bajo la validez de la hipótesis denominada del ángulo agudo. Con esto queremos

[3] El Postulado 5º se enuncia de diversas maneras: i) Que si una línea recta corta a otras dos líneas rectas formando con ellas ángulos interiores del mismo lado menores que dos ángulos rectos, las dos líneas rectas, prolongadas indefinidamente, se cortan del lado por el cual los ángulos son menores que dos rectos. ii) Por un punto dado pasa sólo una paralela a una recta dada (geometría plana) y un solo plano paralelo a otro dado (geometría del espacio).

decir que las demostraciones lógicas que elaboró Saccheri fueron absolutamente consistentes aunque los resultados obtenidos le resultaron totalmente contra intuitivos, cosa que él estimó como absurdas porque tenía la convicción de que la única geometría válida era la euclídea.

Posteriormente Nicolai Ivanovitch Lobachewsky (1793-1856) y Georg Friedich Bernhard Riemann (1826-1866) por separado construyeron nuevas geometrías. En el año 1829, Lobachewsky publicó en el *Kazan Messenger* un artículo titulado “Sobre los Principios de la Geometría”, que marca el inicio de las geometrías no euclideanas. En él se demuestra que el postulado 5º no podía ser demostrado a partir de los otros cuatro y construye una geometría sobre una hipótesis que contradecía dicho postulado: “Por un punto C exterior a una recta AB puede trazarse más de una recta contenida en el plano ABC y que no corta a la recta AB”. Con este postulado dedujo una teoría geométrica consistente, sin contradicciones lógicas y sin preocuparse si el espacio geométrico supuesto se aplicaba a algún espacio físico. Pero esta geometría parecía tan opuesta al sentido común que el mismo Lobachewsky la llamó “Geometría Imaginaria”.

Riemann, en cambio, no se interesó sólo en la cuestión de cuántas paralelas podían trazarse por un punto exterior a una recta. Sostenía, además, que la geometría no necesariamente debería tratar de puntos, rectas y otros conceptos referentes al espacio real, sino de conjuntos de n-uplas ordenadas que se pueden combinar de acuerdo a ciertas reglas, con lo que logra una concepción absolutamente abstracta del espacio. Entre las reglas más importantes está la “métrica” a definir, que determinará a priori las propiedades del espacio a considerar. Un modelo de la geometría riemeniana, por ejemplo, toma al ‘plano’ como la superficie de una esfera y una ‘línea recta’ como la circunferencia de un círculo máximo en dicha esfera y en este caso la suna de los ángulos de un triángulo es siempre mayor que dos rectos. El desarrollo científico posterior mostró que el espacio riemaniano fue de gran utilidad en la teoría de la Relatividad de Einstein, del mismo modo que el espacio geométrico de Euclides fue totalmente aplicable en la física clásica de Newton.

Con estas aplicaciones se muestra la utilidad de los sistemas abstractos de la geometría, pero al mismo tiempo, se evidencia que las propiedades semánticas no son fundamentales para la construcción de los sistemas axiomáticos en sí mismos, sino una cuestión extrasistemática. Cuando se quiere encontrar a un sistema geométrico abstracto una aplicación a otros campos pueden surgir paradojas, si no se tienen los recaudos necesarios que fija una lógica de la interpretación. Y en este punto surge otra cuestión epistemológica esencial: la prioridad e independencia lógica de las ciencias formales. No hubiera podido existir la física de Newton sin los supuestos de la geometría de Euclides, ni la de Einstein sin los de la geometría riemanniana. Es decir, que no puede haber física sin geometría pero sí geometría sin física.

En la actualidad sólo se tiene en cuenta el rigor lógico-sintáctico, interno al sistema mismo. La máxima expresión de abstracción y formalización se encuentra en la geometría de David Hilbert (1862-1943), en la cual no se alcanza a discernir la geometría pura de una lógica y una sintaxis pura. En 1899, Hilbert publica su *Grundlagen der Geometrie* donde realiza un esfuerzo sistemático por dar un carácter absolutamente formal deductivo a la geometría. Frente a la necesidad de una fundamentación axiomática de la geometría, Hilbert advierte que no todos los términos se pueden definir, ni todas las proposiciones se pueden demostrar. Hay puntos de partida para las definiciones, que son los términos indefinidos, y puntos de partida para las demostraciones, que son los axiomas. Hilbert propone 21

axiomas, llamados “axiomas de Hilbert”, que incluyen a los postulados y a las nociones comunes de Euclides. De esta manera quedó perfectamente axiomatizada la geometría en el siglo XX.
Como resultado de esta formalización matemática el espacio geométrico se constituyó en un concepto absolutamente abstracto, cuya descripción teoremática no requiere de la intuición ni de su aplicación al espacio físico. Ilustración de estas abstracciones no son sólo la geometría, sino también el álgebra de conjuntos, los números imaginarios, la aritmética transfinita y las topologías. Hilbert recurre a la teoría de conjuntos para mostrar que las ideas geométricas debían ser eliminadas y los puntos, rectas y planos debían ser considerados simplemente como elementos pertenecientes a conjuntos dados.

Formalización Aritmética
Al reducir los conceptos geométricos a elementos pertenecientes a un conjunto, Hilbert toma a la teoría de conjuntos de Georg Cantor (1845-1918) como base para hacer una fundamentación absolutamente formal de la geometría, del mismo modo en que Giuseppe Peano(1858-1932) lo hizo para la aritmética. Pero la teoría de conjuntos de Cantor encierra contradicciones o paradojas, con lo cual el ideal de formalización para mostrar la consistencia de los sistemas matemáticos, se vio frustrado. Estas paradojas, estrictamente formales y/o lógico-matemáticas, contenidas en el sistema de Cantor, señaladas en 1897 por Burali-Forti, y Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo (1871-1953), se deben a que el número ordinal y el cardinal que corresponden a un conjunto de números en cuestión serán siempre mayores en una unidad al mayor número de los que constituyen el conjunto, perteneciendo al mismo tiempo a dicho conjunto.
En el mismo error incurre Gottlob Frege en su *Grundgesetze der Aritmetik, begriffsschriftlich abgeleiter* (I, 1893; II, 1903). Bertrand Russell señala este error, en una carta dirigida a Frege y fechada el 16 de Junio de 1902, en la que comenta: “una función no puede jugar el papel del elemento indeterminado” o, en otros términos, “una función no puede ser una función de sí misma”. En gramática lógica diríamos que “un predicado no siempre predica de sí mismo”, relación que Frege inadvertidamente sostuvo y que dio origen a la paradoja del conjunto de todos los conjuntos que no son miembros de sí mismo, señalada por Russell. La paradoja de Cantor es similar a las que Russell considera como paradojas de las clases, de las propiedades y de las relaciones. Para dar solución a estas paradojas, Russell en 1908 formula su *teoría ramificada de los tipos* y Zermelo intenta otra solución con la *teoría axiomática de los conjuntos.* Más tarde, Chwistek en 1921 y Ramsey en 1926 modifican la teoría de Russell formulando la *teoría simple de los tipos.*
En suma, podemos decir que la matemática y la lógica, que se origina en ella, buscaron su propia fundamentación. Como afirmaba Ludwig Wittgenstein (1914) “deben dar cuenta de sí mismas”. Este ideal parecía haber sido alcanzado en la construcción de sistemas axiomáticos deductivos formales, al estilo de *Arithmetics Principia: nova método exposita* de Peano (Turín, 1889), *Die Grundlagen der Arithmetik* (1884) y *Grundgesetze der Arithmetik* (dos tomos 1893 - 1903) de Frege, *Grundlagen der Geometrie* (1899) de Hilbert, *Principia Matemática* (1919)de Russell y Whitehead. El orden temporal de aparición de las obras citadas coincide con la obtención de un mayor rigor en las demostraciones que, a medida que va acrecentándose, va plasmando un lenguaje específico y constituyendo una nueva disciplina: la metamatemática o teoría de la demostración. El foco de interés de los matemáticos se centró en lo que en la actualidad denominamos las

propiedades metamatemáticas de consistencia, completitud e independencia de sus axiomas.

Conclusiones

En 1931, apareció en la revista *Monatshefte für Mathematik und Physik* un artículo con el título *Uber formal unentscheidbare Sätze der Principia Matemática und verwandter Systeme* (Sobre sentencias formalmente indecidibles de Principia Matemática y Sistemas afines) que dio por tierra con todas las esperanzas de poder demostrar la completitud y consistencia de un sistema axiomático. El autor era un matemático austríaco radicado en Estados Unidos, Kurt Gödel (1906-1978) y probaba que ni φ ni noφ pueden ser decidibles en ningún sistema formal de la matemática clásica, incluidos *Principia Matemática, La Aritmética Formal de Peano, La teoría Axiomática de Conjuntos, etc.* Del mismo modo demostraba que es imposible deducir una fórmula que pruebe la consistencia del sistema, o sea que era imposible demostrar, usando los métodos a los que hacía referencia tanto Hilbert como Russell, que los axiomas de la aritmética no conducirían a contradicciones. El teorema de la incompletitud de la aritmética establece por lo tanto que no puede demostrarse la consistencia que contenga la teoría elemental de números, por medio de las reglas de derivación propias de la misma teoría. Gödel mostró cómo construir una fórmula aritmética φ que represente la afirmación matemática "la fórmula φ no es demostrable". Y demostró que φ es demostrable sí y solamente sí lo es su negación. Pero si bien φ no es formalmente demostrable por su construcción φ es verdadera, ya que afirma su propia indemostrabilidad. Puesto que φ es verdadera y formalmente indecidible el sistema que la contiene es incompleto. Si supusiéramos que la fórmula φ signifique "la aritmética es consistente", por las mismas razones tampoco sería demostrable en la teoría axiomática.

Se han ensayado otras demostraciones de consistencia distintas a las "internas al sistema mismo" acudiendo a técnicas más potentes que las de la propia teoría, como por ejemplo la de inducción transfinita que es una extrapolación a los números ordinales transfinitos. Pero estas técnicas, al igual que la teoría de los tipos de Russell, nos llevan a una regresión al infinito, en la cual no habría una base determinada de fundamentación.

Otra razón que hace inalcanzable el ideal de formalización al estilo de Hilbert o Russell consiste en que todo sistema tiene reglas operativas. Las reglas de formación establecen cuáles son las fórmulas que pertenecen al sistema (fórmulas bien formadas) y las reglas de transformación determinan como se pueden obtener nuevas fórmulas a partir de las primitivas. En términos tradicionales diríamos qué procedimientos nos permiten obtener nuevos teoremas a partir de los axiomas o de teoremas previamente demostrados. Ahora bien, una regla es una norma de acción que no puede ser totalmente formalizada, pues debe entenderse el sentido de lo que prescribe. En consecuencia el tratamiento puramente sintáctico, al que se remitían en exclusividad tanto formalistas como logicistas, es necesario pero insuficiente para una fundamentación. A la sintaxis, se debe agregar una semántica, que tiene que ver con el contenido significativo de las reglas operativas y una pragmática, que esclarece lo apropiado de su interpretación.

Por último queremos señalar lo inadecuado de una acusación al tratamiento lógico-formal de la fundamentación matemática: que los sistemas formales son estériles. Nosotros sostenemos que no lo son, puesto que engendran paradojas. En esta constitución paradojal o antinómica de los sistemas formales se oculta el dinamismo y el espíritu creador de la matemática. Esto nos permite afirmar que el quehacer matemático es al mismo tiempo descubrimiento e invención. Quizás una futura fundamentación de la matemática deba recurrir a la lógica dialéctica y a las lógicas paraconsistentes.

Bibliografía

Boyer, C. B. (1999) *Historia de la Matemática.* Madrid. Alianza Editorial.

Camino Cañón, L. (1993) *La Matemática Creación y Descubrimiento*. Madrid. Universidad Pontificia Comillas.

Frege, G. (1974) *Escritos Lógico-Semánticos.* Madrid. Editorial Tecnos.

Gödel, K. (1981) *Obras Completas.* Madrid. Alianza Editorial.

Lakatos, I. (1978) *Pruebas y Refutaciones.* Madrid. Alianza Editorial.

Russell, B. (1967) *Los Principios de la Matemática.* Madrid. Editorial Espasa-Calpe.

PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN Y PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Uldarico Malaspina Jurado
Pontificia Universidad Católica del Perú
umalasp@pucp.edu.pe

Resumen

Si bien es cierto que la resolución de problemas es fundamental en la enseñanza de las matemáticas, es también cierto que en una gran mayoría de casos el profesor de matemáticas no ha sido formado de manera adecuada para orientar las sesiones de resolución de problemas con sus alumnos. Encuestas y entrevistas realizadas a grupos de profesores de nivel básico y superior, revelan que en un alto porcentaje sus experiencias en resolución de problemas se reducen a experiencias individuales y a la lectura de libros y folletos con problemas resueltos, muchos de los cuales son esencialmente algorítmicos, poco atractivos y con dificultades centradas en lo operativo. Una manera de contribuir a llenar este vacío es realizando talleres de resolución de problemas con profesores, en el marco de los planteamientos de Polya y de Schoenfeld . El autor de este artículo considera que los problemas de optimización son particularmente importantes, pues la optimización es una actividad muy natural en el hombre, y en la vida cotidiana frecuentemente estamos resolviendo o tratando de resolver problemas de optimización apoyados fuertemente en la intuición y haciendo conjeturas. Trabajar con problemas de optimización es una excelente oportunidad para estimular el desarrollo del pensamiento matemático - examinar diversos casos, considerar situaciones particulares, hacer representaciones gráficas, abstraer, formalizar, conjeturar y demostrar, buscar contraejemplos, pensar en la existencia de soluciones, plantearse generalizaciones, prever nuevas dificultades, etc. – y para motivar el estudio de teorías matemáticas que resuelven rigurosamente los problemas planteados o los problemas derivados de las especulaciones matemáticas a partir de ellos.

En el presente artículo, como parte de una investigación más amplia, y fruto de las observaciones, las reflexiones y la experiencia del autor como profesor de una maestría en enseñanza de las matemáticas, y animando talleres con docentes de matemáticas de secundaria en ejercicio y con estudiantes universitarios, se presentan diversos problemas de optimización, con comentarios sobre los enfoques considerados al resolverlos, ya sea por iniciativas de los participantes o por sugerencias del autor a partir de ellas.

Introducción

Es importante que los docentes conozcamos una variedad amplia de problemas de optimización: los que se presentan en la vida cotidiana, los que tienen que ver con juegos y estrategias, los relacionados con construcciones, los de geometría, los que tienen que ver con el azar, etc. Reflexionar sobre ellos, manejar adecuadamente el ensayo y error, buscar la visualización, proponer nuevos enunciados o contextualizaciones, resolver el mismo problema de varias formas, hacer variantes al problema y crear nuevos problemas, contribuye a contar con mayores elementos para orientar a nuestros estudiantes, tanto estimulando su pensamiento matemático y valorando sus aproximaciones intuitivas, como mostrándoles una visión más amplia e integrada de las matemáticas, pues a partir de problemas sencillos se pueden tratar temas de geometría, aritmética, álgebra, análisis, probabilidades, etc.

En el marco de un estudio de casos se ha encontrado que de manera especial en los problemas de optimización, juega un papel muy importante la intuición, ya sea para prever la solución o para una buena aproximación a la solución sin usar recursos matemáticos refinados. Esta capacidad humana puede potenciarse grandemente en nuestros alumnos orientando adecuadamente sus aproximaciones intuitivas a problemas de optimización cuidadosamente seleccionados, graduados y presentados.

Un problema sencillo que da para mucho

Entre varios amigos han reunido 4 soles para comprar caramelos y encargan a Juanito que vaya a comprar el mayor número posible de caramelos, debiendo gastar completamente los 4 soles. Juanito va a la bodega y encuentra que sólo hay caramelos de 0,30 soles y de 0,50 soles. ¿Cuál es el mayor número de caramelos que puede comprar Juanito?

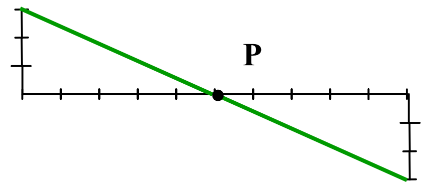
Comentarios:

1. El problema resultó atractivo en casi todos los casos.
2. En la mayoría de los casos fue resuelto por ensayo y error e intuición. Excelente oportunidad para orientar adecuadamente este procedimiento tan frecuente en la vida diaria. No debería reducirse a un conjunto de tanteos sino a un tanteo inicial y luego la búsqueda de una racionalidad que oriente los siguientes ensayos.
3. Una manera interesante de abordar el problema fue utilizando el criterio *"comprar más del más barato"* y luego haciendo los ajustes del caso al advertir que Juanito compraría 13 caramelos de 0,30 soles y le sobrarían 0,10 soles. Debe dejar de comprar caramelos de 0,30 soles de modo que añadiendo a lo que le sobró complete 0,50 soles o un múltiplo entero de 0,50 soles.
4. Una vez resuelto el problema, y ante la sugerencia de hacerle algunos cambios para examinar la eficacia del procedimiento seguido, un cambio natural fue alterar el monto total a gastar. El considerar cantidades mayores, como 40 ó 70 soles, hace ver la ventaja de usar el criterio de "comprar más del más barato". Resultó particularmente interesante discutir el caso al considerar que la cantidad total a gastar es de 1 sol, pues entonces la solución es muy simple: comprar dos caramelos de 0,50 soles y 0 caramelos de 0,30 soles, pero se está comprando más del más caro.
5. Es frecuente que en un intento de resolver más formalmente el problema, se llegue a plantear la ecuación $0{,}3x + 0{,}5y = 4$. Se debe afrontar entonces la dificultad de tener una sola ecuación y dos incógnitas. Ante la opción del ensayo y error para encontrar la solución, es importante recordar que se puede obtener una ecuación equivalente más fácil de manejar, que debe comprarse el mayor número de caramelos (*¿cómo representar esto usando las variables x e y?*) y que la representación gráfica de la ecuación podría dar algunas pistas.
6. Al hacer la representación gráfica de la ecuación $3x + 5y = 40$ usando papel cuadriculado o DERIVE, se encontró la solución al problema examinando los puntos de coordenadas enteras de la recta correspondiente. Momento oportuno para pedirles que enuncien un problema de geometría analítica "equivalente" al problema de Juanito. Se llegó al siguiente enunciado:

   Encontrar el punto (a, b) de la recta $3x + 5y = 40$, tal que a y b sean enteros no negativos y $a + b$ sea el número mayor posible.

7. Algunas reflexiones a partir de esta solución gráfica
   i) ¿La existencia de un punto de coordenadas enteras nos garantiza la existencia de otros puntos de coordenadas enteras?
   Es muy ilustrativo hacer notar que la recta de ecuación $3x + 5y = 40$ tiene pendiente $-3/5$ y que, en consecuencia, si se parte de un punto P de coordenadas enteras, al mover el punto P 5 unidades hacia la derecha (o hacia la izquierda) y luego 3 unidades hacia abajo (o hacia arriba), se tendrá otro punto de la recta y

obviamente sus coordenadas serán enteras.



De esta observación se pasó a generalizar un poco: *si en esta recta existe un punto de coordenadas enteras, entonces existen infinitos puntos de coordenadas enteras.*

La observación anterior puede expresarse más formalmente usando ecuaciones y considerando que el punto P de la recta tiene coordenadas enteras (x_0 , y_0):

$$\begin{cases} x = x_0 + 5t, & t \in Z \\ y = y_0 - 3t, & t \in Z \end{cases}$$

Si consideramos que P es un punto cualquiera de la recta y que el parámetro t varía en R y no sólo en Z, tenemos las **ecuaciones paramétricas** de la recta, obtenidas de manera natural.

Otro nivel de generalización que se examinó: *¿Si en una recta cualquiera existe un punto de coordenadas enteras, entonces existen infinitos puntos de coordenadas enteras.?*

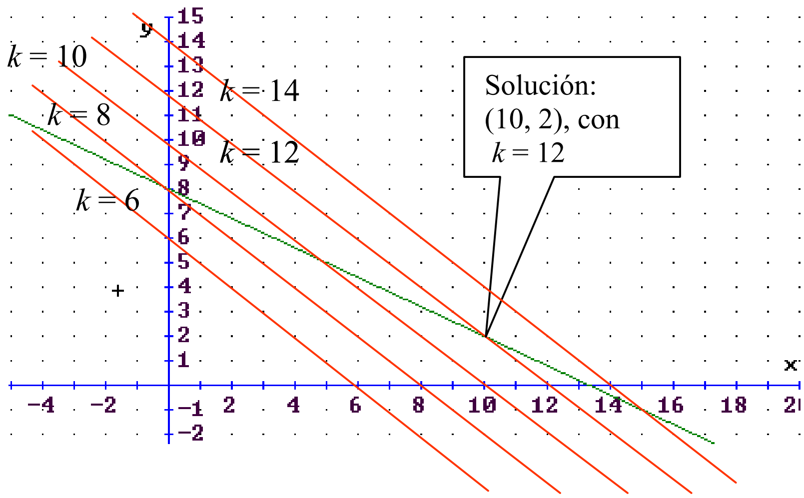
ii) *¿Todos los problemas similares tienen solución?*
Esta pregunta llevó a pensar en variantes al problema, de modo que se obtenga un problema que no tiene solución. La idea del *contraejemplo*, tan importante en matemáticas, resulta de manera natural.

iii) *¿Cómo garantizar que un problema similar tiene solución?*
Esta pregunta llevó a examinar aspectos teóricos y prácticos para resolver **ecuaciones diofánticas:** la ecuación $ax + by = c$, con $a,b,c \in$ Z admite una solución entera (x_0, y_0) si y sólo si el máximo común divisor de a y b es también divisor de c; y en consecuencia, si a y b son primos entre sí, la ecuación admite una solución entera. Utilizando las ecuaciones paramétricas obtenidas anteriormente, se llegó fácilmente a utilizar el método de Euler para resolver ecuaciones diofánticas.

8. También se trabajó con un sistema de dos ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 3x + 5y = 40 \\ x + y = k, \text{ con } x, y, k \in \text{Z}; \quad x, y, k \geq 0; \; k \text{ debe ser máximo.} \end{cases}$$

Haciendo representaciones gráficas (considerando por razones prácticas variaciones de x e y en R) y examinando las intersecciones de una recta fija ($3x + 5y = 40$) con las rectas $x + y = k$, para diversos valores enteros positivos de k, hasta encontrar el punto de coordenadas enteras no negativas que corresponda al mayor valor posible de k, se está empleando, de manera natural, un método de la **programación lineal,** y más específicamente de la programación entera:



9. Ciertamente, todas las disquisiciones anotadas se hacen teniendo en cuenta el nivel de los participantes. Es destacable el hecho de poder incursionar en conceptos y métodos de diversos campos de la matemática a partir de un problema sencillo y "real", y respetando las iniciativas de los participantes.

Otro problema sencillo, complementario al anterior

Carlos dispone de 50 monedas de medio sol y de 60 monedas de un quinto de sol. Si desea entregar a María S/. 13,10 empleando sólo estas monedas, pero el menor número posible de ellas, ¿cuál es el número de monedas de cada denominación que debe emplear Juan?.

Comentarios

1. Resulta interesante plantear un problema como éste, luego de haber trabajado el anterior (de maximización), pues brinda la oportunidad de afianzar reflexivamente los métodos empleados, tratándose ahora de un problema de minimización.
2. Algunos intentos del autor por lograr que los participantes inventaran un problema con estas características, luego de trabajar con el anterior, no fueron muy exitosas.

El problema de la viga

Un tronco de madera tiene la forma de un cilindro circular recto cuyo largo mide 3 metros y cuya sección transversal tiene 20 centímetros de diámetro. Se desea obtener una viga de sección rectangular minimizando el desperdicio de madera en el corte. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de tal rectángulo?

Comentarios

1. En un 90% de los casos observados, se abordó este problema empleando cálculo diferencial, o se percibió resistencias a tratar de resolverlo al ser consciente de no recordar bien las técnicas de este campo de la matemática. Muchos intuyeron, sin poder explicarlo, que el rectángulo debería ser un cuadrado. Quienes lo resolvieron planteándolo formalmente como

$$\textit{maximizar } 4xy, \textit{ sabiendo que } x^2 + y^2 = 100$$

y haciendo las derivadas correspondientes, no encontraron novedad en el problema.

2. En las experiencias tenidas, se percibió cierto escepticismo en los participantes cuando se les pidió resolver el problema sin emplear cálculo diferencial. Se sugirió usar un gráfico que muestra un rectángulo inscrito en una circunferencia, con una de sus diagonales (que es un diámetro del círculo) y pensar en maximizar el área de uno de los triángulos que la diagonal determina con los lados del rectángulo, considerando la diagonal como base de longitud fija y su correspondiente altura variando al moverse el vértice en la circunferencia. Entonces no resultó difícil obtener la solución: cuando la altura es un radio; lo cual lleva al cuadrado.
3. El impacto que produjo el razonamiento geométrico para resolver este problema, sobre todo a quienes lo identificaron como uno propio del cálculo diferencial y se esforzaron por recordar sus métodos, fue ocasión propicia para conversar sobre la *belleza de las matemáticas*, lo cual es sumamente importante para quienes aprenden y para quienes enseñan esta disciplina.

Problemas de optimización en juegos

i) Con el conocido juego de las *torres de Hanoi*, se planteó el problema de determinar el menor número de movimientos para trasladar los discos de un poste a otro bien determinado, considerando inicialmente cuatro discos y luego *n* discos.

Comentarios:

1. Este problema-juego brinda una buena oportunidad para experimentar – y con material concreto - la importancia de considerar un problema más simple que ayude a resolver el problema planteado (en este caso, considerar menos de cuatro discos); para estimular el razonamiento inductivo; para tomar conciencia de la importancia de la demostración y para adoptar una notación adecuada para representar las situaciones.
2. Se decidió usar ternas para indicar la ubicación de los discos en su posición inicial y después de cada movimiento. En el caso de dos discos, A y B, ubicados en el primer poste: pasar de (AB, Φ, Φ) a (Φ, Φ, AB). Empíricamente es fácil concluir que se requieren sólo tres movimientos. ¿Y la demostración? Un diagrama de árbol con todas las posibles secuencias de dos movimientos, demuestra que es imposible llegar a (Φ, Φ, AB) en menos de tres movimientos. Es muy enriquecedor matemáticamente deducir el menor número de movimientos teniendo 4 discos en base al conocimiento del menor número de movimientos con 3 discos y luego obtener la *expresión recursiva* general para el menor número de movimientos: $M(n) = 2M(n-1) + 1$, siendo $M(1) = 1$. La obtención de una expresión funcional para $M(n)$ lleva a trabajar con *progresiones geométricas* o con *ecuaciones en diferencias de primer orden*.
3. Otra línea de trabajo fue usar la obtención experimental del mínimo número de movimientos con 1, 2 y 3 discos y la conjetura que en general el menor número de movimientos con *n* discos será $2^n - 1$. Fue ocasión adecuada para reflexionar sobre la demostración matemática y en este caso para usar la *inducción matemática.*

ii) Otro juego muy interesante es el denominado *"sol y sombra"*: *en una fila de 7 casillas se ubican 3 fichas azules en cada una de las tres casillas de la izquierda y 3 fichas rojas en cada una de las 3 casillas de la derecha. El problema-juego consiste en determinar el menor número de movimientos necesarios para intercambiar la ubicación de las fichas azules y rojas. Un movimiento es: o el desplazamiento a una casilla adyacente vacía, o el salto por encima de una ficha de otro color a una casilla vacía adyacente a ésta. Cada casilla puede estar ocupada a lo más por una ficha.*

Comentarios

Como en el caso anterior, la experimentación y la intuición llevan a la solución, pero no es fácil pasar a una demostración y a una generalización. Fue una oportunidad para evaluar en qué medida usarían creativamente las experiencias tenidas con las torres de Hanoi. Adoptaron una notación y usaron diagramas de árbol, pero el análisis de los casos sencillos no llevó muy fácilmente a una explicación lógica del número mínimo de movimientos. (En este caso no hay un planteamiento recursivo como en el problema de las torres.) Fue útil sugerir que expresen el número que encontraban experimentalmente distinguiendo entre desplazamientos y saltos. Tomó tiempo demostrar que $n^2 + 2n$ es el mínimo número de movimientos, teniendo n fichas azules y n rojas en una fila de $2n + 1$ casillas.

Problemas de optimización y geometría

Personajes de la historia de las matemáticas, como Herón de Alejandría y Jacob Steiner están vinculados al paso de la intuición a la demostración de conjeturas sobre la solución de problemas de optimización en geometría. Es enriquecedor matemáticamente trabajar con problemas isoperimétricos; en particular, iniciar con el problema-juego de *construir una figura plana de perímetro dado, teniendo suficientes cuadrados de la misma área, de modo que el área total sea máxima.* Es muy formativo hacer el análisis de los casos sencillos y llegar a una solución general.

Otra línea de trabajo es la búsqueda de los caminos más cortos. Pasar de problemas en un cilindro circular recto o en un cubo – solucionables con argumentos de geometría plana - a problemas en una esfera, lleva de manera natural a comentar y trabajar intuitivamente temas importantes en la cultura matemática y en las aplicaciones actuales, como las geometrías no euclídeas y el cálculo de variaciones. La limitación de espacio no permite exponer las interesantes experiencias tenidas con universitarios y docentes.

A modo de conclusión

Los cursos, talleres y sesiones de trabajo tenidos por el autor con problemas de optimización como los expuestos, fueron muy motivadores para los participantes y brindaron experiencias en las que interactuaron la intuición, los conocimientos matemáticos, la creación de nuevos problemas y la metacognición, lo cual fue reconocido como muy importante para aprender y para que los docentes orienten mejor la formación matemática de sus estudiantes.

Bibliografía

Corbalán, F. (1998). *Juegos matemáticos para secundaria y bachillerato.* Madrid, España: Editorial Síntesis.

Courant, R and Robbins, H. (1963). *What is mathematics?* New York, USA:Oxford University Press.

Guzmán, M. de, et al. (1994*). Matemáticas - Bachillerato 3*. Madrid, España: Grupo Anaya.

Guzmán, M de (1994). *Para pensar mejor*. Madrid, España: Pirámide.

Malaspina, U. (2002). Optimización matemática. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Volumen 15, Tomo 1, pp 43- 48). México: CLAME.

Mlodinow, L. (2001). *Euclid's window*. New York, USA: The Free Press.

Polya, G. (1957). *Mathematics and plausible reasoning*, Princeton, USA: Princeton University Press.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition and sense making in mathematics. En *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning.* New York, USA: Macmillan.

UNA COESTRATEGIA PARA EL DESARROLLO DE LAS HABILIDADES CIENTÍFICA-MATEMÁTICA: LOS PROYECTOS ESCOLARES

Laura María Benavides López.
Ministerio de Educación Pública de Costa Rica.

laura@costarricense.cr; laura17@latinmail.com

Resumen
El desarrollo de las competencias básicas científicas, matemáticas y tecnológicas son factibles cuando sus contenidos, conceptos y procesos; entre otros, se abordan desde una comprensión social y cuando se emplea un marco interdisciplinario para dar respuesta a los problemas. Los proyectos escolares es una estrategia para el aprendizaje de la ciencia, matemática y la Tecnología ya que potencializa en alumnas y alumnos la adquisición de una visión integrada de los fenómenos naturales y la comprensión de las diferentes teorías y modelos desde una dimensión sociocultural; sobre los que se van construyendo el conocimiento. Los objetivos del presente trabajo son (a) Promover la utilización de los proyectos escolares como una coestrategia para el desarrollo de habilidades cognitivas científicas y matemáticas y (b) Fortalecer el abordaje metodológico, para la iniciación de los niños y jóvenes en la investigación y formulación de proyectos de una forma interdisciplinaria.

Marco de referencia
A partir del 2000 he pertenecido al Comité Regional de la "Feria Científica de Ciencia y Tecnología de la Dirección Regional de Educación de San Carlos", Costa Rica, en mi condición de coordinadora y asesora de ciencias, he analizado un aproximado de 400 informe escrito de los proyectos y escuchado las exposiciones que realizan los jóvenes y niños de los mismos, (las y los estudiantes que participan en este evento están en edades de 6 a los 18 años) lo que me ha permitido determinar que los proyectos de investigación promueven la asimilación de auténticos aprendizajes, desarrollo de estructuras cognitivas, por lo que considero que es un vehículo idóneo para el aprendizaje y contribuye a mejorar la percepción de la sociedad civil respecto a la ciencias y tecnología. Cabe destacar que los proyectos escolares, a diferencia de otras actividades, logran integrar a la familia, a miembros de la comunidad en el proceso de enseñanza aprendizaje de la ciencia y tecnología.

Descripción
Para iniciar el proceso de investigación ,ya sean en proyectos escolares científicos, sociales o tecnológicos; y que se constituyan en una excelente coestrategia para el desarrollo de las habilidades científico matemáticas, el papel del tutor es esencial. Él es un mediador que debe proporcionar experiencias que incentiven el deseo por aprender e indagar acorde a los ritmos y estilos de aprendizaje. Díaz (2001:6) cita: *"La metáfora del andamiaje propuesta por Bruner nos permite explicar la función tutorial que debe de cubrir el profesor. El andamiaje supone que las intervenciones tutoriales del enseñante debe de mantener una relación inversa con el nivel de competencia en la tarea de aprendizaje manifestado por el aprendiz, de manera tal cuanto más dificultades tenga el aprendiz en lograr el objetivo planteado tendrá no solo mayor cantidad de ayuda sino en su cualificación"*. Por lo que se debe proporcionar experiencias que incentiven el deseo por aprender, hacer e indagar. Ser un mediador implica:

- Producir desequilibrio cognitivo.

Propiciar la aplicación de diferentes métodos para realizar los diferentes proyectos de investigación, es lo más acorde a la naturaleza humana, a los estilos y ritmo de aprendizaje.
Ayudar ver al estudiante las metas por alcanzar.

- Elegir momentos significativos de aprendizaje.
- Hacer sentir al alumno(a) aceptado en sus dificultades y éxitos.
- Apoyar a su previa autoestima.
- Comunicarle oportunamente sus logros.
- Formular diferentes tipos de preguntas: reproductivas, divergentes, convergentes y evaluativas.

La primera dificultad que se le presenta al docente es cómo generar ideas de posibles proyectos en las y los estudiantes. En primer lugar es esencial que el docente borre de su mente, que para hacer investigaciones, se requiere de equipo costoso de laboratorio. Como también "superar la idea del carácter abstracto de la matemática"**.** Ochoa(1999:125): "La matemática no se produce por abstracción de la esencia de las cosas. ...La producción matemática consta de esquemas conceptuales que representan las acciones, movimientos y manifestaciones de los seres humanos de las cosas, o de las cosas entre sí, por medio de manipulaciones simbólicas sobre las cuales pueden montarse otras estrategias o niveles de manipulación matemática y así indefinidamente, sobre esquemas matemáticos puede generarse una matematización". Y en segundo lugar, es necesario conocer la estructura de cada una de las disciplinas, su red conceptual. En la enseñanza constructivista, los conceptos son "extraídos de los estudiantes, de sus análisis de sus respuestas cuando se les presenta un problema; ellos son los que lanzan las conjeturas y posibles soluciones al problema". Es relevante que se tome en cuenta los siguientes pasos para el planteo del problema:

1.-Partir de un problema, que contemple las características:

- Sencillo para que todos lo entiendan y puedan opinar acerca de las posibles soluciones.
- Debe causar curiosidad e interés.
- Permitir la diversidad de enfoques.
- Debe facilitar al docente establecer diferentes niveles de solución desde lo más simple a lo complejo.

2.-Brindar un espacio, para saber si todos comprendieron el problema.

3.-Discutir el problema, sin truncar el proceso.

4.-Asumir una posición al respecto y justificarla.

5.-Contraponer las razones, donde son escuchadas y respetadas.

6.-Motivar, para que cada estudiante re-evalúe su posición anterior. El cambio de posición respecto al problema es por la veracidad, lógica y pertinencia que tenga la otra justificación. El docente debe de mantenerse al margen, rescatando los argumentos válidos y contraponiendo los no tan válidos.

7.-Contrastación empírica, se propone una experiencia práctica, elaboración de un modelo, un algoritmo entre otros.

8.-Reacción de los estudiantes ante los resultados, los alumnos confirman su "hipótesis" o pueda que alguno refute lo obtenido y solicite volver a realizar la experiencia u otra similar.

9.-Reorganización de las ideas, de los conceptos generados en la solución del problema.

Presentar su medio físico y natural como una fuente generadora de problemas donde los estudiantes observen, manipulen, analicen, indaguen, discuten y formulen preguntas; es la mejor manera de aprender a aprender.

Seleccionar “algo de ocurrencia cotidiana”; un fenómeno natural, social, tecnológico le da significado al sustento teórico; Acevedo(2002:5): *“centrado en cuestiones científicas y tecnológicas relevantes que afectan a la sociedad, suelen ser adecuadas para motivar a los alumnos porque conectan más fácilmente con sus intereses”*.

Incentivar la observación y el análisis en diferentes dimensiones (social, económica, técnica, científica y ética; hechos cotidianos) como podría ser:

A. Los cambios fisiológicos, sociales y económicos que ocurren cuando nos enfermamos de gripe.
B. Los efectos de las “celebraciones navideñas” en las personas desde varios puntos de vista. Y en diferentes niveles: familiar, comunal y nacional.
C. La tecnología novedosa que emplean las plantas hidroeléctricas, plantas procesadoras de frutas.
D. O podrían ser aspectos del Mundial de Fútbol 2002.
    - La diversidad en los seres humanos, características fenotípicas: ¿de qué dependen?
    - ¿El idioma influye en el desempeño de cada uno de los equipos durante el partido?
    - ¿Por qué nos levantamos los centroamericanos, en la madrugada a ver los partidos de televisión cuando en Japón se realizan durante el día?

El docente o tutor debe brindar diferentes escenarios, experiencia para permitir al estudiante volver a descubrir. Las intenciones y finalidades que el docente haya planificado para la realización de la experiencia deben ser ajenas al alumno. El docente, conocedor de los intereses de sus estudiantes, organiza con anterioridad posibles objetos de estudio: ha planteado preguntas claves de diferente categoría, para inducir, guiar a los alumnos(as) en el proceso indagativo y en la resolución de problemas de una forma sistemática. La observación y discusión de los hechos y resultados es importante que se realicen en un ambiente participativo. Siempre se debe partir del marco conceptual preexistente de las y los alumnos para que ellos mismos se planteen preguntas y se den las respuestas. Cuando ellos se sienten escuchados fortalecen su confianza en su forma de pensar, por otra parte, escucharles ayuda al docente a identificar cuánto saben y no saben. Otra estrategia sería iniciar con una lluvia de ideas de algunos posibles temas y anotar las sugerencias en la pizarra. Seguidamente citar los recursos disponibles con que cuenta para desarrollar cada una de las ideas planteadas, priorizarlas; determinar el problema de estudio por consenso (se recomienda la aplicación de los pasos para el análisis del problema citado anteriormente). Después se les pregunta a los alumnos(as): ¿cuál sería la posible solución al problema que han seleccionado?; a la par de cada solución que los estudiantes han manifestado, se anotan cosas que hay que hacer para su posible verificación. De esta manera se visualizará con qué recursos se cuenta. Se organizan los estudiantes en equipos, donde ellos mismos se asignan tareas. Una vez que se ha planteado el problema y los objetivos; viene la fase de indagación bibliográfica que es la base que sustenta el marco teórico. En Costa Rica, las Ferias Científicas son espacios que permiten a los docentes incluir dentro de las actividades educativas la formulación y ejecución de proyectos. Se han establecido dos grandes categorías:

A. **Redescubrimiento**, es una estrategia desde el punto de vista de la enseñanza de la ciencia apropiada, ya que combina el método inductivo deductivo y permite a los estudiantes "redescubrir" soluciones y procesos.
B. **Proyectos Científicos – Tecnológicos**. Los alumnos establecen una hipótesis (causa-efecto), realizan un estudio del caso o diseñan un experimento, recogen sus propios datos, los interpretan y llegan a conclusiones válidas.
   En los Proyectos Tecnológicos, plantean la posibilidad de establecer una nueva tecnología o modificar una existente para resolver problemas específicos.

Si lo que se desea es la aplicación de un principio científico y tecnológico, el docente puede optar por hacer una **experiencia guiada**, mediante la cual le proporciona los materiales y métodos para hacer el experimento (como los que vienen en los libros de texto). En donde los alumnos(as) realizan la experiencia, observan, anotan, registran lo ocurrido y luego obtienen conclusiones. Después de terminado el experimento, los estudiantes realizan una indagación bibliográfica respecto al tema, para tener mano de referencia, como también establecer puntos de encuentro y discrepancias entre lo que dice la literatura y lo que ellos han encontrado. Cuando la experiencia es semiguiada el docente media para que el alumno diseñe el experimento; la ayuda que proporciona el docente es por medio de preguntas, irlo induciendo. Una vez que se propone el diseño metodológico se siguen: la tabulación, registro, conclusiones, análisis, revisión bibliográfica. En cambio el proyecto es una demostración de un principio, procesos científico-tecnológicos, donde se tenga que construir un modelo o hacer un proceso. El acompañamiento es diferente. Una vez que se tienen el objeto de estudio y se ha planteado el problema, ejemplo: ¿Cómo verificar la presencia de hierro en los cereales a base de maíz? Los estudiantes manifiestan que hay que hacer un aparato, pero ¿qué rasgos debe tener ese artefacto? Es aquí donde la revisión bibliográfica se hace primero, referente a hierro, imanes, etc; luego se construye el modelo (que puede ser una réplica de algún artefacto). Se hace el modelo, se prueba y se anotan observaciones, se registran y se sacan conclusiones. Pero cuando el alumno(a) opta por demostrar un proceso; como por ejemplo: la pasteurización, es conveniente que la revisión bibliográfica la realice después de haber demostrado la experiencia. La investigación bibliográfica es un proceso y como tal hay que orientar las acciones. Se presenta a continuación los pasos que se requieren propiciar en la investigación de acuerdo con Molina (1998:70):

- Determinar con claridad el fenómeno, hecho o situación sobre el cual se desea investigar (problemas de comunidad, origen de los pobladores de la comunidad, indicadores de la población, etc.).
- Plantear interrogantes ante la situación, el hecho o el fenómeno específico al cual se quiere dar una respuesta, o ante un objeto de estudio sobre el que se quiere aumentar el conocimiento.
- Concretar el problema, presentándolo mediante una o varias preguntas.
- Señalar los aspectos básicos, derivados de la pregunta que debe ser objeto de la investigación.
- Identificar las fuentes de información (periódicos, revistas, libros de texto y de consulta, personas de la comunidad, familiares, el maestro, etc.).

- Seleccionar la forma más adecuada para recoger la información (observación, encuestas, cuestionarios, lectura y síntesis, etc.).
- Aplicar las formas seleccionadas para recoger la información.
- Resumir e interpretar la información obtenida.
- Analizar la información recogida, organizándola de acuerdo con ciertos criterios, elaborando resúmenes, cuadros, esquemas, etc.
- Presentar un informe final sobre la investigación organizada en forma lógica y coherente.

Es importante resaltar que la experimentación como estrategia didáctica, no es la experimentación que realiza un científico, o la comprobación matemática como recursos de aprendizaje implican una verificación, un volver a rehacer, a redescubrir, permite que el estudiante construya su conocimiento mediante su propia actividad. Otro punto clave, es la elaboración del informe escrito. Por lo general los programas de estudios de Español, en los diferentes currículos incluye la elaboración de textos, lectura técnica y la utilización de riqueza léxica, entre otras cosas. Esto facilita a que las instituciones educativas, las asignaturas y los diferentes profesores se correlacionen. Los jóvenes investigadores deben de llevar (de su puño y letra) apuntado todo lo que han hecho, observado y concluido, aunque no tenga un orden de estructura determinada; estos apuntes a manera de bitácora servirán para elaborar el informe escrito. Una estrategia es emplear papelógrafo para los estudiantes de 10 a 13 años. Un miembro del equipo escribe, intercambia, unifican ideas. El papel del educador es preguntar para que las ideas queden claras; en esta parte el docente debe ser paciente, respetar el ritmo y estilo de aprendizaje de los alumnos. No es conveniente señalar errores de ortografía, ni de concordancia en el momento que están escribiendo, sino después se lee , para que ellos escuchen lo escrito y puedan corregir sus textos. Después se realiza una segunda lectura y se determina si hay información superflua, eliminándola , para lograr un estilo más conciso, como también se debe cuidar que el término que se emplea sea el correcto, las frases que se usan sean claras. Hay normas ya establecidas de presentación para el informe de un proyecto. Los proyectos escolares, no son únicamente un punto de convergencia sino un vértice que abre un abanico de posibilidades para enseñar y aprender de una forma integradora y vincular los contenidos a lo cotidiano a su entorno social y cultural de los estudiantes. La interdisciplinariedad en el desarrollo del proyecto es indispensable: vemos como la matemática se va haciendo útil y significativa a los alumnos, se refuerza lo que es medición de unidades, utilización adecuada de instrumentos de medición, empleo de algoritmos de operaciones básicas, confección de tablas gráficas; el empleo de álgebra, de la estadística y probabilidad se estimula el razonamiento lógico matemático, predicción de cálculo, estimación y la relación de orden entre otros. El abordaje a los problemas y soluciones de cara a la realidades sociales y culturales y comprender de que manera están interrelacionados la ciencia, la tecnología, la matemáticas y otras disciplinas hace que "los proyectos de investigación tengan tal movilización y aplicación de conceptos de procesos de diferentes áreas que facilitan indiscutiblemente el desarrollo de competencias básicas":

A. **Pensamiento conceptual con raciocinio abstracto**, en cuanto va a permitir el análisis de instrucciones complejas que son necesarias para trabajar, sino para utilizar aparatos técnicos, hacer inferencias de procesos figurados no vividos empíricamente.

B. **Capacidad para manipular modelos mentalmente**, para operar sobre representaciones que han sido construidas más en el horizonte del lenguaje digital y funcionando con códigos de representación diferente al escrito.

C. **Codificación y descodificación verbal, escrita y de imagen**, cada vez el lenguaje se hace cada vez más complicado y la manera de cómo éste será transmitido.

D. **Creatividad**, reorganiza el conocimiento de creación de nuevos procesos.

E. **Habilidades innovativas**, crear sobre la marcha colocando el potencial cognitivo al servicio de una adaptación que hoy significa menos lo estable y es mucho más lo cambiante, forjando cualidades personales de tipo psico-cultural para la rápida adaptación al cambio.

Para facilitar visualizar, el enfoque Integral de los proyectos y el desarrollo de habilidades cognitivas ,se presenta la siguiente matriz .

Matriz de Habilidades Cognitivas Científico – Matemáticas.

	Observa	Dosificar	Compara	Infiere	Predice	Analiza	Mide	Comprueba	Propone	Hace	Manipula instrumen-	Registra	Aplica razonamien	Aplica	Resuelve	Plantea problemas a	Estima longitudes	Imaginación	Generaliza	Abstrae constructi-
Proyecto 1.	■		■			■	■	■	■	■	■	■	■		■				■	■
Proyecto2.	■	■	■			■	■	■			■	■		■	■		■	■		■
Proyecto 3.	■		■			■	■	■	■	■	■	■	■	■	■		■			
Proyecto 4.	■		■			■	■	■			■	■			■	■	■		■	■

Honestidad · Disciplina · Racionalidad · Laboriosidad · Tolerancia · Orden · Sistematización · Sensibilidad

Valores y Actividades

Bibliografía.

-Ander-Egg (1993). *Técnicas de investigación social*. México: McGraw-Hill.

-Buendía, Leonor; Clas, Pilar; y Hernández, Fuensanta (1998). **Métodos de investigación en psicopedagogía*. McGraw-Hill. Madrid, España.***

-Copi M., Irving (1995). *Introducción a la lógica*. Buenos Aires, Argentina: Editorial Universitaria.

-Díaz, Friday; Bariga, A.; y Hernández, G. (2001). **Estrategias Docentes para un Aprendizaje Significativo.** ***Interpretación Constructivista. Segunda edición. McGraw-Hill, México.***

-Flórez O., Rafael (1994). *Hacia una pedagogía del conocimiento. La enseñabilidad de la ciencia*. Santa Fe de Bogotá, Colombia: McGraw-Hill Interamericana S.A.

-Instituto Tecnológico Pastoral para América Latina (1999). *La Educación en perspectiva del tercer milenio*. Santa Fe de Bogotá, D.C. Colombia.***-Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (2001).*** *Enseñando y aprendiendo Matemática para la Vida*. ***San José, Costa Rica.***

-Molina B., Zaida (1998). *Planeamiento Didáctico*. San José, Costa Rica: EUNED, 1ª edición.

-Ochoa, R. (1994). **Hacia una Pedagogía del Conocimiento.** ***McGraw-Hill. Bogotá, Colombia.***

-Ochoa, R. (1999). **Evaluación Pedagógica y Cognición.** ***McGraw-Hill. Bogotá, Colombia.***

-Organización de Estados Iberoamericanos (2002). Módulo 0: **Ciencia, Tecnología y Sociedad.** ***Curso a Distancia. Enfoque CTS.***

-Parolsky P., Carolyn; Steiner, Vera; y Blackuell, Peggy (1999). *Vigotsky y la Educación. Desarrollo de conceptos científicos y discurso*. Madrid, España. 2ª edición.

-Pozo, J. (2000).* La Psicología Cognitiva y la Educación Científica*. Facultad de Psicología. Universidad Autónoma de Madrid, España.

-Rodríguez, Myra; y Delgado, Sonia (1999).* Antología: Cursos de asesoramiento a docentes de Preescolar, Primaria y Secundaria para prepararlos en la organización de Ferias de Ciencia y Tecnología*. San José, Costa Rica.

-Rojas, F. (1997). *Las aulas Laboratorio. Una metodología activa de las Ciencias Naturales en el Nivel Primaria*. Segundo Simposio Latinoamericano de ICASE.

-Universidad de Costa Rica (2002).* Manual de presentación de proyectos de investigación en Ferias de Ciencia y Tecnología*. San José, Costa Rica.

-Vargas A., Eddie (2000). *Metodología de la Enseñanza de las Ciencias Naturales*. San José, Costa Rica: Editorial Universidad Estatal a Distancia.

USO DE SOFTWARE EN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

Marco Barrales
Colegio Alemán de Concepción, CHILE
e-mail: mbarrale@dsc.cl , marcobarrales@vtr.net

Resumen

Las clases de matemáticas no debieran tener como objetivo fundamental el aprendizaje de contenidos (definiciones, teoremas, axiomas…) que posteriormente serán aplicados a la resolución de un gran listado de ejercicios y problemas propuestos por el profesor y que justificará el aprendizaje de dichos contenidos, sino que, por el contrario, debieran partir con un problema concreto y familiar para el alumno. Una vez planteado éste y discutido por todos, estudiantes y profesor, traerá como consecuencia la obligación de resolverlo y por tanto la necesidad del aprendizaje de las técnicas que son necesarias para ello y recurrir al uso de tecnología disponible. Es muy importante destacar que durante todo el proceso el alumno hace conjeturas que irá verificando en cada paso. Se dará cuenta que algunas de las conjeturas que hizo son correctas y que otras no lo son, es decir, cometerá errores y aciertos, en función de los cuales irá cimentando su aprendizaje. Pero, por sobre todo, debe aprender que "va al colegio a equivocarse", pero que no debe quedarse en el error, que en la discusión con sus compañeros y el profesorado encontrará la(s) solucione(s), que es probable que más de una sirva, pero que también unas son mejores que otras, que en algunos casos hay una solución óptima, en definitiva irá "aprendiendo a aprender". Se ilustra lo anterior planteando resolver un clásico problema de construcción de cajas utilizando como herramienta de aprendizaje el software DERIVE 5.

Problemas que favorezcan "aprender a aprender"

Las clases de matemática no debieran tener como objetivo fundamental el aprendizaje de contenidos (definiciones, teoremas, axiomas, etc.) que posteriormente serán aplicados a la resolución de un gran listado de ejercicios y problemas propuestos por el profesor y que justificará el aprendizaje de dichos contenidos, sino que, por el contrario, debiera partir con un problema concreto y familiar para el alumno, el cual, una vez planteado y discutido por todos, traerá como consecuencia la obligación de resolverlo y por tanto la necesidad del aprendizaje de las técnicas que son necesarias para ello y como usar la tecnología existente. Damas, de acuerdo al nuevo enfoque metodológico impulsado por la Reforma Educacional Chilena, se orienta al proceso de construcción y adquisición de habilidades intelectuales, en especial las relativas a procesos de abstracción y generalización, formulación de conjeturas, proposición de encadenamientos argumentativos y la utilización y análisis de modelos que permitan describir y predecir el comportamiento de algunos fenómenos en diversos contextos.

El taller que se reporta en este artículo mostró tres ilustraciones específicas que dan una aproximación a los usos de la tecnología, en especial la calculadora gráfica. Ellas son:

a) Actividades de Matemática Integrada para hacerles ver la Matemática como un todo. Además, haciendo problemas de Matemática Integrada podemos motivar a que los alumnos realicen investigaciones a niveles de Enseñanza Básica y Media. Vamos a ver un ejemplo utilizando la calculadora gráfica Voyage 200 PLT.

b) En segundo término, propone resolver el siguiente clásico de máximo y mínimo. La construcción de cajas utilizando como herramienta de aprendizaje las ideas anteriores y el software DERIVE 5, como una aproximación al trabajo en Resolución de problemas.

c) Por último, recupera el análisis y el pensamiento reflexivo que nos provee la geometría (Grecia y Euclides). Permitiendo una exploración mayor que la clásica con regla y compás. Gracias al software, una situación matemática puede ser estudiada desde varios ángulos y de una forma dinámica, amigable para el estudiante y que le lleva a crear sus propias soluciones. Para ello se explora el Cabri Jr.

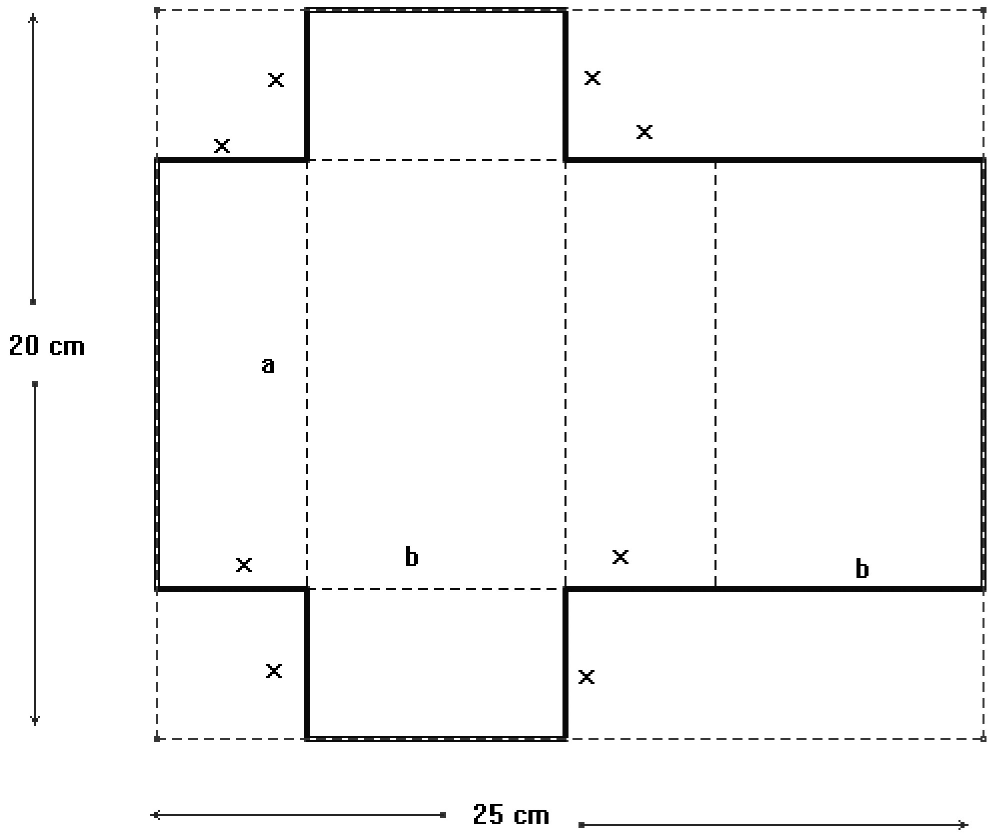
Ilustrando el enfoque "aprender a aprender"con un problema de construcción de cajas en el que se recurre, como una herramienta, al software DERIVE 5

El problema. Tome una hoja de cartón de medidas 20 cm. por 25 cm. y recorte cuadrados de x cm. por x cm. en dos esquinas. Recorte rectángulos de x cm. por 12.5 cm. en las otras dos esquinas. Pliegue el papel de cartón para formar una caja con tapa. ¿Para qué valor de x se obtiene el máximo volumen $V(x)$ de la caja?. Utilice tablas y gráficos para hallar la solución. Comprobar utilizando criterio de la segunda derivada.

Solución.
Realizaremos un esquema (dibujo) de la situación a maximizar. Del diagrama obtenemos las siguientes relaciones:

$a+2x=20$ y $2b+2x=25$, si despejamos a y b respectivamente obtenemos:

```
#22:  a + 2·x = 20
#23:  2·b + 2·x = 25
#24:  SOLVE(2·x + a = 20, a)
#25:                                   a = 20 - 2·x
#26:  SOLVE(2·b + 2·x = 25, b)
#27:                                   b = 12.5 - x
```



Con esta información expresamos el volumen de la caja en forma algebraica.

```
#26:  V(x) := x·(20 - 2·x)·(12.5 - x)
#27:  VECTOR([x, v(x)], x, 1, 10)
```

Vamos a evaluar el la expresión V(x) con valores entre 1 y 10.

#28: $$\begin{bmatrix} 1 & 207 \\ 2 & 336 \\ 3 & 399 \\ 4 & 408 \\ 5 & 375 \\ 6 & 312 \\ 7 & 231 \\ 8 & 144 \\ 9 & 63 \\ 10 & 0 \end{bmatrix}$$

Observamos que el volumen máximo se encuentra entre 3 y 4 cm. para el corte de x.
Por lo cual aproximamos la expresión a ese intervalo con un incremento del 0.1.

#29: VECTOR([x, v(x)], x, 3, 4, 0.1)

#30:

3	399
3.1	402.132
3.2	404.736
3.3	406.824
3.4	408.408
3.5	409.5
3.6	410.112
3.7	410.256
3.8	409.944
3.9	409.188
4	408

La solución se encuentra entre 3.6 y 3.7, para buscar, "tantear" un número más aproximado haremos un incremento de 0.01

#31: VECTOR([x, v(x)], x, 3.6, 3.7, 0.01)

#32:

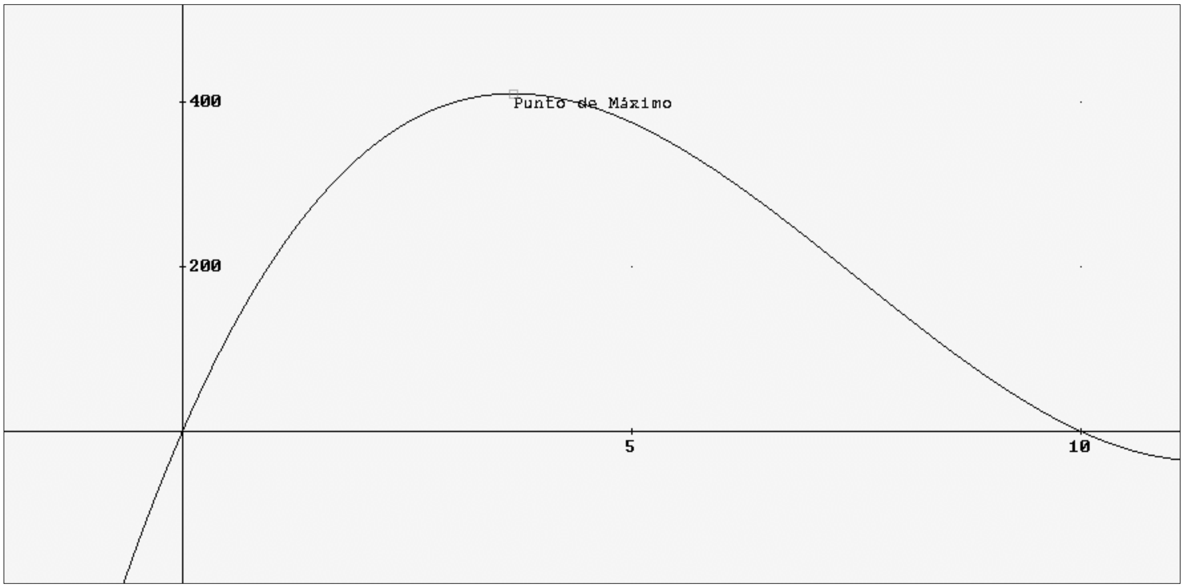
3.6	410.112
3.61	410.147262
3.62	410.177856
3.63	410.2037940
3.64	410.225088
3.65	410.24175
3.66	410.253792
3.67	410.2612259
3.68	410.264064
3.69	410.2623179
3.7	410.256

Con lo cual podemos concluir que si hacemos un corte de 3.68 cm. obtenmos un volumen máximo para nuestra caja. Es necesario una aproximación tan exacta? Podremos cortar con una tijera en 3.68 cm.

Veamos ahora el gráfico de la situación.
Cuidado ajustar escala de los ejes, según la situación problemática.

Qué podemos concluir de la gráfica? Qué sucede después del valor 10 cm?

Apliquemos herramientas de cálculo para comprobar nuestras conjeturas.
Si la primera derivada la igualamos a cero obtenemos dos soluciones, ambas sirven?



#33: $\frac{d}{dx}\ V(x) := x\cdot(20 - 2\cdot x)\cdot(12.5 - x)$

#34: $2\cdot(3\cdot x^{2} - 45\cdot x + 125)$

#35: $\mathrm{SOLVE}(2\cdot(3\cdot x^{2} - 45\cdot x + 125),\ x)$

#36: $x = \frac{15}{2} - \frac{5\cdot\sqrt{21}}{6} \vee x = \frac{5\cdot\sqrt{21}}{6} + \frac{15}{2}$

#37: $x = 11.31881307 \vee x = 3.681186920$

Punto crítico x = 3.681186920.
Obtenemos la segunda derivada de V(x) y sustituimos el valor de x.

#38: $\frac{d}{dx}\ (2\cdot(3\cdot x^{2} - 45\cdot x + 125))$

#39: $6\cdot(2\cdot x - 15)$

#40: -45.82575695

Según el criterio de la segunda derivada,
el valor de x = 3.681186920 origina un punto de máximo

Conclusiones

Trabajando con esta metodología se logra no solo adquirir competencias en el campo de la matemática, sino también en el trabajo grupal de los estudiantes. La discusión de las soluciones y la elección del mejor método de investigación serán un significativo aporte al aprendizaje del respeto a las opiniones ajenas y el reconocimiento del error propio y el acierto ajeno como también el respeto al que se equivoca.

Bibliografía

Böhm, J. (2002). Dale un Giro. Tercera Edición. *Revista Innovaciones Educativas*. Dallas. Texas Instruments, Inc.

Carral, M. (2002). Construcción de funciones con Cabri Géomètre. *Memorias Segundo Encuentro de Matemática.* Colegio Alemán de Concepción. Chile.

Castro A. y Rojas A. (2002) Proyecto de Investigación de Enseñanza de la Matemática en Costa Rica. *Revista Innovaciones Educativas*. Dallas. Texas Instruments, Inc.

Contreras, J. y Del Pino, C. (2002). Implementación de gráficos de funciones algebraicas con Cabri. *Memorias Segundo Encuentro de Matemática.* Colegio Alemán de Concepción. Chile.

Facultad de Educación de la Universidad de Concepción. (2001). NB-5 Subsector Matemática. Apunte. *Programa de Perfeccionamiento Fundamental* Enero 2001. Concepción.

Keyton, M. (1996). 92 Geometric Explorationes on the TI-92. Dallas: Texas Instruments, Inc.

Llorens, J. (2000). *Introducción a DERIVE 5*. Diazotec. Valencia. España.

Mora, J.A. y Monzó, O. (1999) Coordenadas en Cabri Géomètre II, Un acercamiento al Análisis y la Estadística. *Memorias IX J.A.E.M*. Lugo, España.

T^3 España. (1998). *Cabri-géomètre en la calculadora TI-92.* Madrid: Texas Instruments.

Texas Instruments.(1999). *Manual de la Calculadora Gráfica TI-83 Plus*. U.S.A

Vonder, Ch. y Engebretsen, A. (1996). *Geometric Investigations for the Classroom*. Dallas: Texas Instruments, Inc.

TALLER TÉCNICAS PARTICIPATIVAS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Myrna Edith Brúculo
Licenciatura en Matemática-San Pedro Nolasco-Universidad del Aconcagua
myrnabru@uolsinectis.com.ar

Resumen
Para la integración de los miembros más jóvenes a nuestra sociedad es imprescindible la adquisición de una formación matemática que les permita plantear y resolver problemas cotidianos, desarrollar la capacidad para explorar, formular hipótesis, predecir, analizar la realidad, producir ideas y conocimientos nuevos, entender situaciones e informaciones y acomodarse a contextos cambiantes. Y es allí en donde los docentes encargados de la consecución de ese fin tienen la responsabilidad de dominar los métodos, medios instrumentales y técnicas que les permita a los alumnos la construcción del conocimiento de manera tal que mediante la aplicación de estos recursos se puedan desarrollar al máximo sus potencialidades. El taller que se presenta en este artículo parte de la premisa que la actividad grupal es un medio fundamental para la construcción del conocimiento individual y colectivo. Es por ello que se realiza una descripción detallada de:

-Técnicas de presentación
-Técnicas que contribuyen a facilitar el trabajo en grupo
-Métodos y técnicas que propician la asimilación de conocimientos
-Métodos y técnicas participativas para la solución creativa de problemas, entre otras

Estos étodos, técnicas y procedimientos serán presentados mediante la aplicación a situaciones problemáticas concretas típicas del quehacer matemático en el aula.

El taller
Casi en el umbral de un nuevo siglo, cabe destacar que la educación matemática es ética. No podemos pensar en aprender si no es con, por y para otros. Todo saber implica un grado de compromiso social desde el momento en que nos planteamos como meta el aprender para comprender y transformar la realidad. Es por ello que este trabajo surge como una alternativa innovadora en la que se aplicarán métodos y técnicas participativas. Permitiendo que el docente optimice al máximos los recursos a su alcance . Y logrando así los mejores resultados en esta tarea que es enseñar a aprender.
La Estadística Aplicada en el curso de Matemática II de la modalidad Ciencias Naturales, Salud y Ambiente posee gran importancia. Es por ello que la sociedad actual, con su cúmulo de problemas requiere técnicos superiores con conocimientos estadísticos que le permita ser capaz de enfrentarse a las demandas de un mundo que exige soluciones comunes a situaciones de apariencia diferentes.
El taller TÉCNICAS PARTICIPATIVAS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS tiene como propósito que los participantes tomen conciencia de la importancia de la aplicación de técnicas participativas en la resolución de problemas. Contempla realizar las actividades de:

-Analizar un ejemplo propuesto y señalar las distintas técnicas participativas que se aplican en los distintos momentos de la clase.
-Elegir una situación problemática concreta del quehacer en el aula y aplicarle las técnicas participativas que crea pertinente.

Las técnicas y métodos

Si todo o casi todo cambia, es descartable o tiene fecha de vencimiento, ¿qué vale la pena enseñar?, ¿qué es necesario saber? En todos los países del mundo se discute en torno a estas preguntas. En matemática, una tendencia generalizada parece señalar que lo mejor que nuestros alumnos pueden llevarse de su paso por la universidad son los buenos y eficaces procesos de pensamiento, que no se vuelven obsoletos con tanta rapidez y que tienen un amplio abanico de aplicaciones.
Es por ello que a través de la conversación heurística se promoverá el intercambio de ideas. Aceptando puntos de vista contrarios a los propios. Mediante la búsqueda parcial se facilitará el trabajo simplificando la tarea. A través del seminario se discutirá en pequeños grupos. El P.N.I es una técnica de integración. La técnica rejilla permite que el alumno resuelva problemas y ejercicios en corto tiempo. La situación problémica permite que se pueda realizar una síntesis de todo lo estudiado referido al tema en cuestión. La discusión en pequeños grupos promueve la participación activa y mancomunada de todos los integrantes del grupo Y finalmente la discusión plenaria se utiliza como recurso integrador final.

Técnicas que facilitan el trabajo en grupo
Algunas de las técnicas más usadas para estimular la participación e integración de los miembros del grupo son: La técnica de presentación; El encuadre; Parejas cruzadas; Técnicas de las expectativas de los participantes.

Métodos que propician la asimilación de conocimientos
Entre los métodos que **permiten acelerar la adquisición de conocimientos está el método de** discusión en sus diferentes variantes: Discusión en pequeño grupo; Discusión plenaria; Conferencia; Panel. Asimismo tiende a estos propósitos el método problémico: exposición problémica; conversación heurística; método investigativo. Y, la técnica rejilla, entre otros.

Técnicas para la solución creativa de problemas.
Entre las técnicas que favorecen el desarrollo del pensamiento creativo puede considerarse: Las técnicas de Edwuard De Bono (P.N.I., C.T.F., donde las siglas se corresponden con Positivo, negativo, interesante y Considere todos los factores); Tormenta de cerebros o lluvia de ideas; El antiéxito.

Las situaciones peoblémicas

Situación 1
El tema de medidas de tendencia central (promedio, mediana y moda) y medidas de variabilidad es fundamental en la formación de alumnado que le permite interpretar la terminología estadística, tener nociones del alcance y limitaciones de esta disciplina. Como así también aplicar sus conceptos a la resolución de situaciones problemáticas inherentes a ésta especialidad.

Objetivos
-Elaborar una tabla de frecuencias.
-Deducir las expresiones matemáticas del promedio, mediana, moda, desviación media y varianza.
-Graficar la información con el tipo de gráfico pertinente.
-Resolver situaciones problemáticas concretas que muestren la necesidad de una teoría cuantitativa que permita tomar decisiones e interpretar la información.

Desarrollo
-Como recurso motivador, el profesor hará una breve reseña histórica de la evolución de la estadística hasta nuestros días. Resaltando la importancia en la toma de decisiones.
-Se formarán cinco grupos.
-El profesor le entregará a los alumnos una guía teórico práctica de completamiento.
-Se realizará una indagación de ideas previas donde se recordarán las expresiones matemáticas del promedio, mediana antes vistas.

Grupo 1. Deberá completar en la guía el proceso a través del cual se obtiene el valor mediante la expresión matemática del promedio (en serie simple y en intervalos de clases).
Grupo 2. Deberá completar en la guía el proceso a través del cual se obtiene el valor mediante la expresión matemática de la mediana.
Grupo 3. Deberá completar en la guía el proceso a través del cual se el valor mediante la expresión matemática dela moda.
Grupo 4. Deberá completar en la guía el proceso a través del cual se obtiene el valor de la expresión matemática de la desviación media.
Grupo 5. Deberá completar en la guía el proceso a través del cual se obtiene el valor de la expresión matemática de la varianza. Graficar la información.

Actividad práctica 1
-Discusión en pequeños grupos.
-Discusión conferencia.
Los grupos se reunirán para intercambiar opiniones referidos a las producciones que han realizado. Expondrán las producciones que obtuvo cada grupo sobre los contenidos que se le fueran asignados. Se evaluarán mediante interrogatorio oral. La actividad en el plenario tendrá cuatro momentos:

-Exposición de trabajos.
-Discusión colectiva
-Síntesis final.
-Aprobación de los indicadores de evaluación.

En el transcurso del seminario cada grupo presentará su producción en la cual podrán participar activamente todos los alumnos mediante el intercambio de opiniones, dudas, verificación de conclusiones. Es fundamental el rol de cada estudiante, especialmente el de los secretarios que son los encargados de informar sobre los indicadores de evaluación y las conclusiones a las que se arribe. Para evaluar la actividad se realizará un P.N.I.

Actividad práctica 2
Técnica de la rejilla
Se agruparán en cinco equipos, de cinco alumnos cada uno, según la siguiente rejilla:

EQUIPOS	A	B	C	D	E
I	1	2	3	4	5
II	6	7	8	9	10
III	11	12	13	14	15
IV	16	17	18	19	20
V	21	22	23	24	25

Esta técnica consta de dos momentos.
-En el primer momento cada equipo resolverá un ejercicio. Dicho grupo estará construido con los números que quedaron en la común.
Todos los miembros actúan como registradores y tienen la posibilidad de resolver y entender el ejercicio asignado para poder explicarlo en el segundo momento.
-En el segundo momento los equipos se forman en filas quedando integrados por un representante de cada uno de los grupos anteriores.
Deberán resolver todos los ejercicios propuestos para la actividad. Una vez finalizada esta etapa, se realiza un plenario donde un grupo seleccionado al azar o designado dará una explicación general de las soluciones de los ejercicios, procediéndose posteriormente al debate y análisis conjunto. Al finalizar la actividad, el profesor o jefe de grupo incidirá en los aspectos mas relevantes del tema tratado y solicitará opiniones para evaluar la técnica usada.

Situación 2
La siguiente tabla muestra la distribución de edades de una cierta enfermedad reportada durante un año en estado particular.

Edad	Nº	Xi	Fi . Xi	Fa	Lri	Lrs
[5-14	5			5		
[15-24	10			15		
[25-34	20			35		
[35-44	22			57		
[45-54	13			70		
[55-64	5			75		

-Completa la tabla y calcula el promedio según la expresión correspondiente.
-Realiza la gráfica conveniente que represente la distribución.

Situación 3
La siguiente tabla muestra la distribución de edades de una cierta enfermedad reportada durante un año en estado particular.

Edad	Nº	Xi	Fi . Xi	Fa	Lri	Lrs
[5-14]	5	9.5				
[15-24]	10	19.5				
[25-34]	20	29.5				
[35-44]	22	39.5				
[45-54]	13	49.5				
[55-64]	5	59.5				

Completa la tabla y calcula la mediana según la expresión correspondiente.

Situación 4
La siguiente tabla muestra la distribución de edades de una cierta enfermedad reportada durante un año en estado particular.

Edad	Nº	Xi	Fi . Xi	Fa	Lri	Lrs
[5-14	5				4.5	
[15-24	10				14.5	
[25-34	20				24.5	
[35-44	22				34.5	
[45-54	13				44.5	
[55-64	5				54.5	

Completa la tabla, calcula la moda según la expresión correspondiente.

Situación 5
Completa la tabla, calcula la desviación media y la varianza según la expresión correspondiente .Grafica la información.

Edad	Nº	Xi	Fi . Xi	Fa	Lri	Lrs
[5-14	5				4.5	
[15-24	10				14.5	
[25-34	20				24.5	
[35-44	22				34.5	
[45-54	13				44.5	
[55-64	5				54.5	

Actividad práctica 3
-discusión en pequeños grupos.
-Discusión plenaria.
En esta actividad los alumnos resolverán una situación problemáticas inherentes a la especialidad, donde harán transferencia de los conceptos aprendidos.

Ejercicio propuesto
-Los siguientes datos representan los niveles de glucosa en sangre extraída a 100 niños en ayunas:

60-56-61-57-77-62-75-63-55-64
59-60-57-61-57-67-62-69-67-68
80-65-72-65-61-68-73-65-62-75
64-66-61-69-76-72-57-75-68-81
64-69-64-66-65-65-76-65-58-65
56-68-71-72-58-73-55-73-79-81
71-65-60-65-80-66-80-68-55-66
65-72-73-73-75-75-74-76-68-73
63-73-74-68-59-69-55-67-65-67
59-67-56-67-62-65-75-62-63-63

-Confeccionar una tabla e indicar frecuencia, frecuencia relativa, porcentaje, marca de clase, límites reales .
-Calcular promedio, mediana, moda, desviación media y varianza.

Actividad práctica 4
-Situación problémica.
-Plenario.

Situación 6
En una experiencia genética sobre drosóphila melangaster se analiza la longitud del ala de 20 moscas de tipo A, obteniéndose los siguientes datos:

93-90-97-90-93-91-96-94-91-91-88-93-95-91-89-92-87-88-90-86

Analizar los datos y, sin agruparlos en intervalos, hallar su modo, mediana, media, desviación típica y desviación media representa la información en un gráfico conveniente.

Estrategias de Aprendizaje
a) Confeccionar una tabla.
b) Calcular medidas de tendencia central y medidas de dispersión.
b) Grafica la información obtenida.
Evaluación mediante plenario debate.

A modo de conclusión
Esta propuesta de trabajo es sumamente enriquecedora puesto que posee una gama variada de recursos. Es viable y se puede aplicar en distintos contextos dada la flexibilidad que presentan las técnicas participativas en su ejecución. Como ya hemos visto, cuando un alumno o cualquier persona se enfrenta a una tarea del tipo que denominamos problema tiene que poner en marcha una amplia serie de habilidades y conocimientos. La eficiencia en la solución de problemas depende en gran medida de la disponibilidad y la activación de conocimientos conceptuales. De allí que la tarea surge cuando el alumno debe llegar a la solución de la situación problémica. De modo que lo problémico es aquello que permite activar en el estudiante los resortes que lo conducirán a la solución.

Bibliografía
Pozo, J. *La Resolución de Problemas*. Editorial Santillana.
Pérez, G. (2000). Los Procedimientos Heurísticos en la Enseñanza de la Matemática, Apuntes.
Polya, G (1976). *Cómo Plantear y Resolver Problemas*. Editorial Trillas.